МАШИННЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, АНАЛИЗА СТРУКТУР И ПРОЕКТИРОВАНИЯ
(Вычислительные системы)

1982 год Выпуск 92

УДК 519.I

МИНИМАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ОДНОЗНАЧНО РАСКРАШИВАЕМЫХ ГРАФОВ С НАИМЕНЬШИМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

И.Г. Дмитриев

Если каждая n-раскраска графа G порождает одно и то же разбиение множества вершин, то G называется однозначно n-раскрашиваемым. Картрайт и Харари [3] доказали следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4. В n-раскраске однозначно n-раскрашиваемого графа подграф, порожденный объединением любых двух одноцветных классов, связен.

ТЕОРЕМА 5. В однозначно n-раскрашиваемом графе G с p вершинами число ребер $|E(G)| \geq p\cdot(n-1) - \binom{n}{2}$.

В статье рассматривается класс U^n однозначно n-раскрашиваемых графов с наименьшим числом ребер. Доказывается, что минимальная степень графов этого класса удовлетворяет неравенствам $n-1 \leq \delta(G) \leq 2n-3$, причем для любого натурального δ из интервала $[n-1, 2n-3]$ найдется граф $G \in U^n$ с минимальной степенью $\delta(G) = \delta$.

Все не определяемые нами понятия взяты из [I] и [2]. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно множества вершин и ребер графа G. Если дана n-раскраска графа G, то через V_i будем обозначать множество вершин цвета $i = \overline{1,n}$.

Определим две операции над графами, первая из которых дана в работе [4], и покажем, что относительно этих операций класс U^n замкнут.

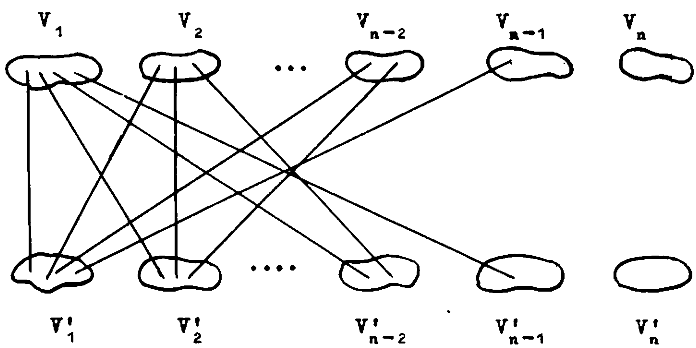
Добавление вершин. Пусть $G \in U^n$. Добавляя к графу G новую вершину x степени $n-1$, смежную с вершинами различных цветов, очевидно, получим граф также из класса U^n.

Частичное соединение графов. Пусть G и G' - не пересекающиеся по вершинам графы класса U^n. И пусть

$V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ и $V' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V'_i$ – разбиения множества вершин при их n-раскраске. Под соединением классов V_i и V'_j будем понимать соединение ребром некоторой вершины из V_i с произвольной вершиной из V'_j. Тогда частичным соединением графов G и G' (обозначим его $G \oplus G'$) назовем граф, состоящий из $G \cup G'$ и ребер, соединяющих класс V_i с классами $V'_1, \dots, V'_{n-i}$ для всех $i = 1, \dots, n-1$.

ЛЕММА I. Если G и $G' \in U^n$, то $G^* = G \oplus G' \in U^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф G^* – n-раскрашиваемый, так как, по определению, $V^*_i = V_i \cup V'_{n-i+1}$ – независимое множество вершин и $V^* = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V^*_i$. В n-раскрашиваемом графе G^* все вершины класса V_i (V'_j) однозначно n-раскрашиваемого подграфа G (соответственно G') также должны принадлежать одному и тому же одноцветному классу. Поэтому и в силу построения графа G^* разбиение $V^* = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V^*_i$ на независимые множества единственно, т.е. граф G^*–однозначно n-раскрашиваемый. Пусть $|V(G)| = p$ и $|V(G')| = p'$. Тогда число ребер $|E(G^*)| = |E(G)| + |E(G')| + \binom{n}{2} = (p+p')(n-1) - \binom{n}{2}$.
Лемма I доказана. На рисунке дана схема соединения классов.



Нам также понадобится операция соединения графов, введенная А.А.Зыковым [I]. Очевидна следующая

ЛЕММА 2. Если граф $G \in U^{n-m}$, то граф $G + K_m \in U^n$ для любых $n > m \ge 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $G \in U^n$ $(n \geq 2)$, то минимальная степень графа G удовлетворяет неравенствам: $n-1 \leq \delta(G) \leq 2n-3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка очевидна. Докажем верхнюю оценку. Предположим, что $\delta(G) > 2n-3$. Тогда число ребер

$$|E(G)| \geq \frac{p(2n-2)}{2} = p\cdot(n-1).$$

Противоречие с тем, что $|E(G)| = p\cdot(n-1) - \binom{n}{2}$. Предложение доказано.

Основным результатом является

ТЕОРЕМА I. Для любого $n \geq 2$ и любого натурального $\delta \in [n-1, 2n-3]$ в классе U^n найдется граф G с минимальной степенью $\delta(G) = \delta$.

Доказательство теоремы I непосредственно вытекает из доказательства теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \geq 2$ существует граф $G \in U^n$ с минимальной степенью $\delta(G) = 2n-3$.

В свою очередь, для доказательства этой теоремы понадобится несколько лемм. Пусть G – произвольный граф из U^n и $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ – разбиение на одноцветные классы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Дефицитом вершины $x \in V$ назовем число $d(x) = \max\{2n-3-s(x), 0\}$, где $s(x)$ – степень вершины x в графе G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дефицитом класса V_i назовем число

$$d(V_i) = \sum_{x \in V_i} d(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор-дефицитом графа $G \in U^n$ назовем вектор $\bar{d}(G) = (d_1, \ldots, d_n)$, где $d_i = d(V_i)$.

Для удобства введем обозначение $\widetilde{U}^n = \{G \mid G \in U^n, \bar{d}(G) = \mathbf{0}\}$.

ЛЕММА 3. Если существует граф $G \in U^n$ такой, что $d(V_i) \leq n-i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то существует и граф $G^* \in \widetilde{U}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем две копии графа G. Вершины второй копии обозначим теми же символами, что и в первой, но со штрихом.

Применим операцию частичного соединения и построим граф $G^* = G \oplus G'$. При соединении классов выбор вершин проведем среди вершин с положительным дефицитом, если таковые есть. По построению, $V_i^* = V_i \cup V'_{n-i+1}$. И так как из V_i выходят $n-i$ новых ребер и $d(V_i) \le n-i$, а из V'_{n-i+1} выходят $(i-1)$ новых ребер и $d(V'_{n-i+1}) \le i-1$, то $d(V_i^*) = 0$, где $i = 1,\dots,n$.

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. В классе U^n существует граф G с вектор-дефицитом $\bar{d}(G) = (n-1, n-3, n-4, \dots, 2, 1, 0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомый граф G построим из полного графа K_n с помощью операции добавления вершин в $n-2$ этапа, где первые $n-3$ этапа состоят из n шагов, а последний - из одного. Промежуточный граф, получающийся после i-го шага j-го этапа, обозначим через $G(nj+i)$, $j = 1,\dots,n-2$; $i = 1,\dots, n$. В любом i-м шаге каждого j-го этапа граф $G(nj+i)$ получается из графа $G(nj+i-1)$ добавлением новой вершины цвета i, смежной с вершиной с положительным дефицитом из каждого класса V_l $(l = 1,\dots,i-1, i+1, \dots, n)$, если $d(V_l) > 0$, в противном случае с любой. При этом графы $G(n) \equiv K_n$, $G(nj) \equiv G(n(j-1)+n)$.

Заметим, что если вектор $\bar{d} = (d_1,\dots,d_n)$ является вектор-дефицитом некоторого промежуточного графа, то последующий граф, получающийся после i-го шага некоторого этапа, будет иметь вектор-дефицитом вектор $\bar{d}' = (d'_1,\dots,d'_n)$, где

$$d'_k = \begin{cases} d_k + (n-2) & \text{при } k=i, \\ \max\{d_k-1, 0\} & \text{при } k\ne i, \end{cases}$$

так как дефициты вершины цвета i не изменяются, но добавляется вершина такого цвета с дефицитом $n-2$, а в случае $k\ne i$ дефицит k-го класса уменьшается на единицу, если он положительный, или остается равным нулю.

Так как $\bar{d}(K_n) = (n-2,\dots,n-2)$, то после первого шага первого этапа получим

$$\bar{d}(G(n+1)) = (2n-4, n-3, \dots, n-3), \dots;$$

после n-го шага первого этапа

$$\bar{d}(G(2n)) = (n-3, n-3, \dots, n-3, n-2), \dots;$$

после n-го шага второго этапа

$$\bar{d}(G(3n)) = (n-4,\ n-4,\dots,n-4,\ n-3,\ n-2);$$

после n-го шага $(n-3)$-го этапа

$$\bar{d}(G(n^2-2n)) = (1,1,1,2,3,\dots,n-4,\ n-3,\ n-2).$$

И наконец, после последнего шага получим

$$\bar{d}(G(n^2-2n+1)) = (n-1,0,0,1,2,\dots,n-4,\ n-3),$$

после чего, перенумеровав цвета, получим искомый граф G с вектор-дефицитом $\bar{d}(G) = (n-1,\ n-3,\ n-4,\dots,2,1,0,0)$. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству теорем 2 и I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. По лемме 4, из графа K_n построим граф $G \in U^n$ с вектор-дефицитом $\bar{d}(G) = (n-1,n-3,n-4,\dots,2,1,0,0)$. Так как, по лемме 3, для любого $i = 1,\dots,n$ верно $d_i \le n-i$, то построим граф G^* с нулевым вектор-дефицитом. Таким образом, в графе G^* имеем $\delta(G^*) \ge 2n-3$, и, в силу предложения, $\delta(G^*) = 2n-3$. Что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Пусть $n \ge 2$ и $\delta \in [n-1,2n-3]$. Случай $\delta=n-1$ очевиден. В качестве графа G, например, можно взять полный граф $K_n \in U^n$. Случай $\delta=2n-3$ доказан.

Пусть $n \le \delta \le 2n-4$. Рассмотрим граф $G' \in \tilde{U}^{\delta-n+3}$ и полный граф K_m, где $m = 2n-3-\delta \ge 1$. Существование графа G' следует из теоремы 2 и неравенства $\delta-n+3 \ge 3$. По лемме 2, граф $G=G'+K_m \in U^n$. Покажем, что $\delta(G) = \delta$. По теореме 2, $|V(G')| = 2(\delta-n+2)^2$. Поэтому для вершины x, принадлежащей подграфу K_m, имеем $s(x) = 2(\delta-n+2)^2 + m-1 = 2(\delta-n+2)(\delta-n+1) + \delta > \delta$, так как $\delta \ge n$. Если вершина x принадлежит подграфу G', то $s(x) = m + s_{G'}(x) \ge 2n-3-\delta + [2(\delta-n+3) - 3] = \delta$, причем $s(x)=\delta$ для тех вершин, которые в подграфе G' имеют степень $2(\delta-n+3) - 3$. Теорема I доказана.

В заключение автор выражает свою признательность Л.С.Мельникову за внимание к работе.

Литература

I. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. -Новосибирск: Наука, 1969. - 542 с.

2. ХАРАРИ Ф. Теория графов. - М.: Мир, 1973. - 300 с.

3. CARTWRIGHT D., HARARY F. On the coloring of signed graphs.- Elem.Math.,1968,v.23,N 4,p.85-89.

4. HARARY F., HEDETNIEMI S.T., ROBINSON R.W. Uniquely colorable graphs.- J.Combin.Theory.,1969,v.6,N 3,p.264-270.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 декабря 1981 года