МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 519.651

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУБИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ. I

В.Л. Мирошниченко

Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется сетка Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, в узлах которой заданы значения функции $f(x_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,N$. Как обычно [1], под кубическим интерполяционным сплайном будем понимать функцию $S(x)$, принадлежащую классу $C^2[a,b]$, удовлетворяющую интерполяционным условиям: $S(x_i)=f_i$, $i = 0,\ldots,N$, и краевым условиям одного из типов:

I. $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

П. $S''(a) = f''(a)$, $S''(b) = f''(b)$.

Ш. $S^{(r)}(a) = S^{(r)}(b)$, $r = 1,2$.

IУ. $S'''(x_p+0)=S'''(x_p-0)$, $p=1,N-1$; $N \geq 3$.

Естественно, в случае, когда используются краевые условия типа Ш, функция $f(x)$ предполагается периодической с периодом $b-a$.

Задаче получения оценок погрешности приближения кубическими сплайнами при различных требованиях к $f(x)$ посвящено большое количество исследований. В частности, много оценок имеется в [1].

В данной работе оценки величины $|S''(x) - f''(x)|$ получены для функций $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$, т.е. когда $f'''(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{IV}(x) \in L_\infty[a,b]$. Наиболее точные результаты для этого случая найдены в [2] в предположении, что $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типов I–Ш. А именно показано, что

$$\|S''(x) - f''(x)\|_{C[a,b]} \leq \frac{13}{72} H^2 \| f^{IV} \|_\infty , \qquad (1)$$

где $H = \max_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\|f^{IV}\|_\infty = \|f^{IV}\|_{L_\infty[a,b]}$. Если сетка Δ равномерная, то постоянная 13/72 в (1) заменяется на 1/6.

Для краевых условий типа IУ в [1] получена оценка

$$\|S''(x) - f''(x)\|_{C[x_1, x_{N-1}]} \le \frac{3}{8} H^2 \|f^{IV}\|_\infty,$$

если $h_0 \le h_1$, $h_{N-1} \le h_{N-2}$. Эта же оценка справедлива на промежутках $[x_0, x_1]$ и $[x_{N-1}, x_N]$, если потребовать $h_0 \le \gamma h_1$, $h_{N-1} \le \gamma h_{N-2}$, $= 0,42296$.

Основной целью нашей работы является вывод оценок погрешности приближения второй производной при краевых условиях типа IУ, свободных от каких-либо ограничений на шаги сетки и имеющих по возможности минимальные значения констант. Попутно уточняются результаты работы [2]. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть кубический сплайн $S(x)$ интерполирует в узлах сетки Δ функцию $f(x) \in W^4_\infty[a, b]$. Если $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям одного из типов I–Ш, то

$$\|S''(x) - f''(x)\|_{C[a,b]} \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty . \tag{2}$$

Если $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа IУ, то

$$\| S''(x) - f''(x)\|_{C[x_1, x_{N-1}]} \le K(N) H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \tag{3}$$

$$\| S''(x) - f''(x)\|_{C[x_p, x_{p+1}]} \le \tilde{K}(N) H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \tag{4}$$

$$p = \overline{0, N-1},$$

где $K(N) = \frac{1}{6}$ при $N \ge 5$; $K(4) = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{48})$, $K(3) = \frac{5}{24}$;

$\tilde{K}(N) = \frac{5}{6}$ при $N \ge 4$; $\tilde{K}(3) = \frac{11}{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы излагается в §2. В §1 приводятся системы уравнений, используемые при доказательстве, и устанавливается ряд вспомогательных результатов. Кроме того, даны рекомендации по алгоритму построения сплайна с граничными условиями типа IУ, дополняющие соответствующий материал из [1].

Отметим, что оценка (2) может быть получена при более слабых требованиях к $f(x)$; достаточно предположить, что $f(x) \in C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$ (согласно [I] это означает: $f(x) \in C^2[a,b]$ и $f(x) \in W^4_\infty[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N-1$, т.е. в узлах x_i функция $f'''(x)$ может иметь разрывы первого рода).

Аналогично (3), (4) остаются справедливыми при $f(x) \in C^2W^4_{\Delta',\infty}[a,b]$, где Δ' - сетка, образованная из Δ удалением узлов x_1 и x_{N-1}.

Конечно, представляет интерес изучение вопроса о точности постоянных в правых частях оценок (2)-(4). Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что постоянная I/6 в (2) и (3) не может быть существенно уменьшена. Например, ее нельзя заменить на I/7. Постоянные $K(3)$ и $K(4)$ в (3), а также $\tilde{K}(3)$ и $\tilde{K}(4)$ в (4) являются неулучшаемыми.

Из сформулированной теоремы видно, что, по сравнению с граничными условиями типов I,II, условия типа IУ могут привести к ухудшению точности приближения второй производной интерполируемой функции $f(x)$ только на крайних интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$. Это весьма ценное с практической точки зрения свойство, так как применение этих условий не требует информации о производных функции $f(x)$.

§I. Вспомогательные результаты

Обозначим $M_i = S''(x_i)$, $i = 0,1,\dots,N$. Тогда при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S''(x) = (1-t)M_i + tM_{i+1}, \tag{5}$$

где $t = (x-x_i)/h_i$. Если $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа IУ, то величины M_i определяются из системы

$$\lambda_1 M_0 - M_1 + \mu_1 M_2 = 0, \tag{6}$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i=1,2,\dots,N-1, \tag{7}$$

$$\lambda_{N-1} M_{N-2} - M_{N-1} + \mu_{N-1} M_N = 0, \tag{8}$$

где

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad d_i = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right].$$

Исключая с помощью (6), (8) неизвестные M_0, M_N из уравнений (7), получаем систему

$$(1+\lambda_1)M_1+(\lambda_1-\mu_1)M_2 = \lambda_1 d_1,$$
$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2,\dots,N-2,$$
$$(\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})M_{N-2}+(1+\mu_{N-1})M_{N-1} = \mu_{N-1}d_{N-1},$$

из которой вычисляются $M_1,\dots,M_{N-1}$. Далее, в [I] предлагается находить M_0 и M_N из уравнений (6), (8). Однако такой путь может привести к большим ошибкам в значениях величин M_0 и M_N. Например, если $h_0 \gg h_1$, то $\lambda_1 \ll 1$, и, очевидно, определение M_0 из (6) сопряжено с большой вычислительной погрешностью. Мы рекомендуем находить M_0 и M_N по формулам

$$M_0 = \frac{d_1}{1+\lambda_1} - \frac{1+\mu_1}{1+\lambda_1}M_2,$$
$$M_N = \frac{d_{N-1}}{1+\mu_{N-1}} - \frac{1+\lambda_{N-1}}{1+\mu_{N-1}}M_{N-2},$$

которые свободны от указанного недостатка. Первая из них получается после исключения M_1 из (6) и (7) при $i=1$, вторая вытекает из (8) и (7) при $i = N-1$.

Использование параметров $m_i = S'(x_i)$, $i=0,\dots,N$, вместо M_i для построения сплайна с граничными условиями типа IУ менее удобно, так как при этом трудно обеспечить устойчивое вычисление m_0 и m_N.

Доказательство теоремы опирается на предварительное получение оценок для $Q_i = M_i - f''_i$, $i=0,\dots,N$. Подставляя $M_i = Q_i + f''_i$ в систему (6)-(8), имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 Q_0 - Q_1 + \mu_1 Q_2 = d_0, \\
&\mu_i Q_{i-1}+2Q_i+\lambda_i Q_{i+1} = \tilde{d}_i, \quad i = 1,2,\dots,N-1, \\
&\lambda_{N-1}Q_{N-2} - Q_{N-1} + \mu_{N-1}Q_N = d_N,
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где

$$d_0 = -\lambda_1 f''_0 + f''_1 - \mu_1 f''_2, \quad d_N = -\lambda_{N-1}f''_{N-2} + f''_{N-1} - \mu_{N-1}f''_N,$$

$$\tilde{d}_i = d_i - \mu_i f''_{i-1} - 2f''_i - \lambda_i f''_{i+1}, \quad i = 1,2,\dots,N-1.$$

ЛЕММА I. Если $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$, то

$$d_0 = -\lambda_1 h_0^2 \int_0^1 \tau f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau - \mu_1 h_1^2 \int_0^1 (1-\tau) f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau,$$

$$\tilde{d}_i = \mu_i h_{i-1}^2 \int_0^1 (\tau^3-\tau) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_{i-1})d\tau +$$

$$+\lambda_i h_i^2 \int_0^1 [(1-\tau)^3-(1-\tau)] f^{IV}(x_i+\tau h_i)d\tau, \quad i=1,\dots,N-1,$$

$$d_N = -\lambda_{N-1} h_{N-2}^2 \int_0^1 \tau f^{IV}(x_{N-2} + \tau h_{N-2})d\tau -$$

$$-\mu_{N-1} h_{N-1}^2 \int_0^1 (1-\tau) f^{IV}(x_{N-1} + \tau h_{N-1})d\tau .$$

Формула для $\tilde{d}_i$ выведена в [I, с. II4]. Аналогичным образом получаются формулы для d_0 и d_N.

При $N \geq 5$ систему (9) можно привести к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_0 Q_1 + \lambda_2\lambda_3(\lambda_1-\mu_1)Q_4 = D_1,\\
&\Delta_0 Q_2 - \lambda_2\lambda_3(1+\lambda_1)Q_4 = D_2,\\
&-\mu_{i-1}\mu_i Q_{i-2} + (3+\mu_{i-1}\mu_i + \lambda_i\lambda_{i+1})Q_i - \lambda_i\lambda_{i+1}Q_{i+2} = D_i,\\
&\qquad i = 3,4,\dots,N-3,\\
&-\mu_{N-2}\mu_{N-3}(1+\mu_{N-1})Q_{N-4} + \Delta_N Q_{N-2} = D_{N-2},\\
&\mu_{N-2}\mu_{N-3}(\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})Q_{N-4} + \Delta_N Q_{N-1} = D_{N-1},
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\Delta_0 Q_0 = -\lambda_2\lambda_3(1+\mu_1)Q_4 + D_0, \quad (11)$$

$$\Delta_N Q_N = -\mu_{N-3}\mu_{N-2}(1+\lambda_{N-1})Q_{N-4} + D_N, \quad (12)$$

где

$$\Delta_0 = (1+\lambda_1)(4-\lambda_2\mu_3) + 2\mu_2(\mu_1-\lambda_1),$$

$$\Delta_N = (1+\lambda_{N-1})(4-\lambda_{N-3}\mu_{N-2})+2\lambda_{N-2}(\lambda_{N-1}-\mu_{N-1}),$$

$$D_0 = 2d_0(4-\lambda_2\mu_3-\lambda_1\mu_2)+\tilde{d}_1(4-\lambda_2\mu_3+2\mu_1\mu_2)+(\lambda_2\tilde{d}_3-2\tilde{d}_2)(1+\mu_1),$$

$$D_1 = (\lambda_1\tilde{d}_1-\mu_1 d_0)(4-\lambda_2\mu_3)+(\lambda_2\tilde{d}_3-2\tilde{d}_2)(\lambda_1-\mu_1),$$

$$D_2 = 2d_0\mu_1\mu_2-2\tilde{d}_1\lambda_1\mu_2+(2\tilde{d}_2-\lambda_2\tilde{d}_3)(1+\lambda_1),$$

$$D_i = 2\tilde{d}_i-\mu_i\tilde{d}_{i-1}-\lambda_i\tilde{d}_{i+1}, \quad i=3,\dots,N-3,$$

$$D_{N-2}=2\lambda_{N-2}(\lambda_{N-1}d_N-\mu_{N-1}\tilde{d}_{N-1})+(1+\mu_{N-1})(2\tilde{d}_{N-2}-\mu_{N-2}\tilde{d}_{N-3}),$$

$$D_{N-1}=(4-\mu_{N-2}\lambda_{N-3})(\mu_{N-1}\tilde{d}_{N-1}-\lambda_{N-1}d_N)+(\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})(\mu_{N-2}\tilde{d}_{N-3}-2\tilde{d}_{N-2}),$$

$$D_N = 2d_N(4-\lambda_{N-3}\mu_{N-2}-\lambda_{N-2}\mu_{N-1})+$$
$$+\tilde{d}_{N-1}(4-\lambda_{N-3}\mu_{N-2}-2\lambda_{N-1}\lambda_{N-2})+(1+\lambda_{N-1})(\mu_{N-2}\tilde{d}_{N-3}-2\tilde{d}_{N-2}).$$

Действительно, если считать Q_4 параметром, то, вычисляя из первых четырех уравнений системы (9) неизвестные Q_0, Q_1, Q_2, получаем верхнюю пару уравнений (10) и уравнение (11). Аналогичным образом образуются нижние два уравнения (10) и (12). Каждое i-е ($i = 3,4,\dots,N-3$) уравнение системы (10) представляет собой линейную комбинацию трех уравнений системы (9) с номерами $i-1, i, i+1$, взятых соответственно с весами $-\mu_i$, 2, $-\lambda_i$.

ЛЕММА 2. Пусть сплайн $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ в узлах сетки Δ. Если $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям одного из типов I–III, то

$$|M_i-f''_i| \le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 0,1,\dots,N. \tag{13}$$

Если $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа IV, то

$$|M_i-f''_i| \le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 1,2,\dots,N-1, \tag{14}$$

$$|M_i-f''_i| \le \frac{5}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 0,N; \quad N > 3, \tag{15}$$

$$|M_i-f''_i| \le \frac{11}{12}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad i = 0,3; \ N = 3. \tag{15'}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (I3) получено в [2]. Рассмотрим случай граничных условий типа IУ. Пусть $N \ge 5$. Тогда, учитывая, что матрица системы (I0) имеет диагональное преобладание [I, с. 334, следствие Д.I], получаем

$$|Q_i| \le \max \{ A, B, \max_{3 \le i \le N-3} \frac{D_i}{3}, C, D \}, \qquad (16)$$

$$i=1,2,\dots,N-1,$$

где

$$A = \frac{|D_1|}{\Delta_0-\lambda_2\lambda_3|\lambda_1-\mu_1|}, \quad B = \frac{|D_2|}{\Delta_0-\lambda_2\lambda_3(1+\lambda_1)},$$

$$C = \frac{|D_{N-2}|}{\Delta_N-\mu_{N-3}\mu_{N-2}(1+\mu_{N-1})}, \quad D = \frac{|D_{N-1}|}{\Delta_N-\mu_{N-3}\mu_{N-2}|\mu_{N-1}-\lambda_{N-1}|}.$$

В [2] найдена оценка

$$\frac{1}{3}|D_i| \le \frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad i=3,\dots,N-3. \qquad (17)$$

Подставляя в выражение для D_1 величины $d_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3$ из леммы I, имеем

$$D_1 = \mu_1\lambda_1(4-\lambda_2\mu_3)h_0^2\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+ h_1^2\int_0^1 \varphi_1(\tau)f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau + \lambda_2(\mu_1-\lambda_1)h_2^2\int_0^1 \varphi_2(\tau)f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau +$$

$$+ \lambda_2\lambda_3(\mu_1-\lambda_1)h_3^2\int_0^1 \varphi_3(\tau)f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau,$$

где

$$\varphi_1(\tau) = (1-\tau)\{(4-\lambda_2\mu_3)[\mu_1-\lambda_1+\lambda_1^2(1-\tau)^2]-2\mu_2(\mu_1-\lambda_1)\tau(1+\tau)\},$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau(1-\tau)[\mu_3(1+\tau)+2\tau-4],$$

$$\varphi_3(\tau) = 1-\tau-(1-\tau)^3.$$

Отсюда

$$|D_1| \le \|f^{IV}\|_\infty\{\mu_1\lambda_1(4-\lambda_2\mu_3)h_0^2\int_0^1 \tau^3 d\tau + h_1^2\int_0^1 |\varphi_1(\tau)|d\tau +$$

$$+ \lambda_2|\mu_1-\lambda_1|[h_2^2\int_0^1 |\varphi_2(\tau)|d\tau + \lambda_3h_3^2\int_0^1 |\varphi_3(\tau)|d\tau]\}. \qquad (18)$$

Чтобы вычислить интегралы в (18), необходима информация о знаках значений функций $\varphi_i(\tau)$ при $\tau \in [0,1]$. Очевидно, $\varphi_2(\tau) \le 0$, $\varphi_3(\tau) \ge 0$, $\tau \in [0,1]$. Что касается функции $\varphi_1(\tau)$, то нетрудно видеть, что при $\mu_1 \ge \lambda_1$ (это эквивалентно условию $h_0 \ge h_1$) $\varphi_1(\tau) \ge 0$, а при $\mu_1 < \lambda_1$ функция $\varphi_1(\tau)$ меняет знак в точке $\tau^* \in [0,1]$. Дальнейшее изложение разобьем на два случая.

1) $h_0 \ge h_1$. Учитывая (18), имеем

$$A = \frac{|D_1|}{\Delta_0 - \lambda_2\lambda_3|\lambda_1-\mu_1|} \le r_1(h_0,h_1,h_2,h_3)\|f^{IV}\|_\infty,$$

где

$$r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) =$$

$$= \frac{(4-\lambda_2\mu_3)\lambda_1 h_0^2 + (\mu_1-\lambda_1)[h_1^2(4-\lambda_2\mu_3-2\mu_2)+h_2^2\lambda_2(1+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3 h_3^2]}{4[(1+\lambda_1)(4-\lambda_2)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3+2\mu_2(\mu_1-\lambda_1)]}.$$

Найдем максимум функции $r_1(h_0,h_1,h_2,h_3)$ при ограничениях $0 \le h_i \le H$, $i = 0,1,2,3$. Легко видеть, что $\frac{\partial r_1}{\partial h_0} \ge 0$. Поэтому $r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_1(H,h_1,h_2,h_3)$. Далее нетрудно проверить, что $\frac{\partial r_1(H,h_1,h_2,h_3)}{\partial h_3} \ge 0$. Следовательно, $r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_1(H,h_1,h_2,H)$. Производя громоздкие, но несложные выкладки, получаем $r_1(H,h_1,H,H) - r_1(H,h_1,h_2,H) \ge 0$. Таким образом,

$$r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_1(H,h_1,H,H) = \frac{H^2}{4}\,\frac{4+3\alpha+15\alpha^2-3\alpha^3+4\alpha^4}{6+27\alpha+12\alpha^2}, \tag{19}$$

где обозначено $\alpha = h_1/H$. Максимум правой части в (19) достигается при $\alpha = 0$. В итоге $r_1(H,h_1,H,H) \le r_1(H,0,H,H) = H^2/6$, и, следовательно,

$$A \le \frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \text{ если } h_0 \ge h_1. \tag{20}$$

2) $h_0 < h_1$. При $\tau = \tau^*$ функция $\varphi_1(\tau)$ меняет знак с плюса на минус ($\varphi(\tau^*) = 0$). Поэтому

$$\int_0^1 |\varphi_1(\tau)| d\tau = \int_0^{\tau^*} \varphi_1(\tau)d\tau - \int_{\tau^*}^1 \varphi_1(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^1 \varphi_1(\tau)d\tau - 2\int_{\tau^*}^1 \varphi_1(\tau)d\tau + \frac{1}{2}(1-\tau^*)\varphi_1(\tau^*).$$

Теперь, вычислив интегралы в (18), получаем

$$|D_1| \le \frac{1}{4}\|f^{IV}\|_\infty\{h_0^2\lambda_1(4-\lambda_2\mu_3) +$$

$$+(\lambda_1-\mu_1)[h_1^2(4-\lambda_2\mu_3-2\mu_2)+h_2^2\lambda_2(1+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3h_3^2] -$$

$$-2\tau^*(\lambda_1-\mu_1)h_1^2[2\mu_2(1-\tau^*)^2+(2-\tau^*)(4-\lambda_2\mu_3-2\mu_2-2\mu_2\tau^*)]\}.$$

Слагаемое в правой части неравенства, содержащее τ^*, отрицательно, и поэтому неравенство сохранится, если его отбросить. В результате

$$A \le \frac{1}{4}\tilde{r}_1(h_0,h_1,h_2,h_3)\|f^{IV}\|_\infty, \tag{21}$$

где

$$\tilde{r}_1(h_0,h_1,h_2,h_3) = [h_0^2h_1(4-\lambda_2\mu_3) + (h_1-h_0)g_0]/g_1,$$

$$g_0(h_1,h_2,h_3) = h_1^2(4-\lambda_2\mu_3-2\mu_2)+h_2^2\lambda_2(1+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3h_3^2,$$

$$g_1(h_0,h_1,h_2,h_3) = (h_0+2h_1)(4-\lambda_2)+(2h_0+h_1)\lambda_2\lambda_3+2\mu_2(h_0-h_1).$$

Максимум функции $r_1(h_0,h_1,h_2,h_3)$ нужно найти в области $0 \le h_0 < h_1 \le H$, $0 \le h_2$, $h_3 \le H$. Имеем

$$\frac{\partial\tilde{r}_1}{\partial h_0} = \frac{h_1}{g_1^2}\{(4-\lambda_2\mu_3)[(4-\lambda_2)(h_0^2+4h_0h_1)+2\lambda_2\lambda_3(h_0^2+h_0h_1) +$$

$$+2\mu_2(h_0^2-2h_0h_1)] - 3g_0(4-\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)\}.$$

Если при некотором $h_0 = h_0^* \in [0,1]$ выполняется необходимое условие экстремума $\frac{\partial\tilde{r}_1}{\partial h_0} = 0$, то очевидно

$$\left.\frac{\partial^2\tilde{r}_1}{\partial h_0^2}\right|_{h_0=h_0^*} = \frac{2h_1}{g_1^2}(4-\lambda_2\mu_3)[(4-\lambda_2)(h_0+2h_1) +$$

$$+\lambda_2\lambda_3(2h_0+h_1)+2\mu_2(h_0-h_1)]_{h_0=h_0^*} > 0.$$

Поэтому точка $h_0=h_0^*$ может быть только точкой минимума функции $\tilde{r}_1(h_0,\dots)$. Таким образом,

$$\max \tilde{r}_1(h_0,h_1,h_2,h_3) = \max\{\tilde{r}_1(h_1,h_1,h_2,h_3),\ \tilde{r}_1(0,h_1,h_2,h_3)\}.$$

Имеем

$$\tilde{r}_1(h_1,h_1,h_2,h_3) = h_1^2/3 \le H^2/3, \tag{22}$$

$$\tilde{r}_1(0,h_1,h_2,h_3) = \frac{\lambda_3 h_2(h_1^2+h_2^2+h_3^2) + h_2^3+2h_1^3+3h_1^2h_2}{6(h_1+h_2)+\lambda_3 h_2}.$$

Нетрудно проверить, что $\dfrac{\partial\tilde{r}_1(0,h_1,h_2,h_3)}{\partial h_3} \ge 0$. Следовательно, $\tilde{r}_1(0,h_1,h_2,h_3) \le \tilde{r}_1(0,h_1,h_2,H)$. Далее непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости неравенств

$$\tilde{r}_1(0,h_1,H,H) - \tilde{r}_1(0,h_1,h_2,H) \ge 0,$$

$$\tilde{r}_1(0,H,H,H) - \tilde{r}_1(0,h_1,H,H) \ge 0,$$

что приводит к оценке

$$\tilde{r}_1(0,h_1,h_2,h_3) \le \tilde{r}_1(0,H,H,H) = 3H^2/5.$$

Учитывая (21) и (22), получаем $A \le \frac{3}{20} H^2\|f^{IV}\|_\infty$ при $h_0 < h_1$. Объединяя этот результат с (20), в итоге имеем

$$A \leqslant \frac{1}{6} H^2\|f^{IV}\|_\infty. \tag{23}$$

Теперь оценим величину B. Используя лемму I, получаем

$$D_2 = -2\lambda_1\mu_1\mu_2 h_0^2\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+2\mu_2 h_1^2\int_0^1 \varphi_4(\tau) f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau - (1+\lambda_1)\lambda_2 h_2^2\int_0^1 \varphi_5(\tau) f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau +$$

$$+ \lambda_2\lambda_3(1+\lambda_1)h_3^2\int_0^1 \varphi_3(\tau) f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau,$$

где

$$\varphi_4(\tau) = (1-\tau)[\lambda_1-\mu_1-\lambda_1^2(1-\tau)^2-\tau(1+\tau)(1+\lambda_1)],$$
$$\varphi_5(\tau) = (1-\tau)[2-2(1-\tau)^2-\mu_3\tau(1+\tau)] .$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_3(\tau) \geq 0$, $\varphi_4(\tau) \leq 0$, $\varphi_5(\tau) \geq 0$ при $\tau \in [0,1]$. Учитывая этот факт, находим

$$B \leq \frac{1}{4} r_2(h_0,h_1,h_2,h_3)\|f^{IV}\|_\infty ,$$

где

$$r_2 = \frac{2\lambda_1\mu_1\mu_2h_0^2+2\mu_2h_1^2(3\mu_1+\lambda_1^2)+\lambda_2(1+\lambda_1)[h_2^2(1+\lambda_3)+\lambda_3h_3^2]}{3\lambda_2(1+\lambda_1)+6\mu_2} .$$

Применяя такие же приемы, как и при поиске максимума функции r_1, можно показать, что $r_2(h_0,h_1,h_2,h_3) \leq 2H^2/3$. Это влечет неравенство

$$B \leq \frac{1}{6} H^2\|f^{IV}\|_\infty . \tag{24}$$

По соображениям симметрии

$$C \leq \frac{1}{6} H^2\|f^{IV}\|_\infty, \qquad D \leq \frac{1}{6} H^2\| f^{IV} \|_\infty . \tag{24'}$$

Теперь из (I7),(23)-(24') и (I6) вытекает (I4) для $N \geq 5$.

Пусть теперь $N = 3,4$. В этих случаях из системы (9) величины Q_i вычисляются в явном виде. Затем можно воспользоваться обычной техникой получения оценок для локальных сплайнов, описанной в [I]. Принципиальных затруднений при этом не возникает, хотя и приходится иметь дело с очень громоздкими выкладками. В конечном итоге весь вопрос сводится к поиску максимумов функций нескольких переменных. Проиллюстрируем сказанное на примере получения оценки для Q_1 при $N=4$.

Решив (9), получим

$$Q_1 = \frac{1}{\Delta}\{[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)](\lambda_1\tilde{d}_1-\mu_1d_0) +$$
$$+ (\lambda_1-\mu_1)[-\tilde{d}_2(2-\lambda_3)+\lambda_2\mu_3\tilde{d}_3-\lambda_2\lambda_3d_4]\} ,$$

где $\Delta = 3(1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3)$.

Отсюда, применяя лемму 1, находим

$$\Delta Q_1=\lambda_1\mu_1[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)]h_0^2\int_0^1\tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+h_1^2\int_0^1\varphi_7(\tau)f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau+\lambda_2(\lambda_1-\mu_1)h_2^2\int_0^1\varphi_8(\tau)f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau+$$

$$+\lambda_2\lambda_3\mu_3(\lambda_1-\mu_1)h_3^2\int_0^1(1-\tau)^3 f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau, \tag{25}$$

где

$$\varphi_7(\tau) = (1-\tau)[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)][\mu_1-\lambda_1+\lambda_1^2(1-\tau)^2] +$$

$$+(2-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)(\tau-\tau^3)\mu_2,$$

$$\varphi_8(\tau) = (2-\lambda_3)[1-\tau-(1-\tau)^3] - \mu_3^2(\tau-\tau^3) + \tau\lambda_3^2 .$$

Анализ функций $\varphi_7(\tau), \varphi_8(\tau)$ показывает, что $\varphi_8(\tau) \geq 0$, $\tau\in[0,1]$, а $\varphi_7(\tau)\geq 0$ при $h_0 \geq h_1$. При $h_0<h_1$ функция $\varphi_7(\tau)$ меняет знак с плюса на минус в точке $\tau' \in [0,1]$.

При $h_0 \geq h_1$ из (25) находим

$$|Q_1| \leq \frac{1}{12}r(h_0,h_1,h_2,h_3)\|f^{IV}\|_\infty , \tag{26}$$

где

$$r = h_1(2h_0-h_1) + \frac{\lambda_2(\mu_1-\lambda_1)}{1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3}(h_0h_1+h_1^2+h_2^2+h_2h_3).$$

Очевидно, $r(h_0,h_1,h_2,h_3) \leq r(H,h_1,h_2,H)$. Так как $\frac{\partial r(H,h_1,h_2,H)}{\partial h_2} \geq$ ≥ 0 , то

$$r(H,h_1,h_2,H) \leq r(H,h_1,H,H) = H^2\left[\alpha(2-\alpha) + \frac{2(2-\alpha-\alpha^2)}{2+7\alpha+3\alpha^2}\right],$$

где $\alpha = h_1/H$. Легко видеть, что максимум правой части достигается при $\alpha=0$ и равен $H^2/6$. Следовательно,

$$|Q_1| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad h_0 \ge h_1. \tag{27}$$

При $h_0 < h_1$, используя равенство

$$\int_0^1 |\varphi_7(\tau)|d\tau = 2\int_0^{\tau'} \varphi_7(\tau)d\tau - \int_0^1 \varphi_7(\tau)d\tau + \frac{1}{2}(1-\tau')\ \varphi_7(\tau'),$$

имеем

$$\int_0^1 |\varphi_7(\tau)|d\tau = \frac{1}{4}\lambda_1^2[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)] - \frac{1}{4}\mu_2(2-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1) -$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda_1-\mu_1)\tau'\{(2-\tau')[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)] - \mu_2(2-\lambda_3)[1+\tau-(\tau')^2]\} \le$$

$$\le \frac{1}{4}\{\lambda_1^2[3+\mu_2(\mu_3-\lambda_3)] - \mu_2(2-\lambda_3)(\lambda_1-\mu_1)\}.$$

Учитывая это неравенство, из (25) получаем (26), где

$$r(h_0,h_1,h_2,h_3) = 2\lambda_1(h_0^2 - h_0h_1) + h_1^2 +$$

$$+\frac{\lambda_2(\lambda_1-\mu_1)}{1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3}[\lambda_1(h_0h_1-h_0^2) + h_1^2 + h_2^2 + h_2h_3].$$

Легко проверяемая цепочка неравенств

$$r(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r(h_0,h_1,h_2,H) \le r(0,h_1,h_2,H) \le$$

$$\le r(0,h_1,H,H) \le r(0,H,H,H)$$

приводит к оценке

$$|Q_1| \le \frac{13}{84} H^2 \|f^{IV}\|_\infty \quad \text{при} \quad h_0 < h_1,$$

которая вместе с (27) дает нужный результат.

Выведем теперь оценки (I5). Очевидно, можно ограничиться случаем $i=0$, так как в силу симметрии такая же оценка будет верна и для $i=N$.

Пусть $N \ge 5$. Из (II) получаем

$$|Q_0| \le \frac{1}{\Delta_0}\{\lambda_2\lambda_3(1+\mu_1)|Q_4| + |D_0|\}.$$

Согласно (I4) имеем $|Q_4| \le H^2/6\|f^{IV}\|_\infty$. Величина $|D_0|$ оценивается таким же способом, как это было проведено выше для $|D_1|$. Выполняя несложные выкладки, находим

$$|Q_0| \le \frac{1}{\Delta_0}\|f^{IV}\|_\infty \Big\{ \frac{1}{6} H^2\lambda_2\lambda_3(1+\mu_1) + \frac{1}{4}\Delta_0 h_0^2 +$$

$$+ 2\lambda_1 h_0^2(4-\lambda_2\mu_3-\lambda_1\mu_2) + h_1^2[(4-\lambda_2\mu_3)(1+3\mu_1) -$$

$$- 2\mu_2(1+\mu_1+\lambda_1\mu_1)] + \lambda_2(1+\mu_1)[h_2^2(1+\lambda_3) + \lambda_3 h_3^2]\Big\}.$$

Анализ правой части неравенства показывает, что ее максимум достигается при $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = H$. Это дает оценку

$$|Q_0| \le \frac{148}{180} H^2\|f^{IV}\|_\infty < \frac{5}{6} H^2\|f^{IV}\|_\infty .$$

Что и требовалось доказать.

При $N = 3,4$ величина Q_0 вычисляется из (9) в явном виде. Проделав затем такие же рассуждения, как при выводе оценки (I4) для $N = 4$, получаем требуемый результат.

Обозначим через $L(f'';c,d)$ многочлен первой степени (сплайн первой степени), интерполирующий значения $f''(c)$ и $f''(d)$. Очевидно,

$$L(f'';c,d) = (1-u)f''(c) + uf''(d),\ u = (x-c)/(d-c),$$

$$x \in [c,d].$$

ЛЕММА 3. Если $f(x) \in W_\infty^4[c,d]$, то при $x \in [c,d]$ справедлива оценка

$$|L(f'';c,d) - f''(x)| \le \frac{u(1-u)}{2}(d-c)^2\|f^{IV}\|_\infty .$$

Этот результат имеется в [I].

§2. Доказательство теоремы I

Вначале рассмотрим периодический случай, т.е. когда $f(x)$ периодическая функция и $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа Ш. При $x \in [x_i, x_{i+1}]$, используя (5), получаем

$$S''(x)-f''(x) = (1-t)Q_i + tQ_{i+1} + (1-t)f''_i + tf''_{i+1} - f''(x). \quad (28)$$

В периодическом случае величины Q_i связаны соотношениями

$$\mu_i Q_{i-1} + 2Q_i + \lambda_i Q_{i+1} = \tilde{d}_i, \quad i=0,1,\ldots,N-1, \quad (29)$$

(в силу периодичности предполагается, что $h_{i+N} = h_i$, $f_{i+N} = f_i$, $Q_{i+N} = Q_i$). Рассмотрим i-е и $(i+1)$-е уравнения как систему относительно Q_i и Q_{i+1}. Тогда

$$Q_i = \frac{1}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}(2\tilde{d}_i - \lambda_i\tilde{d}_{i+1} - 2\mu_i Q_{i-1} + \lambda_i\lambda_{i+1}Q_{i+2}),$$

$$Q_{i+1} = \frac{1}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}(2\tilde{d}_{i+1} - \mu_{i+1}\tilde{d}_i - 2\lambda_{i+1}Q_{i+2} + \mu_i\mu_{i+1}Q_{i-1}).$$

Подставляя эти выражения в (28), получаем

$$S''(x) - f''(x) =$$

$$= \Omega_i + \frac{1}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}\{\mu_i[(2+\mu_{i+1})t-2]Q_{i-1} + \lambda_{i+1}[\lambda_i-(2+\lambda_i)t]Q_{i+2}\}, \quad (30)$$

где

$$\Omega_i = (1-t)f''_i + tf''_{i+1} - f''(x) +$$

$$+ \frac{1}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}\{[2-t(2+\mu_{i+1})]\tilde{d}_i - [\lambda_i-(2+\lambda_i)t]\tilde{d}_{i+1}\}.$$

Так как (см. [I, с. 46])

$$(1-t)f''_i + tf''_{i+1} - f''(x) =$$

$$= (1-t)h_i^2\int_0^t \tau f^{IV}(x_i+\tau h_i)\,d\tau + th_i^2\int_t^1 (1-\tau)f^{IV}(x_i+\tau h_i)\,d\tau,$$

то, применяя лемму I, имеем

$$\Omega_i = \frac{\mu_i h^2_{i-1}[2-t(2+\mu_{i+1})]}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}\int_0^1 (\tau^3-\tau)f^{IV}(x_{i-1}+\tau h_{i-1})d\tau +$$

$$+\frac{\lambda_{i+1}h^2_{i+1}\ [\lambda_i-(2+\lambda_i)t]}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}\int_0^1[1-\tau-(1-\tau)^3]f^{IV}(x_{i+1}+\tau h_{i+1})d\tau +$$

$$+ h_i^2\int_0^t[\psi+(1-t)\tau]f^{IV}(x_i+\tau h_i)d\tau + h_i^2\int_t^1[\psi+t(1-\tau)]f^{IV}(x_i+\tau h_i)d\tau ,$$

где

$$\psi = \frac{\tau(1-\tau)}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}\{\lambda_i(\tau-2)[2-t(2+\mu_{i+1})]+\mu_{i+1}(1+\tau)[\lambda_i-(2+\lambda_i)t]\}.$$

Нетрудно видеть, что при $t\in[t_1,t_2]$, $t_1=\lambda_i/(2+\lambda_i)$, $t_2=2/(2+\mu_{i+1})$ имеют место неравенства $\psi+(1-t)\tau \ge 0$ и $\psi+t(1-\tau)\ge 0$. Поэтому при $t\in[t_1,\ t_2]$ справедлива оценка

$$|\Omega_i| \le \frac{1}{4}\|f^{IV}\|_\infty\{2h_i^2t(1-t) + h_i^2\int_0^1\psi\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{4-\lambda_i\mu_{i+1}}[\mu_i h^2_{i-1}(2-t(2+\mu_{i+1}))+\lambda_{i+1}h^2_{i+1}(\lambda_i-t(2+\lambda_i))]\}.$$

Теперь, принимая во внимание (13), из (30) получаем

$$|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{4}\|f^{IV}\|_\infty\ \{\ 2h_i^2t(1-t) +$$

$$+\frac{1}{3(4-\lambda_i\mu_{i+1})}\ [\mu_i(2-t(2+\mu_{i+1}))(2H^2+3h^2_{i-1})+\lambda_{i+1}((2+\lambda_i)t -$$

$$-\lambda_i)(2H^2+3h^2_{i+1}) + 3h_i^2(2t(\lambda_i-\mu_{i+1}) - \lambda_i(2-\mu_{i+1}))]\}, \tag{31}$$

$$t\in[t_1,t_2],\quad x = x_i+ th_i.$$

Максимум правой части неравенства достигается при $h_{i-1}=h_{i+1}=H$. Следовательно,

$$|S''(x)-f''(x)|\le\frac{1}{4}H^2\|f^{IV}\|_\infty\left\{2\alpha_i^2t(1-t)+\frac{5-3\alpha_i^3}{3(2+3\alpha_i)}\right\}\le\frac{H^2}{24}\|f^{IV}\|_\infty\frac{10+6\alpha_i^2+3\alpha_i^3}{2+3\alpha_i},$$

где обозначено $\alpha_i = h_i/H$. При $\alpha_i \ge 1/4$ имеем $10 + 6\alpha_i^2 + 3\alpha_i^3 < < 4(2+3\alpha_i)$. Таким образом, при $x \in [x_i+t_1h_i,\ x_i+t_2h_i]$ верно неравенство

$$|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad h_i/H \ge 1/4. \tag{32}$$

Рассмотрим далее промежуток $t \in [0,t_1]$. Имеем $S''(x) - f''(x) = =(1-u)M_i+uS''(x_i+t_1h_i)-f''(x)$, $u=(x-x_i)/(t_1h_i)$. Отсюда

$$|S''(x) - f''(x)| \le (1-u)|Q_i| + u|S''(x_i + t_1h_i) - $$
$$- f''(x_i+t_1h_i)| + |L(f'';x_i,\ x_i+t_1h_i) - f''(x)|. \tag{33}$$

Из (31) находим

$$|S''(x_i+t_1h_i) - f''(x_i + t_1h_i)| \le$$
$$\le \frac{1}{4}\|f^{IV}\|_\infty \left\{\frac{\lambda_i h_i^2(2-\lambda_i)}{(2+\lambda_i)^2} + \frac{\mu_i(2H^2+3h_{i-1}^2)}{3(2+\lambda_i)}\right\}.$$

Теперь, используя лемму 3 и оценку (13), получаем $|S''(x)-f''(x)| \le \le \eta(u)\|f^{IV}\|_\infty$, $x\in[x_i, x_i + t_1h_i]$, где

$$\eta(u) = \frac{H^2}{6}\left(1-\frac{1+2\lambda_i}{2+\lambda_i}u\right) + \frac{u(h_i^2-h_{i-1}h_i+h_{i-1}^2)}{4(2+\lambda_i)} - \frac{u^2\lambda_i^2h_i^2}{2(2+\lambda_i)^2}.$$

Так как

$$\eta'(u) = -\frac{H^2(1+2\lambda_i)}{6(2+\lambda_i)} + \frac{h_i^2-h_{i-1}h_i+h_{i-1}^2}{4(2+\lambda_i)} - \frac{u\lambda_i^2h_i^2}{(2+\lambda_i)^2} \le$$
$$\le \frac{1}{12(2+\lambda_i)}\{-2H^2(1+2\lambda_i) + 3(h_i^2-h_{i-1}h_i+h_{i-1}^2)\} =$$
$$= \frac{H^2}{12(2+\lambda_i)(h_{i-1}+h_i)}\{(1-4\alpha_i)(1-\alpha_i) - \alpha_i(1+4\alpha_i-3\alpha_i^2) -$$
$$- (1-\alpha_{i-1})(1+3\alpha_{i-1}+3\alpha_{i-1}^2)\},$$

то $\eta'(u) \le 0$ при $\alpha_i \ge 1/4$ и, следовательно, $\eta(u) \le \eta(0) = H^2/6$. Таким образом, оценка (32) справедлива при $t \in [0,t_1]$. Точно также она доказывается и для $t \in [t_2, 1]$.

Итак,

$$|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad h_i/H \ge 1/4. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $h_i/H < 1/4$. Из (28) и леммы 3 имеем

$$|S''(x) - f''(x)| \le$$

$$\le |Q_i(1-t) + Q_{i+1}t| + \frac{1}{2}h_i^2 t(1-t)\|f^{IV}\|_\infty. \qquad (35)$$

Выделим из (29) три уравнения

$$\mu_j Q_{j-1} + 2Q_j + \lambda_j Q_{j+1} = \tilde{d}_j, \; j=i+1, i+2, i+3. \qquad (36)$$

Исключая из них Q_{i+3}, имеем

$$\mu_{i+1}Q_i + 2Q_{i+1} + \lambda_{i+1}Q_{i+2} = \tilde{d}_{i+1},$$

$$2\mu_{i+2}Q_{i+1} + (4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3})Q_{i+2} - \lambda_{i+2}\lambda_{i+3}Q_{i+4} = 2\tilde{d}_{i+2} - \lambda_{i+2}\tilde{d}_{i+3}.$$

Умножив первое из уравнений на $(4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3})$, второе на $-\lambda_{i+1}$, сложим их и поделим полученную сумму на $\delta = (4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3})(2+\mu_{i+1}) - 2\lambda_{i+1}\mu_{i+2}$. Тогда

$$Q_i(1-t^*) + Q_{i+1}t^* = \frac{1}{\delta}[-\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\lambda_{i+3}Q_{i+4} +$$

$$+(4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3})\tilde{d}_{i+1} - 2\lambda_{i+1}\tilde{d}_{i+2} + \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\tilde{d}_{i+3}], \qquad (37)$$

где $t^* = 2(4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3} - \lambda_{i+1}\mu_{i+2})/\delta$, причем, очевидно, $0 < t^* < 1$. Привлекая лемму I, оценим в (37) слагаемое содержащее $\tilde{d}_{i+1}$, $\tilde{d}_{i+2}$, $\tilde{d}_{i+3}$. Учитывая, кроме того, (13), имеем $|Q_i(1-t^*) + Q_{i+1}t^*| \le \le \nu(h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, h_{i+3})\|f^{IV}\|_\infty$, где

$$\nu(h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, h_{i+3}) = \frac{1}{12\delta}\{\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\lambda_{i+3}(2H^2 + 3h_{i+2}^2 + 3h_{i+3}^2) +$$

$$+3(4-\lambda_{i+2}\mu_{i+3})(\mu_{i+1}h_i^2 + \lambda_{i+1}h_{i+1}^2) - 6\mu_{i+2}\lambda_{i+1}h_{i+1}^2 + 3\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}h_{i+2}^2\}.$$

Можно показать, что

$$\nu(h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, h_{i+3}) \le \nu(h_i, H, H, H) = \frac{45h_i^3 + 47H^3}{12(45h_i + 26H)}.$$

Теперь из (35) при $t = t^*$ имеем

$$|S''(x_i+t^*h_i) - f''(x_i+t^*h_i)| \le \|f^{IV}\|_\infty\{\frac{1}{2}h_i^2 t^*(1-t^*) +$$

$$+ \nu(h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, h_{i+3})\} \le \left\{\frac{45h_i^3+47H^3}{12(45h_i+26H)} + \frac{h_i^2}{8}\right\}\|f^{IV}\|_\infty. \tag{38}$$

Так как $|S''(x)-f''(x)| \le (1-u)|Q_i|+u|S''(x_i+t^*h_i)-f''(x_i + t^*h_i)| + |L(f''; x_i, x_i+t^*h_i) - f''(x)|$, $u = (x-x_i)/(t^*h_i)$, $x \in [x_i, x_i+t^*h_i]$, то, учитывая (I3), (38) и лемму 3, получаем

$$|S''(x)-f''(x)| \le \varphi(\alpha_i, u)H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_i, x_i + t^*h_i],$$

$$\varphi(\alpha_i, u) = \frac{1-u}{6} + u\left[\frac{45\alpha_i^3+47}{12(45\alpha_i+26)} + \frac{\alpha_i^2}{8}\right] + \frac{u(1-u)\alpha_i^2}{2}, \quad \alpha_i = \frac{h_i}{H}.$$

Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{5(-2-36\alpha_i + 78\alpha_i^2 + 153\alpha_i^3)}{24(45\alpha_i+26)} - u\alpha_i^2.$$

Нетрудно видеть, что $-2-36\alpha_i+78\alpha_i^2+153\alpha_i^3 < 0$ при $\alpha_i < 1/4$. Поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial u} < 0$ и $\varphi(\alpha_i, u) \le \varphi(\alpha_i, 0) = 1/6$. Следовательно,

$$|S''(x)-f''(x)| \le \frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad h_i/H < 1/4, \tag{39}$$

при $x \in [x_i, x_i+t^*h_i]$. Вполне аналогично устанавливается оценка (39) при $x \in [x_i+t^*h_i, x_{i+1}]$. Объединяя (34), (39), получаем (2). Тем самым теорема I доказана в периодическом случае.

Для граничных условий типов I,II сделанные выше рассуждения проходят не всегда.

Во-первых, метод получения оценки (34) можно использовать только при $N \ge 3$. Таким образом, случаи $N = 1,2$ требуют специального рассмотрения. Мы не будем этого делать, так как здесь легко находятся явные формулы для $S(x)$ и получение оценок не представляет особого труда, если применить обычную технику вывода оценок погрешности для локальных сплайнов [I]. Более того, оценки при $N = 1$ фактически имеются в [I], ибо для граничных условий типа I в этом случае получается эрмитов кубический сплайн, а для условий II оценка второй производной совпадает с оценкой погрешности линейной интерполяции.

Во-вторых, схема вывода оценки (34) неприменима на крайних промежутках: $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$.

Получим оценку для $x \in [x_0, x_1]$ (промежуток $[x_{N-1}, x_N]$ рассматривается аналогично). В случае граничных условий типа I имеем

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right). \tag{40}$$

С другой стороны, $S''(x_0 + h_0/3) = (2M_0 + M_1)/3$. Поэтому

$$S''(x_0+h_0/3) - f''(x_0+h_0/3) = \frac{2}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right) - f''(x_0+h_0/3).$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$S''(x_0+h_0/3) - f''(x_0+h_0/3) =$$

$$= \frac{h_0^2}{3}\left\{ \int_0^{1/3} (3\tau^2 - \tau^3) f''(x_0 + \tau h_0)\, d\tau + \int_{1/3}^{1} (1-\tau)^3 f^{IV}(x_0 + \tau h_0)\, d\tau \right\}.$$

Отсюда

$$|S''(x_0+h_0/3) - f''(x_0+h_0/3)| \le \frac{1}{36} h_0^2 \|f^{IV}\|_\infty . \tag{41}$$

Далее, из (40) имеем

$$2Q_0 + Q_1 = d_0', \tag{42}$$

где

$$d_0' = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right) - 2f_0'' - f_1'' = h_0^2 \int_0^1 [(1-\tau)^3 + 1 - \tau] f^{IV}(x_0 + \tau h_0)\, d\tau.$$

Исключая из уравнений

$$\mu_1 Q_0 + 2Q_1 + \lambda_1 Q_2 = \tilde{d}_1, \quad \mu_2 Q_1 + 2Q_2 + \lambda_2 Q_3 = \tilde{d}_2 \tag{43}$$

и (42) неизвестные Q_0, Q_2, находим

$$(3 + \lambda_1\lambda_2) Q_1 = \lambda_1\lambda_2 Q_3 + 2\tilde{d}_1 - \mu_1 d_0' - \lambda_1 \tilde{d}_2 .$$

Учитывая лемму I и выражение для d_0', имеем

$$|2\tilde{d}_1 - \mu_1 d_0' - \lambda_1 \tilde{d}_2| \le \frac{1}{4}\|f^{IV}\|_\infty [\mu_1 h_0^2 + \lambda_1 h_1^2 (2 - \mu_2) + \lambda_1\lambda_2 h_2^2].$$

Следовательно,

$$|Q_1| \le \frac{1}{12(3 + \lambda_1\lambda_2)} \|f^{IV}\|_\infty \{2\lambda_1\lambda_2 H^2 + 3[\mu_1 h_0^2 + \lambda_1 h_1^2 (2-\mu_2) + \lambda_1\lambda_2 h_2^2]\}.$$

Максимум правой части достигается при $h_2 = h_1 = H$. Поэтому

$$|Q_1| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty \frac{7+3\alpha_0^3}{7+6\alpha_0}, \quad \alpha_0 = h_0/H.$$

Так как

$$|S''(x)-f''(x)| \le (1-u)|Q_0| + u|S''(x_0+h_0/3) - f''(x_0+h_0/3)| +$$
$$+ |L(f''; x_0, x_0+h_0/3) - f''(x)|, \; x \in [x_0, x_0+h_0/3],$$

то, учитывая (13), (41) и лемму 3, получаем

$$|S''(x)-f''(x)| \le \frac{1}{36} H^2 \|f^{IV}\|_\infty \{6(1-u) + \alpha_0^2 u + 2\alpha_0^2 u(1-u)\} \le$$
$$\le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_0, x_0 + h_0/3].$$

Аналогично

$$|S''(x)-f''(x)| \le (1-u)|S''(x_0+h_0/3) - f''(x_0 + h_0/3)| +$$
$$+ u|Q_1| + |L(f''; x_0+h_0/3, x_1) - f''(x)| \le \frac{1}{36} H^2 \|f^{IV}\|_\infty \left\{\alpha_0^2(1-u) + \right.$$
$$\left. + 6u \frac{7+3\alpha_0^3}{7+6\alpha_0} + 8\alpha_0^2 u(1-u)\right\} \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_0+h_0/3, x_1],$$

и тем самым доказана нужная оценка при $x \in [x_0, x_1]$.

Обратимся теперь к граничным условиям типа II. Здесь $Q_0=0$, и, исключая Q_2 из (43), находим

$$Q_1 = \frac{2\tilde{d}_1 - \lambda_1 \tilde{d}_2}{4-\lambda_1\mu_2} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{4-\lambda_1\mu_2} Q_3. \tag{44}$$

Из (28) при $x = x_0+2h_0/3$, $t=2/3$ имеем

$$|S''(x_0+2h_0/3) - f''(x_0+2h_0/3)| = |\frac{2}{3} Q_1 + \frac{1}{3} f''_0 + \frac{2}{3} f''_1 - f''(x_0+2h_0/3)| \le$$
$$\le \frac{2\lambda_1\lambda_2}{3(4-\lambda_1\mu_2)} |Q_3| + \left| \frac{2(2\tilde{d}_1 - \lambda_1\tilde{d}_2)}{3(4-\lambda_1\mu_2)} + \right.$$

$$+\frac{1}{3}h_0^2\int_0^{2/3}\tau f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau+\frac{2}{3}h_0^2\int_{2/3}^{1}(1-\tau)f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau\ \Big| .$$

Обычным образом оценивая слагаемое, содержащее $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$, и учитывая (I3), получаем

$$|S''(x_0+2h_0/3)-f''(x_0+2h_0/3)|\le\frac{1}{36}\|f^{IV}\|_\infty\Big\{4h_0^2+$$

$$+\frac{1}{4-\lambda_1\mu_2}[6\lambda_1h_1^2+6\lambda_1\lambda_2(h_1^2+h_2^2)-12h_0^2\mu_1+4\lambda_1\lambda_2H^2]\Big\}. \qquad (45)$$

Можно показать, что максимум правой части этого неравенства достигается при $h_0=h_1=h_2=H$. Поэтому

$$|S''(x_0+2h_0/3)-f''(x_0+2h_0/3)|\le\frac{16}{135}H^2\|f^{IV}\|_\infty. \qquad (46)$$

Использование (46) и леммы 3 в неравенстве

$$|S''(x)-f''(x)|\le u|S''(x_0+2h_0/3)-f''(x_0+2h_0/3)|+$$

$$+|L(f'';x_0,x_0+2h_0/3)-f''(x)|,\quad u=(x-x_0)/(2h_0/3)$$

дает

$$|S''(x)-f''(x)|<\frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty,\quad x\in[x_0,x_0+2h_0/3] .$$

Чтобы вывести такую же оценку при $x\in[x_0+2h_0/3,x_1]$, вначале из (44) получаем

$$|Q_1|\le\frac{\|f^{IV}\|_\infty}{12(4-\lambda_1\mu_2)}\{2\lambda_1\lambda_2H^2+3[\lambda_1h_1^2+2\mu_1h_0^2+\lambda_1\lambda_2(h_1^2+h_2^2)]\}.$$

Затем из неравенства

$$|S''(x)-f''(x)|\le(1-u)|S''(x_0+2h_0/3)-f''(x_0+2h_0/3)|+$$

$$+u|Q_1|+|L(f'';x_0+2h_0/3,x_1)-f''(x)|,\quad x\in[x_0+2h_0/3,x_1] .$$

учитывая (45) и лемму 3, имеем

$$|S''(x)-f''(x)|\le\frac{1}{36}\|f''\|_\infty\Big\{2h_0^2(1-u)(2+u)+$$

$$+\frac{\lambda_1(2+u)}{4-\lambda_1\mu_2}[\lambda_2(2H^2+3h_1^2+3h_2^2)+3h_1^2]+\frac{6h_0^2\mu_1(3u-2)}{4-\lambda_1\mu_2}\Big\} .$$

Выражение в фигурных скобках не превосходит $6H^2$. Следовательно $|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty$, $x \in [x_0+2h_0/3, x_1]$.

Кроме (34), в периодическом случае при доказательстве теоремы мы использовали оценку (39). Однако для граничных условий I или II ее не всегда можно получить описанным выше способом. Действительно, в уравнения (36), из которых выводится (39), входит величина Q_{i+4}, и поэтому при $i+4 > N$ проделанные рассуждения теряют силу. Однако для вывода оценки на $[x_i, x_{i+1}]$ можно взять уравнения (36), положив $j = i-2, i-1, i$. Затем, исключив из них Q_{i-2}, Q_{i-1}, получаем формулу, аналогичную (37), но содержащую Q_{i-3}. Ясно, что этим приемом можно воспользоваться для получения (39), начиная с правого конца отрезка $[a, b]$. При $N \ge 6$ комбинация упомянутых двух вариантов вывода (39) позволяет доказать оценку на любом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$.

При $N < 6$ выход из ситуации состоит в следующем. Для $x \in [x_{N-2}, x_{N-1}]$ нужно вместо (36) взять уравнение $\mu_{N-1}Q_{N-2} + 2Q_{N-1} + \lambda_{N-1}Q_N = \tilde{d}_{N-1}$, к которому в случае граничных условий типа I следует присоединить уравнение

$$Q_{N-1} + 2Q_N = d'_N = \frac{6}{h_{N-1}}\left(f'_N - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right) - f''_{N-1} - 2f''_N ,$$

а для условий II уравнение $Q_N = 0$.

При $x \in [x_{N-3}, x_{N-2}]$ к перечисленным уравнениям нужно присоединить соотношение $\mu_{N-2}Q_{N-3} + 2Q_{N-2} + \lambda_{N-2}Q_{N-1} = \tilde{d}_{N-2}$.

Выкладки, которые здесь необходимо проделать для получения оценки (39), вполне аналогичны выкладкам, выполненным в периодическом случае. Мы их опускаем. Доказательство оценки (2) закончено.

Пусть $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа IV. При $x \in [x_0, x_1]$ из (28), (I4)-(I5') и леммы 3 имеем

$$|S''(x) - f''(x)| \le H^2 \|f^{IV}\|_\infty \left\{ (1-t)\tilde{K}(N) + \frac{t}{6} + \frac{t(1-t)}{2} \right\} \le$$

$$\le \tilde{K}(N) H^2 \|f^{IV}\|_\infty .$$

Аналогично рассматривается промежуток $[x_{N-1}, x_N]$. Таким образом, оценка (4) доказана.

При $N = 3, 4$ неравенство (3) может быть получено с помощью техники, разработанной для локальных сплайнов [I].

При $N \ge 5$ оценка (34), очевидно, справедлива на промежутках $[x_i\ x_{i+1}]$, $i = 2,\dots,N-3$. Далее, как и в случае граничных условий типов I, II, очевидно, для больших N на всех отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ сохраняется оценка (39). При малых N дополнительно нужно исследовать промежутки $[x_{N-4}, x_{N-3}], [x_{N-3}, x_{N-2}]$. Это не составляет труда, если вместо (36) при $x \in [x_{N-3}, x_{N-2}]$ использовать уравнения

$$\mu_j Q_{j-1} + 2Q_j + \lambda_j Q_{j+1} = \tilde{d}_j, \quad j = N-2, N-1. \tag{47}$$

$$\lambda_{N-1} Q_{N-2} - Q_{N-1} + \mu_{N-1} Q_N = d_N.$$

При $x \in [x_{N-4}, x_{N-3}]$ в (47) следует взять $j = N-3, N-2, N-1$.

Таким образом, для доказательства (3) достаточно изучить отрезки $[x_1, x_2]$ и $[x_{N-2}, x_{N-1}]$, причем можно считать $h_1/H \ge 1/4$, $h_{N-2}/H \ge 1/4$. В силу симметрии ограничимся рассмотрением одного из них.

Пусть $x \in [x_1, x_2]$. Подставляя в (28) выражения для Q_1 и Q_2 из (10), имеем

$$S''(x) - f''(x) = \frac{1}{\Delta_0}\{\lambda_2\lambda_3(\mu_1-\lambda_1+3\lambda_1 t)Q_4 +$$

$$+ [(1-t)(4-\lambda_2\mu_3) - 2\mu_2 t](\lambda_1\tilde{d}_1-\mu_1 d_0) + [(1-t)(\lambda_1-\mu_1) -$$

$$- t(1+\lambda_1)](\lambda_2\tilde{d}_3-2\tilde{d}_2)\} + (1-t)f''_1 + tf''_2 - f''(x). \tag{48}$$

Полагая $t = t^* = \dfrac{4-\lambda_2\mu_3}{4-\lambda_2\mu_3+2\mu_2}$, получаем

$$S''(x_1+t^*h_1) - f''(x_1+t^*h_1) = \frac{1}{4-\lambda_2\mu_3+2\mu_2}\{\lambda_2\lambda_3 Q_4 -$$

$$- \lambda_2 h_2^2\int_0^1[2(1-\tau) - 2(1-\tau)^3-\mu_2(\tau-\tau^3)]f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau+$$

$$+\lambda_2\lambda_3 h_3^2\int_0^1[1-\tau-(1-\tau)^3]f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau+2\mu_2 h_1^2\int_0^{t^*}\tau^3 f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau +$$

$$+h_1^2\int_{t^*}^1[(1-\tau)(4-\lambda_2\mu_3) - 2\mu_2(\tau-\tau^3)]f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau .$$

Отсюда

$$|S''(x_1 + t^*h_1) - f''(x_1 + t^*h_1)| \le \Phi \, \|f^{IV}\|_\infty, \tag{49}$$

где

$$\Phi(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{12(4-\lambda_2\mu_3+2\mu_2)} \{2\lambda_2\lambda_3 H^2 + 3\lambda_2 h_2^2(1+\lambda_2) +$$

$$+ 3\lambda_2\lambda_3 h_3^2 + 6h_1^2(1-t^*)^2(4-\lambda_2\mu_3) - 6h_1^2\mu_2[1-2(t^*)^2] \}.$$

Используя (I4), (49) и лемму 3, из неравенства

$$|S''(x)-f''(x)| \le (1-u)|S''(x_1+t^*h_1) - f''(x_1+t^*h_1)| +$$

$$+ u|Q_2| + |L(f''; x_1+t^*h_1,x_2) - f''(x)|, \quad x \in [x_1+t^*h_1,x_2],$$

находим $|S''(x)-f''(x)| \le \{(1-u)\Phi + \frac{u}{6}H^2 + \frac{u(1-u)}{2}(1 - t^*)^2\}\|f^{IV}\|_\infty$.
Можно показать, что производная по u от правой части неравенства положительна при $h_1/H \ge 1/4$. Поэтому максимум правой части достигается при $u=1$ и, следовательно,

$$|S''(x)-f''(x)| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_1 + t^*h_1,x_2]. \tag{50}$$

Далее рассмотрим $x \in [x_1,x_1+t^*h_1]$. Выделим здесь два случая: $h_0 \ge h_1$, $h_0 < h_1$.

I) $h_0 \ge h_1$. Из (I0) находим $|Q_1| \le \frac{1}{\Delta_0}\{\lambda_2\lambda_3(\mu_1-\lambda_1)|Q_4|+|D_1|\}$.
Подставляя сюда оценки величин $|Q_4|,|D_1|$ и учитывая, что максимум правой части достигается при $h_0 = h_2 = h_3 = H$, имеем

$$|Q_1| \le \xi(\alpha)H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad \alpha = h_1/H,$$

$$\xi(\alpha) = \frac{14 + 7\alpha + 45\alpha^2 - 9\alpha^3 - 12\alpha^4}{12(7 + 26\alpha + 12\alpha^2)}.$$

Кроме того, можно показать, что функция Φ в (49) удовлетворяет неравенству

$$\Phi(h_1,h_2,h_3) \le \Phi(h_1,H,H) = H^2\eta(\alpha),$$

$$\eta(\alpha) = \frac{17 + 11\alpha + 12\alpha^3 + 12\alpha^4}{12(7 + 19\alpha + 12\alpha^2)} - \frac{8\alpha^4}{(7+12\alpha)^2}.$$

При $x \in [x_1,x_1+t^*h_1]$ имеем

$$|S''(x) - f''(x)| \le (1-u)|Q_1| + u|S''(x_1 + t^*h_1) - f''(x_1+t^*h_1)| +$$

$$+ |L(f''; x_1, x_1+ t^*h_1) - f''(x)| \le H^2 \|f^{IV}\|_\infty \Big\{(1-u)\xi(\alpha) +$$

$$+ u\eta(\alpha) + \frac{u(1-u)}{2}\left[\frac{\alpha(8\alpha+7)}{12\alpha+7}\right]^2\Big\} .$$

Максимальное значение выражения в фигурных скобках при $u \in [0,1]$, $\alpha \in [1/4,1]$ не превышает I/6. Таким образом,

$$|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad h_0 \ge h_1, \quad x \in [x_1, x_1+t^*h_1]. \quad (51)$$

2) $h_0 < h_1$. Из (48) при $t=\tilde{t}=(\lambda_1-\mu_1)/(3\lambda_1)$ легко получаем $|S''(x_1+\tilde{t}h_1) - f''(x_1+\tilde{t}h_1)| \le \frac{1}{36}\|f^{IV}\|_\infty(h_0^2 + h_0h_1+h_1^2)$..Заметим, что $\tilde{t} < t^*$. При $x \in [x_1, x_1+\tilde{t}h_1]$ имеем $|S''(x) - f''(x)| \le \Big\{(1-u)\frac{H^2}{6} + +\frac{u}{36}(h_0^2+h_0h_1+h_1^2) + \frac{u(1-u)}{2}(h_1\tilde{t})^2\Big\}\|f^{IV}\|_\infty$. Отсюда

$$|S''(x)-f''(x)| \le \frac{1}{6}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_1, x_1+\tilde{t}h_1], \ h_0<h_1. \quad (52)$$

Наконец, для $x \in [x_1+\tilde{t}h_1, x_1+ t^*h_1]$ находим

$$|S''(x) - f''(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty \Big\{\frac{1-u}{36}(h_0^2 + h_0h_1 + h_1^2) +$$

$$+ u\Phi + \frac{u(1-u)}{2}(t^* - \tilde{t})^2 h_1^2\Big\} \le$$

$$\le \|f^{IV}\|_\infty \Big\{\frac{1-u}{12}h_1^2 + \frac{u(1-u)}{2}(h_1t^*)^2 + u\Phi\Big\} .$$

Правая часть неравенства достигает максимума при $h_2 = h_3 = H$, т.е.

$$|S''(x) - f''(x)| \le H^2\|f^{IV}\|_\infty \Big\{\frac{(1-u)}{12}\alpha^2 + u\eta(\alpha) +$$

$$+ \frac{u(1-u)}{2}\left[\frac{\alpha(8\alpha+7)}{12\alpha+7}\right]^2\Big\} .$$

Анализ показывает, что выражение в фигурных скобках при

$\alpha \in [1/4, 1]$, $u \in [0,1]$ меньше I/6. Итак,

$$|S''(x) - f''(x)| \le \frac{1}{6} H^2 \|f^{IV}\|_\infty, \quad h_0 \le h_1, \tag{53}$$

$$x \in [x_1+\tilde{t}h_1, x_1+t^*h_1].$$

Объединяя (50)-(53), получаем нужную оценку для промежутка $[x_1, x_2]$. Доказательство теоремы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически, в ходе доказательства теоремы I было показано, что оценка (2) справедлива, когда $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям IУ, если дополнительно потребовать выполнения условий: $h_0/H < 1/4$, $h_{N-1}/H < 1/4$.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. ЖАНЛАВ Т. Некоторые оценки приближения вторых производных с помощью кубических интерполяционных сплайнов. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 81).Новосибирск,1979, с. 12-20.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 сентября 1982 года