МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 91

УДК 681.142/155

СПОСОБЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОСТОТЫ ЭМПИРИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

К.Ф. Самохвалов

Простота научной теории может пониматься двояко: как простота описания этой теории или как простота самой теории. Одну и ту же теорию мы можем описать по-разному, прибегая при этом к явным переопределениям терминов. Простота самой теории не изменяется при таких переизложениях теории, а простота описания может, вообще говоря, от этих переопределений терминов зависеть.

Простоту самой теори, скажем h, мы будем называть s-простотой и обозначать через $s(h)$, а простоту описания теории h будем называть sd-простотой и обозначать через $sd\ (h)$. Если мы по каким-либо причинам временно не подчеркиваем различие между s-простотой и sd-простотой, мы говорим о простоте теории без каких-либо дополнительных спецификаций.

Ниже излагаются четыре подхода к измерению простоты научных теорий. Эти подходы, по мнению автора, достаточно хорошо представляют современное состояние дел в этой области.

1. Подход Н.Гудмэна. Нельсон Гудмэн [1-3] развивает свой метод измерения простоты применительно к теориям любой конечной предикатной сигнатуры. Мы же изложим ограниченный вариант его подхода, когда рассматриваемые теории содержат не более двух сигнатурных предикатов, каждый из которых не более чем двуместный. Суть подхода Гудмэна будет ясна и в этом случае, а технические детали, относящиеся к общему случаю, заняли бы излишне большое место.

Итак, подлежат рассмотрению теории, содержащие или 1) один одноместный предикат $(h^{(1)})$, или 2) два одноместных предиката $(h^{(1,1)})$, или 3) один двуместный предикат $(h^{(2)})$, или 4) один двуместный и один одноместный предикат ($h^{(2,1)}$), или 5) два двуместных предиката ($h^{(2,2)}$). Предполагается, что каждая из рассматриваемых теорий описывает свое множество U объектов (назовем его у н и в е р с у м о м теории) и свои отношения на этом множестве, соответствующие сигнатурным предикатам. Это значит, что теория вида $h^{(1)}$ описывает систему вида $\langle U$, унарное (отношение на U) $\rangle$, теория вида $h^{(1,1)}$ описывает систему вида $\langle U$, унарное, унарное $\rangle$ и т.д. Эти системы назовем г л а в н ы м и моделями соответствующих теорий.

Вовсе не подразумевается, что теория h описывает свою главную модель $M(h)$ однозначно. Важно лишь то, что теория позволяет судить о том, какому именно классу $\mathfrak{M}(h)$ возможных моделей принадлежит главная модель $M(h)$ теории. (Имеется в виду, что класс $\mathfrak{M}(h)$ возможных моделей есть класс всех тех и только тех моделей, на которых выполняются аксиомы h.) Этот класс $\mathfrak{M}(h)$ мы и считаем основной характеристикой теории h.

Гудмэн задается вопросом, как для заданной теории h измерить простоту главной модели $M(h)$ этой теории? Ясно, что, во-первых, нужны какие-то измерительные инструменты, и, во-вторых, нужна еще и договоренность о том, как эти инструменты использовать. В качестве измерительных инструментов Гудмэн предлагает использовать наше знание о главной модели, которое черпается либо только из рассматриваемой теории (и тогда результат измерения характеризует теорию), либо из нее и какой-нибудь (неважно какой) дополнительной информации (и тогда результат измерения характеризует не столько теорию, сколько именно ее главную модель, или, как говорит Гудмэн, "внелогический базис теории"). Что же касается договоренности об использовании измерительных инструментов, то применительно к теориям только упомянутых пяти видов $h^{(1)}$, $h^{(1,1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(2,1)}$, $h^{(2,2)}$ она состоит в следующем.

Прежде всего, вводятся четыре понятия бинарных отношений: рефлексивного, симметричного, иррефлексивного и самополного. Первые два понятия общеизвестны, поэтому мы поясним только два последних.

Бинарное отношение $R(x,y)$ и р р е ф л е к с и в н о, если оно удовлетворяет аксиоме: $\forall x \neg R(x, x)$. Например, отношение (на множестве людей) "x есть супруг y" - иррефлексивно. Некоторые отношения не являются ни рефлексивными, ни иррефлексивными. Например, отношение (на том же множестве) "x уважает y" ни рефлексивно, ни иррефлексивно: есть люди, которые уважают себя, а есть - нет.

Бинарное отношение $R(x,y)$ с а м о п о л н о, если оно удовлетворяет аксиоме: $\forall xyzw(R(x,y) \& R(z,w) \& x \neq y \& z \neq w \& x \neq w \Rightarrow R(x,w))$. Например, отношение (на множестве цветов) "x - красный, а y - белый" есть самополное отношение. Самополные отношения неустойчивы: их легко расчленить на два независимых одноместных отношения. Например, "x - красный, а y - белый" распадается на два унарных отношения: "x - красный" и "y - белый".

Далее вводится понятие так называемого релевантного класса моделей (релевантного вида базисов). Оно, применительно к нашему ограниченному рассмотрению, может быть определено следующим образом.

Р е л е в а н т н ы й к л а с с есть либо к(ласс) в(сех) м(оделей) в(ида) ⟨ U,ун(арное)⟩ , либо к.в.м.в. ⟨U,ун.,ун. ⟩,... ..., либо к.в.м.в. ⟨U, бин(арное), бин(арное) ⟩, либо к.в.м.в. ⟨U,бин. с(имметричное) ⟩,..., либо к.в.м.в. ⟨ U, бин. сам(ополное) ⟩, либо к.в.м.в. ⟨U,бин.с.,ун. ⟩,..., либо к.в.м.в.⟨ U,бин. сам.ун. ⟩,либо к.в.м.в. ⟨ U, бин.с.,бин. ⟩,..., либо к.в.м.в. ⟨ U,бин.сам.,бин. ⟩, либо к.в.м.в. ⟨ U,бин.,бин.с. ⟩,..., либо к.в.м.в. ⟨ U,бин.,бин.сам.⟩ , либо р(елевантный к(ласс) ∩, р.к., либо р.к. ∩ р.к. (если пересечение непусто), либо р.к. - р.к. (если разность непуста).

Гудмэн умеет каждому релевантному классу K приписывать некоторое неотрицательное целое число $v(K)$,т.е. с л о ж н о с т ь к л а с с а K ,так,чтобы соблюдались некоторые естественные для интуитивно понимаемой сложности условия, например:

1) если K = к.в.м.в. ⟨ U,ун ⟩, то $v(K) = 1$;

2) если K = к.в.м.в. ⟨ U,бин. ⟩, L = к.в.м.в.⟨ U,бин.рефлексивное ⟩, то $v(K) = v(L) + 1$;

3) если K = к.в.м.в. ⟨ U,бин. ⟩, L = к.в.м.в. ⟨ U,бин.ир(рефлексивное) ⟩, то $v(K) = v(L) + 1$;

4) если K = к.в.м.в. ⟨ U,бин.ир.сам. ⟩, то $v(K) = 2$;

5) если K = к.в.м.в. ⟨ U,бин.ир.сам.с. ⟩, то $v(K) = 1$;

6) если $K \subseteq L$, то $v(K) \leq v(L)$;

7) если $K \cap L = \emptyset$, то $v(K \cup L) = v(K) + v(L)$.

В общем случае эти (и другие,оставшиеся неупомянутыми) условия естественным образом обобщаются.Собственно говоря, только усложнением определения релевантного класса и отличается общий случай от рассматриваемого частного. Все остальные рассуждения с самого начала носят вполне общий характер.

Определив сложность любого р е л е в а н т н о г о класса моделей, мы можем определить затем сложность п р о и з в о л ь н о г о класса моделей. Под сложностью $v(I)$ произвольного класса I моделей M понимается сложность наименее сложного релевантного класса K, все еще охватывающего класс I:

$$v(I) = \min_{K \supseteq I} v(K). \tag{1}$$

Это определение корректно, так как для любого класса моделей I всегда найдется релевантный класс моделей K такой, что $K \supseteq I$.

Под сложностью отдельной модели M понимается сложность единичного класса $\{ M \}$.

Мы уже говорили, что главная модель теории h задается самой теорией неоднозначно. Теория задает некоторый класс $\mathfrak{M}(h)$ моделей, содержащий главную модель $M(h)$, и только. Поэтому, черпая информацию о главной модели только из самой теории, мы в состоянии оценить по формуле (I) сложность $M(h)$ только приближенно как сложность класса $\mathfrak{M}(h)$. Эта оценка всегда будет оценкой сверху:

$$v(M(h)) \leq v(\mathfrak{M}(h)) = \min_{K \supseteq \mathfrak{M}(h)} v(K). \tag{2}$$

С другой стороны, эта п р и б л и ж е н н а я оценка $v(\mathfrak{M}(h))$ сложности главной модели $M(h)$ может рассматриваться как т о ч н о е значение сложности $v(h)$ теории h, ибо $\mathfrak{M}(h)$ задается теорией h однозначно:

$$v(h) = v(\mathfrak{M}(h)) = \min_{K \supseteq \mathfrak{M}(h)} v(K). \tag{3}$$

Что же касается сложности главной модели, то оценку сверху (2) мы можем, конечно, улучшить, если у нас есть дополнительный источник информации о главной модели $M(h)$, не содержащийся в теории h. В этом случае мы знаем, что $M(h) \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}(h)$, и, следовательно, $v(M(h)) \leq v(\mathfrak{N}) \leq v(\mathfrak{M}(h))$. Осталось заметить, что оценка снизу для $v(\mathfrak{M}(h))$ равна 0.

Полагая вслед за Гудмэном, что простота есть величина, обратная сложности, и пользуясь соотношением (3), мы получаем для простоты теории h формулу

$$h = \frac{1}{v(h)} = \frac{1}{\min_{K \supseteq \mathfrak{M}(h)} v(K)}. \tag{4}$$

Так как, с другой стороны, эта простота есть sd-простота (что показывает сам Гудмэн), то формулу (4) мы окончательно перепишем в виде $sd_G(h)=\dfrac{1}{\min\limits_{K\supseteq\mathfrak{M}(h)} v(K)}$.

Теория простоты Н.Гудмэна является наиболее интересной и наиболее далеко продвинутой попыткой выработать численные критерии простоты эмпирических теорий. Но все-таки его простота есть sd-простота, а в некоторых случаях мы нуждаемся именно в s-простоте. Например, если мы хотим на базе простоты теорий строить индуктивные методы, то желательно при этом иметь дело с критериями простоты, инвариантными, по крайней мере, к явным переопределениям терминов, в которых излагаются теории. Поэтому теория простоты Гудмэна не исчерпывает всей проблематики в этой области.

2. Подход Д.Кемени. Джон Кемени [4] предложил несколько способов измерения простоты научной теории. Все они кажутся менее привлекательными, чем Гудмэновский метод. Остановимся на одном из них, самом простом. Дж.Кемени предлагает для теории h считать мерой ее сложности число $\log_2\overline{\overline{\mathfrak{M}}}(h)$, где $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}(h)$ - число возможных попарно-неизоморфных моделей теории h. Таким образом, простота теории h, по Кемени, выражается формулой

$$s_K(h) = \frac{1}{\log_2 \overline{\overline{\mathfrak{M}}}(h)}. \tag{5}$$

Хотя ясно, что мера (5) есть мера s-простоты, а не sd-простоты, но все-таки область применимости меры Кемени весьма ограничена, так как большинство научных теорий имеют бесконечно много неизоморфных моделей, а для таких теорий мера (5) не определена.

3. Фольклорные (т.е. общеизвестные, но не опубликованные) меры простоты. Иногда говорят, что сложность теории есть число элементов носителя самой маленькой по мощности модели теории. Эта мера есть мера s-простоты, но она плоха тем, что по ней большинство интересных теорий имеют или равную простоту или эта мера к ним вообще неприменима (случай, когда теории не имеют конечных моделей). Бытует оценка сложности теории и по сложности кванторной приставки аксиоматизации теории в нормальной приведенной форме. Эта мера простоты, во-первых, применима только к конечно-аксиоматизируемым теориям, и, во-вторых, она является мерой sd-простоты. Вообще говоря, есть много фольклорных подходов к простоте теорий. Все они, на наш взгляд, менее обосно-

ваны, чем гудмэновский подход, или имеют очень узкую область применимости.

4. Изложим еще один взгляд на s-простоту. Основная идея этого взгляда состоит в том, что чем проще можно вообразить наблюдение, которое могло бы фальсифицировать данную теорию, тем проще теория.

Наблюдения естественно отождествлять с конечными моделями конечных сигнатур, поэтому ниже мы будем сначала говорить о простоте $s(M^{v,n})$ модели $M^{v,n}$ конечной мощности n и конечной сигнатуры v. Пусть для произвольных n и v через $\mathcal{M}^{v,n}$ обозначен класс всех моделей мощности n сигнатуры v. Пусть, далее $\mathrm{Aut}(M^{v,n})$ есть группа всех автоморфизмов модели $M^{v,n}$. Тогда для произвольных $M_1^{v,n}$, $M_2^{v,n} \in \mathcal{M}^{v,n}$ мы говорим, что модель $M_1^{v,n}$ симметричнее модели $M_2^{v,n}$, если и только если $\mathrm{Aut}(M_2^{v,n})$ изоморфно вложима в $\mathrm{Aut}(M_1^{v,n})$. Если $M_1^{v,n}$ симметричнее $M_2^{v,n}$ и $M_2^{v,n}$ симметричнее $M_1^{v,n}$, то эти модели мы называем равносимметричными и пишем $M_1^{v,n} \approx M_2^{v,n}$.

Ясно, что отношение $\approx$ есть эквивалентность на $\mathcal{M}^{v,n}$. Выберем из каждого класса эквивалентности по одному представителю и из всех таких представителей составим множество, которое обозначим через $\mathfrak{M}^{v,n}$. Ясно, что любых два таких множества $\mathfrak{M}_1^{v,n}$, $\mathfrak{M}_2^{v,n}$ всегда равномощны и конечны. Кроме того, ясно, что отношение "симметричнее" является частичным порядком на исходном классе $\mathcal{M}^{v,n}$, а следовательно, и на множестве $\mathfrak{M}^{v,n}$.

Допустим, что данная конкретная модель $M^{v,n}$ равносимметрична тому члену множества $\mathfrak{M}^{v,n}$, который мы решили обозначить через $M_0^{v,n}$. Тогда число членов множества $\mathfrak{M}^{v,n}$ таких, что модель $M_0^{v,n}$ симметричнее любого из них, зависит только от выбора модели $M^{v,n}$ и не зависит от конкретного выбора множества представителей $\mathfrak{M}^{v,n}$. Обозначим это число через $a(M^{v,n})$.

Аналогично мы определяем число членов множества $\mathfrak{M}^{v,n}$ таких, что каждый из них симметричнее модели $M_0^{v,n}$. Обозначим это число через $b(M^{v,n})$.

Теперь мы определяем простоту (произвольной) модели $M^{v,n}$ как значение $s(M^{v,n})$ функции s, задаваемой соотношением:

$$s(M^{V,n}) = \frac{a(M^{V,n})}{a(M^{V,n}) + b(M^{V,n})} .$$

По этому определению простота произвольного наблюдения указывает относительное положение этого наблюдения среди других, сравнимых с ним по симметричности и частично упорядоченных по мере возрастания степени симметричности. Эта простота всегда есть положительное рациональное число, меньшее единицы.

Эмпирической теории h, если она определена подобающим образом, всегда ставится в соответствие некоторый класс Fals_h (возможно, пустой) конечных моделей некоторой фиксированной конечной сигнатуры v_h (сигнатуры терминов наблюдения)*). Каждая модель из этого класса ассоциируется с возможным наблюдением, фальсифицирующим теорию h, если оно фактически осуществится. А если это так, то идея о том, что простота теории должна монотонно зависеть от простоты ее самого простого фальсификатора, находит естественное выражение в следующем определении.

П р о с т о т а э м п и р и ч е с к о й т е о р и и h есть значение $s(h)$ (частичной) функции s, заданной условием $s(h) = \sup\{s(M^{V,n}) \mid M^{v_h,n} \in \mathrm{Fals}_h\}$. Заметим, что все рациональные числа $s(M^{v_h,n})$ ограничены сверху I, так что определение корректно.

Из этого определения следует:

1) Функция $s(h)$ не определена на тех (и только тех) теориях h, для которых $\mathrm{Fals}_h = \emptyset$, т.е. для теорий, не несущих никакой эмпирической информации из-за своей принципиальной неопровержимости.

2) Любое усиление теории (т.е. замена h на h^1 такую, что $\mathrm{Fals}_{h^1} \supset \mathrm{Fals}_h$) может привести только к у в е л и ч е н и ю простоты теории. Поэтому стремления к большей простоте и к большей информативности согласованы друг с другом. Возможно, именно этим объясняется значимость критерия простоты при выборе новых теорий.

3) И наконец, можно показать, что данное определение простоты теории является определением s-простоты, а не sd-простоты**).

---

*) Информацию о том, как осуществляется такое сопоставление, можно извлечь из [5] или [6].

**) Этого нельзя было сказать об определении простоты в [7], которое отличается от данного тем, что отношение эквивалентности в [7] понималось как отношение изоморфизма, а не равносимметричности двух моделей.

Эти три следствия позволяют, на наш взгляд, считать предложенное определение s-простоты теории естественным.

5. Приведенный выше обзор теорий простоты эмпирических теорий скорее идейный, чем технический. Автор не ставил своей целью показать, какие интересные математические задачи немедленно возникают, когда мы обращаем внимание на вычислительные аспекты изложенных подходов. Этой теме должна быть посвящена отдельная публикация.

Литература

I. GOODMAN N. The test of simplicity.- Science, 1958, v.128, p.1064-1069.

2. GOODMAN N. Axiomatic measurement of simplisity.- Journal of philosophy,1955,v.52,p.709-722.

3. GOODMAN N.Recent development in the theory of Simplisity. - Philosophy and Phenomenological research,1958-1959,v.19,p.429.

4. KOMENY D.G. Two measure of compexity.- Journal of philosophy,1955,v.52,p.722-733.

5. САМОХВАЛОВ К.Ф. Об аксиоматическом представлении эмпирических теорий. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып.76).Новосибирск,1978,с.15-25.

6. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. Новосибирск, изд.НГУ, 1978.

7. САМОХВАЛОВ К.Ф. Простота эмпирических теорий. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, 1979, с. 7-11.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 марта 1981 года