МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 519.65

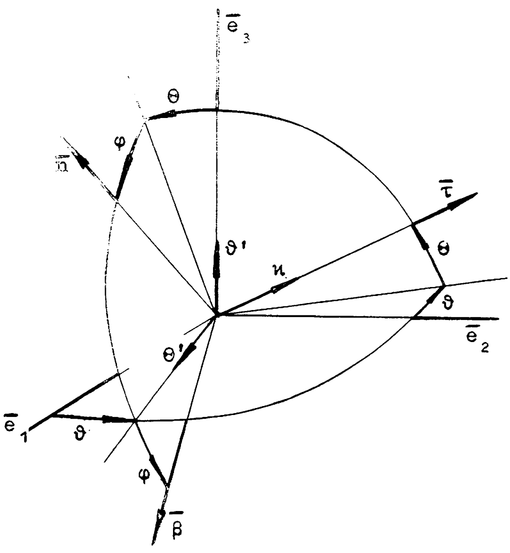
О ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ В R^3 КРИВОЙ

В.К.Исаев, А.И.Малахов

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задан набор точек

$$\bar{r}_j = \{x_j, y_j, z_j\}, \quad j = 0,1,\dots,N. \tag{1}$$

Требуется провести через эти точки кривую $\bar{r} = \bar{r}(s)$ с непрерывной кусочно-гладкой кривизной $k(s)$. Эту задачу можно решать различными способами. Наиболее простой путь – построение параметрических сплайнов [I].



Другая возможность описания пространственной кривой связана с выбором в качестве независимых переменных кривизны $k(s)$ и кручения $\varkappa(s)$. Запишем динамические уравнения движения сопровождающего трехгранника по гладкой кривой. Пусть, как обычно, $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{\beta}$ – орты касательной, нормали, бинормали к кривой в точке с декартовыми координатами x, y, z; $\varphi, \Theta, \vartheta$ – эйлеровы углы, описывающие ориентацию сопровождающего триэдра; $\varkappa$ – кручение, k – кривизна, имеющие смысл проекций абсолютной угловой скорости триэдра на касательную и бинормаль соответственно (см.рисунок).

Тогда уравнения движения запишутся в виде:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varkappa, \quad \frac{d\theta}{ds} = k \cos \varphi ,$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = - k \sin \varphi \cos \theta + \varkappa \sin \theta ,$$

$$\frac{dx}{ds} = - \cos \theta \sin \vartheta ,$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \theta \cos \vartheta ,$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta .$$

Обозначим: $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = \varphi$; $x_5 = \theta$; $x_6 = \vartheta$

Если в качестве управлений принять $u_1 = \varkappa$, $u_2 = k$, то приведенную систему можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x_1' = -\cos x_5 \sin x_6 , \quad x_2' = \cos x_5 \cos x_6 , \\ &x_3' = \sin x_5 , \quad x_4' = u_1 , \quad x_5' = u_2 \cos x_4 , \\ &x_6' = -u_2 \sin x_4 \cos x_5 + u_1 \sin x_5 . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Штрих означает дифференцирование по s; первые три уравнения системы (2) являются аналогами известных кинематических соотношений Эйлера.

Введем в рассмотрение вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Можно считать, что уравнения (2) описывают поэтапный переход управляемой системы из некоторого начального состояния $\bar{x}(s_{j-1}) = \bar{x}^{(j-1)} \in G_{j-1}(\bar{x})$ в некоторое конечное состояние

$$\bar{x}(s_j) = \bar{x}^{(j)} \in G_j(\bar{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3)$$

Если задать управления u_1, u_2 в зависимости от s, то можно проинтегрировать систему (2) и найти вектор $\bar{x}^{(j)}$ по заданному $\bar{x}^{(j-1)}$

Используя аналогию с кубическими сплайнами [I], выберем управления u_1, u_2 в виде

$$k(s) = k_j \frac{s-s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}} + k_{j-1} \frac{s_j - s}{s_j-s_{j-1}};$$
$$\varkappa(s)=\varkappa_j \frac{s-s_{j-1}}{s_j-s_{j-1}} + \varkappa_{j-1} \frac{s_j-s}{s_j-s_{j-1}}; \quad j=1,2,\dots,N. \tag{4}$$

для отыскания $3(N+1)$ неизвестных k_j, $\varkappa_j$, s_j, $j=0,1,\dots,N$, служат $3N$ условий интерполяции

$$\Delta\bar{r}_j = \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j-x_{j-1} \\ y_j-y_{j-1} \\ z_j-z_{j-1} \end{pmatrix} = \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} \bar{\tau} ds = \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} ds,$$
$$j=1,2,\dots,N.$$

Так как всегда можно положить $s_0 = 0$, то для замыкания системы нужно добавить еще два условия, например, $k(0)=k_0$, $k(s_N) = k_N$.

Поставим задачу об отыскании оптимального управления $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, доставляющего минимум некоторому функционалу

$$I = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} f(\bar{x},\bar{u}) ds$$

в рамках задачи (2),(3). С этой целью воспользуемся принципом максимума Л.С.Понтрягина [2,3].

Для определенности ограничимся рассмотрением функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} (u_1^2 + \alpha u_2^2) ds$$

и будем считать, что на компоненты x_4, x_5, x_6 вектора $\bar{x}$ наложены условия слева и справа от узлов (I):

$$\Delta_m^- = \{(x_m^i)^-\}, \quad \Delta_m^+ = \{(x_m^j)^+\}, \tag{1*}$$
$$i = 1,2,\dots,N; \quad j = 0,1,\dots,N-1; \quad m = 4,5,6,$$

где $(x_m^i)^- = x_m(s_i-0)$ $(x_m^j)^+ = x_m(s_j+0)$. Введем сопряженные переменные $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6$ и запишем гамильтониан $H = -\psi_1 \cos x_5 \sin x_6 + \psi_2 \cos x_5 \cos x_6 + \psi_3 \sin x_5 + \psi_4 u_1 + \psi_5 u_2 \cos x_4 - \psi_6 u_2 \sin x_4 \cos x_5 + \psi_6 u_1 \sin x_5 - \frac{1}{2}(u_1^2 + \alpha u_2^2)$.

Сопряженные переменные удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0; \quad \psi_3' = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0;\\
&\psi_4' = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = \psi_5 u_2 \sin x_4 + \psi_6 u_2 \cos x_4 \cos x_5;\\
&\psi_5' = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = -\psi_1 \sin x_5 \sin x_6 + \psi_2 \sin x_5 \cos x_6 -\\
&\qquad - \psi_3 \cos x_6 - \psi_6 u_2 \sin x_4 \sin x_5 - \psi_6 u_1 \cos x_5;\\
&\psi_6' = -\frac{\partial H}{\partial x_6} = \psi_1 \cos x_5 \cos x_6 + \psi_2 \cos x_5 \sin x_6 .
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Система (5) имеет следующие первые интегралы :

$$\psi_1 = C_1, \ \psi_2 = C_2, \ \psi_3 = C_3,$$

$$\psi_6 = C_1 x_2 - C_2 x_1 + C_4 .$$

На основании принципа максимума оптимальные управления в открытой области запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_1^* = \psi_4 + \psi_6 \sin x_5,\\
&u_2^* = \frac{1}{\alpha}(\psi_5 \cos x_4 - \psi_6 \sin x_4 \cos x_5).
\end{aligned} \qquad (6)$$

Оптимальное управление (u_1^*, u_2^*) и I_0 - оптимальная траектория найдутся из решения краевой задачи для системы (2) и последних двух уравнений системы (5) с управлением в виде (6). Для отыскания 6 неизвестных $C_1, C_2, C_3, C_4, \psi_5^0, \psi_6^0$ служат 6 условий на правом конце (3), либо соответствующие условия трансверсальности. В силу специфики поставленных краевых условий (I), (I*) краевая задача решается отдельно для каждого подынтервала (s_j, s_{j+1}) .

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. Математическая теория оптимальных процессов /Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. -М.: Физматгиз,1961. - 391 с.

3. РОЗОНОЭР Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. -Автоматика и телемеханика, т.20, № 10, с. 1320-1334, № 11,с.1441-1458, № 12, с. 1561-1578.

Поступила в ред.-изд.отд.
16 июня 1981 года