МАШИННЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ,АНАЛИЗА СТРУКТУР И ПРОЕКТИРОВАНИЯ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 92

УДК 519.I

ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЬЮ СИММЕТРИИ

А.В.Макаров

В настоящее время графы широко используются при моделировании различных сложных систем. При этом приходится сталкиваться с задачами на графах, решение которых требует большого объема вычислений и поэтому для задач большой размерности практически невозможно.

В связи с этим представляется интересным построение таких классов графов, для которых алгоритмическое решение ряда традиционных задач, возникающих, в частности, при проектировании сетей связи,существенно упрощается и требует сравнительно небольших затрат машинного времени и памяти ЭВМ.

В работе описываются возможности пакета программ,который позволяет эффективно генерировать простые графы и проводить для них количественный учет свойств симметрии.Последнее позволяет во много раз сократить объем вычислений при решении такого рода задач, как, например, проверка графа на k-связность, нахождение для выделенной пары вершин графа t - кратчайших (по числу входящих ребер) путей, ведущих из одной вершины в другую (k ,t - некоторые натуральные числа) и т.п. Пакет написан на алгоритмическом языке ПЛ/I.

Основные понятия и определения, используемые в статье,согласуются с общепринятыми [I,2].

Основой рассматриваемого пакета программ является блок генерации графов, обладающих закономерностью симметрии. Составной частью этого блока является программная реализация алгоритма Шура [4].

Пусть G – транзитивная группа подстановок, действующая на множестве Ω, $\Omega = \{1,\dots,n\}$, и пусть $\Delta_1 = \{n\}$, $\Delta_2,\dots,\Delta_k$ – орбиты стабилизатора $G_n = \{g \in G, g(n)=n\}$. Для каждой орбиты Δ_μ, $1 \le \mu \le k$ определим матрицу $B(\Delta_\mu) = (b_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$, где $b_{ij} = 1$, если существует $g \in G$ и $x \in \Delta_\mu \mid g(n) = j, g(x) = i$ и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Очевидно, $B(\Delta_1)=E$ (E – единичная матрица), $\sum_{i=1}^{k} B(\Delta_i) = I$ (I – матрица из единиц).

Теперь опишем алгоритм Шура построения всех графов X с n вершинами, за исключением пустого и полносвязного графов, у которых группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,X$ содержит G:

1) определить орбиты $\Delta_1 = \{n\}, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ стабилизатора G_n, где $2 \le k \le n$;

2) построить матрицы $B(\Delta_i)$, $i = \overline{2,k}$;

3) рассмотреть каждую матрицу $B(\Delta_i)$, $i=\overline{2,k}$; если $B(\Delta_i)$ – симметричная матрица, то построить граф X_i, у которого матрица инциденций $B(\Delta_i)$. Если $B(\Delta_i)$ не симметричная матрица, то на этом этапе алгоритма ее не рассматривать;

4) рассмотреть сумму $B(\Delta_i) + B(\Delta_j)$, где $2 \le i < j \le k$.

Если сумма матриц симметрична, то построить граф, как в п.3, если нет, то такую сумму временно не рассматривать. Повторяем этот процесс для всевозможных сумм различных матриц $B(\Delta_i)$, $2 \le i \le k$.

Для реализации алгоритма Шура заметим, что между представителями смежных классов в разложении $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i G_n$ и точками из $\Omega = G(n)$ существует взаимно-однозначное соответствие. Действительно, определим отображение φ следующим образом: $\varphi(g_i G_n) = g_i(n)$, где $i = \overline{1,n}$. При этом $g_i(n) \ne g_j(n)$ для $i \ne j$, так как в противном случае $g_j^{-1} g_i \in G_n$ или $g_i \in g_j G_n$. Противоречие, поскольку $g_i G_n \cap g_j G_n = \emptyset$.

Таким образом, для построения матриц $B(\Delta_i)$ достаточно знать представителей смежных классов в разложении G по стабилизатору G_n и орбиты стабилизатора G_n. Поэтому в рассматриваемый пакет входит отдельным блоком программа, которая для данной исходной группы подстановок G, заданной образующими, определяет: кратность транзитивности G, образующие стабилизатора G_n, орбиты стабилизатора G_n, представителей смежных классов в разложении G по G_n.

В основу реализации легли уже известные методы. Соответствующие ссылки на литературу можно найти в [3].

Приведем результаты работы реализации на ЭВМ алгоритма Шура, вошедшей в пакет.

ПРИМЕР. Группа $G = \langle a,b \rangle$, где $a = (1)(8)(2,6)(3,5)(9,10)$, $b = (1,5,7)(2,9,4)(3,8,10)$, в разложении по стабилизатору G_{10} имеет следующих представителей смежных классов:

$H_1 = (1,8,4,5,10)(2,9,7,6,3)$, $\quad H_6 = (1,5,7)(2,9,4)(3,8,10)$,
$H_2 = (1,7,9,8,3)(2,6,4,5,10)$, $\quad H_7 = (1,3,8,9,7)(2,10,5,4,6)$,
$H_3 = (1,5,8,10,4)(2,6,9,3,7)$, $\quad H_8 = (1,3,4)(5,8,9)(6,10,7)$,
$H_4 = (1,4,3)(5,9,8)(6,7,10)$, $\quad H_9 = (2,6)(3,5)(4,7)(9,10)$.
$H_5 = (1,7,5)(2,4,9)(3,10,8)$, $\quad H_{10} = 1$.

При этом $\Delta_1 = \{10\}$, $\Delta_2 = \{1,2,5\}$, $\Delta_3 = \{3,4,6,7,8,9\}$ – орбиты стабилизатора G_{10}, а графы X_2, X_3 (см. рис.1) с матрицами инциденций соответственно

$$B(\Delta_2) = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}, \quad B(\Delta_3) = \begin{vmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&0&0&0&1&0&1&1 \\ 1&1&0&0&0&1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&1&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&1&1&1&1&0 \end{vmatrix}.$$

единственные графы, за исключением пустого и полного графов, группы автоморфизмов которых содержат G. Время вычисления 12 сек при работе на ЕС 1022.

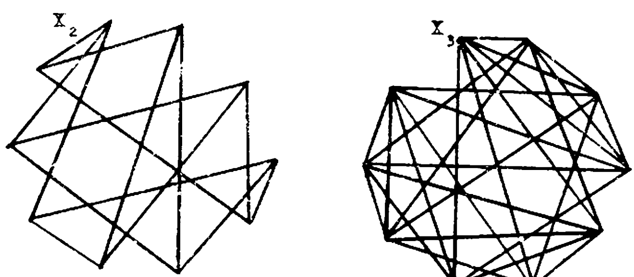

Рис. 1

Очевидно, что от выбора группы G в алгоритме Шура зависят и свойства получаемых графов (например, степень регулярности, связность).

Заметим, что произвольный граф X с n вершинами допускает представление $X^{(l)}$ (l - некоторое натуральное число) на плоскости, обладающее одновременно l осями симметрии второго рода тогда и только тогда, когда группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ X$ содержит подгруппу диэдра D_{2l} степени n и порядка $2l$. (Граф, имеющий ось симметрии второго рода, совмещается с собой при повороте вокруг этой оси на угол 180°.)

В связи с этим в рассматриваемом пакете предусмотрено построение представления $X^{(l)}$ в случае, когда в $\mathrm{Aut}\ X$ удается найти в явном виде подгруппу диэдра Γ_{2l}.

Так, в рассмотренном примере G содержит подгруппу диэдра $D_{10} = \langle c, d \rangle$, где $c = a^2 \cdot b = (1,5,8,10,4)(2,6,9,3,7)$, $d = (1)(9)(2,7)(4,5)(3,6)(8,10)$. При этом на рис.2 приведено представление $X_2^{(5)}$ графа X_2 и то распределение пометок, при котором оно получается.

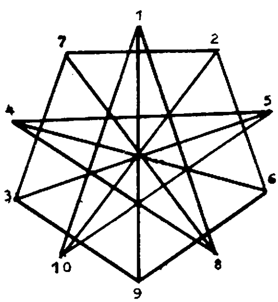

Рис. 2

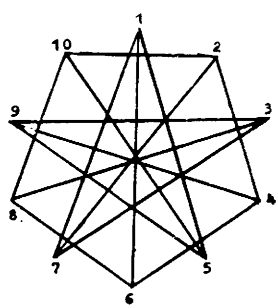

Рис. 3

Заметим, что имеющаяся информация об автоморфизмах генерируемых графов существенно помогает при решении ряда задач на графах. Так, знание представления $X_2^{(5)}$ и орбит стабилизатора G_{10} при проверке графа X_2 (см.рис.1) на 3-связность позволяет ограничиться нахождением трех непересекающихся путей, например, между вершинами с номерами 1,2 и 1,6.

Кроме того, в предлагаемом пакете реализована возможность нахождения компактного параметрического задания генерируемых графов. Например, из рис.3 видно, что i и j - вершины графа X_2, $i>j$, $1 \le i, j \le 10$, смежны тогда и только тогда, когда

либо

$$\begin{cases} i \equiv 0(2), \\ i-j \equiv 2(10),\ i-j \equiv 5(10),\ i-j \equiv 8(10); \end{cases}$$

либо $\begin{cases} i \equiv 1(2), \\ i-j \equiv 4(10),\ i-j \equiv 5(10),\ i-j \equiv 6(10), \end{cases}$

т.е. граф X_2 допускает параметрическое описание вида: (10; 2,5,8; 4,5,6), где 10 - число вершин в графе. Такое задание графа является удобной формой представления графа в ЭВМ и требует значительно меньше объема памяти по сравнению с заданием графа с помощью матрицы инциденций.

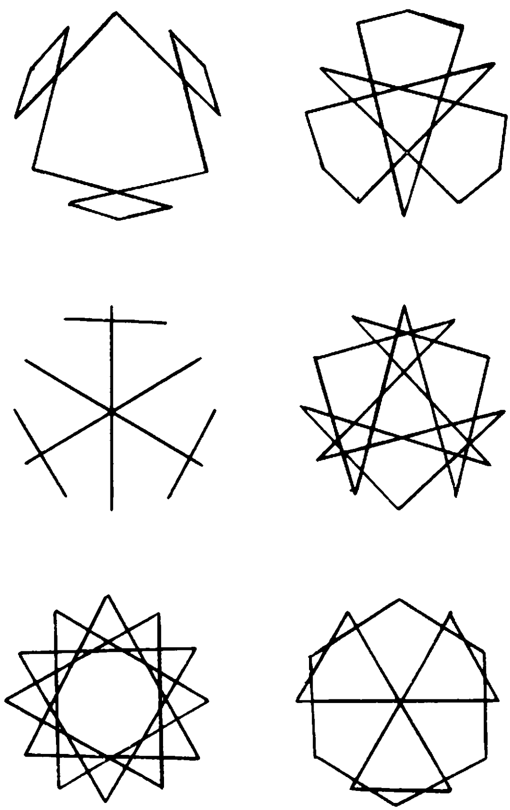

Рис. 4

Рассматриваемый пакет программ также позволяет для заданного натурального n эффективно генерировать графы, обладающие наперед заданным числом l осей симметрии второго рода. При решении этой задачи реализованы различные стратегии построения исходной транзитивной группы подстановок, элементы которой являются автоморфизмами генерируемых графов. Так, для n = 12 и l = 3 было построено 63 графа, обладающих одновременно 3 осями симметрии второго рода. Время вычисления 1 мин 42 сек при работе на ЕС 1022. На рис. 4 приведены лишь шесть графов. Оставшиеся получаются в результате наложения каких-либо из шести приведенных графов друг на друга.

Таким образом, рассмотрен один из подходов к генерации графов, обладающих закономерностью симметрии. Показано, что возможность количественного учета свойств симметрии генерируемых графов позволяет существенно сократить объемы вычислений при решении на них ряда задач.

Приведены результаты работы одной из реализаций рассматриваемого подхода на ЭВМ, подтверждающие его вычислительную эффективность.

Литература

1. ХАРАРИ Ф., ПАЛМЕР Э. Перечисление графов. -М.: Мир, 1977. - 320 с.
2. ХОЛЛ М. Теория групп. -М.: ИЛ., 1962. - 468 с.
3. СИМС Ч.К. Вычислительные методы в изучении групп перестановок. -В кн.: Вычисления в алгебре и теории чисел. -М.: Мир, 1976, с. 129-147.
4. CHAO C.I. On groups and graphs. - Trans.A M S, 1965, v.118, N 6, p.488-497.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 апреля 1982 года