МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 518.5:518.61

О СПЛАЙН-ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

В.И. Чивончук

В последние годы в теории приближения и ее многочисленных приложениях интенсивное развитие и широкое применение получили методы сплайн-функций. Это объясняется тем, что сплайны обладают рядом преимуществ по сравнению с другими способами аппроксимации и сравнительно легко реализуются на ЭВМ [1-5]. Настоящая работа посвящена численно-аналитической реализации метода последовательных приближений решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами с помощью интерполяционных кубических сплайнов. В работе приводятся достаточные условия, позволяющие априорно указать такой шаг сетки, при котором гарантируется сходимость итерационного процесса во всей рассматриваемой области. Кроме того, устанавливается априорная оценка погрешности, зависящая как от числа итераций, так и от выбранного шага сетки.

1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,\xi)\, f(\xi, y(\xi))\,d\xi \ , \tag{1}$$

где $\varphi(x) \in C[a,b]$, $K(x,\xi) \in C(D)$, $f(x,y) \in C(D_1)$, $D = \{(x,\xi): a \le \xi \le x \le b\}$, $D_1 = [a,b]\times[-\mu+\varphi, \mu+\Phi]$, $\mu>0$; φ и Φ соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $\varphi(x)$ на $[a,b]$. Все переменные, входящие в рассмотрение, предполагаются вещественными.

Для приближенного решения уравнения (1) используем алгоритм

$$y_{n+1}(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,\xi) S(f_n;\xi)\,d\xi, \quad y_0(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $f_n(\xi) = f(\xi, y_n(\xi))$, $S(f; x)$ – кубический интерполяционный сплайн дефекта I, интерполирующий функцию $f(x) \in C[a,b]$ в узлах равномерной сетки Δ: $x_i=a+ih$, $i = 0,\dots, N$, $h = (b-a)/N$, $N \geq 2$. Для $S(f,x)$ используется представление через моменты $M_i = S''(f;x_i)$ [3] при краевых условиях

$$M_0 = h^{-2}[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)], \quad M_N = h^{-2}[f(x_{N-2})-2f(x_{N-1})+f(x_N)] \qquad (3)$$

Алгоритм вида (2) для нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна исследовался в работах [6-7].

В дальнейшем будет использована следующая

ЛЕММА [8]. *Если $f(x) \in C[a,b]$ и сплайн $S(f;x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах равномерной сетки Δ и удовлетворяет краевым условиям (3), то имеют место оценки*

$$|f(x) - S(f;x)| \leq A\omega(h,f), \quad |S(f;x)| \leq \|f\| + A_0\omega(h,f), \qquad (4)$$

где $A = 1 + A_0$, $A_0=\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $\omega(h,f)$ – *модуль непрерывности функции* $f(x)$ на $[a,b]$.

Обоснование алгоритма (2) проведем при следующих дополнительных предположениях относительно заданных функций. Пусть функции $\varphi(x)$ и $K(x,\xi)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x:

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq l|x''-x'|, \quad |K(x'',\xi)-K(x',\xi)| \leq L_0(\xi)|x''-x'| \qquad (5)$$

при $x', x'' \in [a,b]$, $a \leq \xi \leq \min(x', x'')$, а функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y) \in C(D_1)$ удовлетворяют в области D_1 условию Липшица по обеим переменным

$$\left.\begin{aligned} |f(x'',y_2) - f(x',y_1)| &\leq L_1|x'' - x'| + L_2|y_2 - y_1|, \\ |f'_y(x'',y_2)-f'_y(x',y_1)| &\leq L_3|x'' - x'| + L_4|y_2 - y_1|, \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

где $L_0(\xi)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция, L_i ($i=1,2,3,4$) – константы, вообще-то зависящие от μ, причем $L_2 = \max|f'_y(x, y)|$ при $(x,y) \in D_1$.

2. Установим достаточное условие, при котором все $y_n(x) \in [-\mu + \varphi, \mu + \Phi]$. Вводя обозначения

$$\left.\|K\| = \max_{x\in[a,b]}\int_a^x|K(x,\xi)|d\xi, \quad F(\mu)= \max_{(x,y)\in D_1}|f(x,y)|, \quad L_0=\int_a^b L_0(\xi)d\xi \;\right\} \qquad (7)$$

$B(\mu)=F(\mu)+hA_0(L_1+lL_2)$, $K_h=\max|K(x,\xi)|$, $x\in[a,b]$, $\xi\geq a$, $x-h\leq\xi\leq x$, и подчиняя шаг сетки h условию

$$hq_0<1,\quad q_0=A_0L_2(L_0+K_h),\tag{8}$$

определим μ как наименьший положительный корень, если таковой существует, уравнения

$$\frac{\|K\|B(\mu)}{1-hq_0}=\mu.\tag{9}$$

Тогда в силу соотношений (4)-(7) имеем

$$\begin{aligned}
&\omega(h,y_0)\leq hl,\\
&\omega(h,f_0)=\max_{\substack{x',x''\in[a,b]\\ |x''-x'|\leq h}}|f(x'',y_0(x''))-f(x',y_0(x'))|\leq\\
&\leq hL_1+L_2\omega(h,y_0)\leq h(L_1+lL_2),\\
&|y_1(x)-\varphi(x)|\leq\|K\|\|S(f_0;x)\|\leq\|K\|(\|f_0\|+A_0\omega(h,f_0))\leq\|K\|B<\mu,
\end{aligned}\tag{10}$$

т.е. $y_1(x)\in[-\mu+\varphi,\mu+\varphi]$. Далее, не умаляя общности, будем считать, что $x'\leq x''$. Тогда из (2), учитывая (4)-(8) и (10), последовательно получаем

$$y_1(x'')-y_1(x')=\varphi(x'')-\varphi(x')+\int_a^{x'}[K(x'',\xi)-K(x',\xi)]S(f_0;\xi)d\xi+$$

$$+\int_{x'}^{x''}K(x'',\xi)S(f_0;\xi)d\xi,$$

$$\omega(h,y_1)\leq hl+h(L_0+K_h)\|S(f_0;x)\|\leq hl+h(L_0+K_h)(F+A_0\omega(h,f_0))\leq$$

$$\leq hl+h(L_0+K_h)B,$$

$$A_0\omega(h,f_1)\leq A_0(hL_1+L_2\omega(h,y_1))\leq hA_0(L_1+lL_2)+hq_0B=B-F+hq_0B=$$

$$=\frac{B[1-(hq_0)^2]}{1-hq_0}-F,$$

$$|y_2(x)-\varphi(x)|\le\|K\|\|S(f_1;x)\|\le\|K\|(F+A_0\omega(h,f_1))\le\frac{\|K\|\,B[1-(hq_0)^2]}{1-hq_0}<\mu,$$

т.е. $y_2(x)\in[-\mu+\varphi,\ \mu+\Phi]$. Вообще, если $y_n(x)\in[-\mu+\varphi,\ \mu+\Phi]$ и

$$\omega(h,y_n)\le hl+\frac{h(L_0+K_h)B[1-(hq_0)^n]}{1-hq_0}, \tag{11}$$

то аналогичным образом устанавливаем соотношения

$$A_0\omega(h,f_n)\le\frac{B[1-(hq_0)^{n+1}]}{1-hq_0}-F, \tag{12}$$

$$|y_{n+1}(x)-\varphi(x)|\le\|K\|(F+A_0\omega(h,f_n))\le\frac{\|K\|B[1-(hq_0)^{n+1}]}{1-hq_0}<\mu.$$

Таким образом, при выполнении условия (9) все $y_n(x)$ принадлежат отрезку $[-\mu+\varphi,\ \mu+\Phi]$. Отметим, что (9) заведомо выполняется, если постоянные L_i и F в (6),(7) не зависят от μ.

3. Переходя к исследованию сходимости алгоритма (2), введем обозначения

$$\delta_n(x)=y_n(x)-y_{n-1}(x),\quad \delta_0(x)=y_0(x),\quad \varepsilon_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),$$

$$\varepsilon_0(x)=f_0(x),\quad S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}|\delta_i(x)|,\quad \sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i\|,\quad \Omega_n=\sum_{i=1}^{n}\omega(h,\delta_i),$$

$$E_n=\sum_{i=1}^{n}\omega(h,\varepsilon_i),\qquad \varkappa=\exp(L_2\int_a^b K(\xi)d\xi) \tag{13}$$

и предположим, что для $x\in[a,b]$ $|K(x,\xi)|\le K(\xi)$, где $K(\xi)$ – интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$. Покажем, что последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена. Из (2) имеем

$$\delta_{n+1}(x)=\int_a^x K(x,\xi)S(\varepsilon_n,\xi)d\xi,\ n=0,1,\dots, \tag{14}$$

где

$$\varepsilon_n=f'_y(x,\theta_n(x))\delta_n(x),\ \theta_n(x)=(1-\tau)y_{n-1}(x)+\tau y_n(x),\quad 0<\tau<1. \tag{15}$$

Из (14) и (15), на основании (4)-(7),(10),(11) и (13), получаем

$$|\delta_1(x)| \le \int_a^x K(\xi)\|S(f_0,\xi)\|d\xi \le B\int_a^x K(\xi)d\xi, \tag{16}$$

$$|\delta_{n+1}(x)| \le \int_a^x K(\xi)[L_2|\delta_n(\xi)| + A\omega(h,\varepsilon_n)]d\xi, \quad n=1,2,\dots, \tag{17}$$

$$\varepsilon_n(x'')-\varepsilon_n(x')=f'_y(x'',\theta_n(x''))[\delta_n(x'')-\delta_n(x')]+\delta_n(x')[f'_y(x'',\theta_n(x''))-$$
$$- f'_y(x',\theta_n(x'))],$$

$$A\omega(h,\varepsilon_n)\le AL_2\omega(h,\delta_n)+A\|\delta_n\|\{hL_3+L_4[(1-\tau)\omega(h,y_{n-1})+\tau\omega(h,y_n)]\} \le$$

$$\le AL_2\omega(h,\delta_n) + hA\|\delta_n\|\left[L_3 + L_4\left(1 + \frac{B(L_0+K_h)}{1-hq_0}\right)\right] =$$

$$= L_2[A\omega(h,\delta_n)+ hq_1\|\delta_n\|], \quad n = 1,2,\dots, \tag{18}$$

где обозначено

$$q_1 = AL_2^{-1}\left[L_3+L_4\left(1 + \frac{B(L_0+K_h)}{1-hq_0}\right)\right]. \tag{19}$$

Так как

$$\delta_{n+1}(x'')-\delta_{n+1}(x')=\int_a^{x'} [K(x'',\xi)-K(x',\xi)]S(\varepsilon_n;\xi)d\xi+\int_{x'}^{x''} K(x'',\xi)S(\varepsilon_n;\xi)d\xi,$$

то

$$\omega(h,\delta_n) \le h\int_a^b L_0(\xi)\|S(\varepsilon_n;\xi)\|d\xi + hK_h\|S(\varepsilon_n;x)\|, \quad n = 1,2,\dots,$$

откуда в силу (4)-(7) и (I5) имеем

$$\omega(h,\delta_1) \le h(L_0+K_h)\|S(f_0;x)\| \le hB(L_0+K_h), \tag{20}$$

$$\omega(h,\delta_{n+1}) \le h(L_0+K_h)(L_2\|\delta_n\| + A_0\omega(h,\varepsilon_n)), \; n=1,2,\dots \tag{21}$$

Из неравенств (I6)-(I8), (20) и (2I) с учетом обозначений (I3) следуют соотношения

$$S_{n+1}(x)\le\int_a^x K(\xi)[L_2S_n(\xi)+AE_n+B]d\xi, \quad \sigma_{n+1}\le\int_a^b K(\xi)[L_2S_n(\xi)+AE_n+B]d\xi, \tag{22}$$

$$AE_n \leqslant L_2(A\Omega_n + hq_1\sigma_n), \tag{23}$$

$$\Omega_{n+1} \le h(L_0+K_h)(L_2\sigma_n + A_0E_n + B), \quad n=1,2,\dots. \qquad (24)$$

Установим теперь оценку сверху для выражения, стоящего в квадратных скобках под знаком интеграла в (22). Имеем

$$L_2S_n(x)+AE_n+B \le AE_n+B+L_2\int_a^x K(\xi)[L_2S_n(\xi)+AE_n+B]d\xi, \quad n=1,2,\dots,$$

откуда, применяя теорему об интегральных неравенствах, находим

$$L_2S_n(x) + AE_n+B \le (AE_n+B)\exp(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi), \quad n=1,2,\dots. \qquad (25)$$

Тогда второе из неравенств (22) приводит к соотношениям

$$L_2\sigma_n \le (AE_n+B)[\exp(L_2\int_a^b K(\xi)d\xi)-1]=(AE_n+B)(\alpha-1), \qquad (26)$$

$$A(L_2\sigma_n+AE_n+B) \le B+(AE_n+B)(A\alpha-1), \quad n=1,2,\dots, \qquad (27)$$

и, следовательно,

$$A\Omega_n \le hB(L_0+K_h)+h(L_0+K_h)(A\alpha-1)(AE_n+B), \quad n=1,2,\dots. \qquad (28)$$

Умножая (26) на hq_1, а (28) на L_2 и учитывая (23), получаем $AE_n+B \le B + hBL_2(L_0+K_h)+h(AE_n+B)[q_1(\alpha-1) + L_2(L_0+K_h)(A\alpha-1)]$, откуда

$$AE_n + B \le \frac{B[1 + hL_2(L_0+K_h)]}{1-hq}, \quad n=1,2,\dots, \qquad (29)$$

в предположении, что шаг сетки h удовлетворяет условию

$$hq < 1, \quad q = q_0\alpha+[q_1+L_2(L_0+K_h)](\alpha-1). \qquad (30)$$

Таким образом, из (26) и (29) приходим к следующей оценке:

$$\sigma_n \le \frac{B[1+hL_2(L_0+K_h)]L_2^{-1}}{1-hq} = \sigma, \quad n=1,2,\dots. \qquad (31)$$

Следовательно, монотонно возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{i=0}^{\infty}\|\delta_i\|$ ограничена сверху величиной $\|\varphi\| + \sigma$, т.е. этот ряд сходится. А это означает, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i(x)$, или, что одно и то же, последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $y^*(x) \in C[a,b]$, которая, как нетрудно убедиться, является решением уравнения

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,\xi)S[f(\xi,y(\xi));\xi]d\xi.$$

4. Установим теперь оценку погрешности алгоритма (2). Пусть $\{z_n(x)\}$ – последовательность приближений к решению уравнения (I), построенная по методу простой итерации:

$$z_{n+1}(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,\xi)f(\xi,z_n(\xi))d\xi , \quad z_0(x)=\varphi(x). \tag{32}$$

Очевидно, что все $z_n(x) \in [-\mu+\varphi, \mu+\Phi]$, если μ подчинено условию (9). Из (2) и (32) имеем

$$y_{n+1}(x)-z_{n+1}(x) = \int_a^x K(x,\xi)[f(\xi,y_n(\xi)) - f(\xi,z_n(\xi))]d\xi +$$

$$+ \int_a^x K(x,\xi)[S(f_n;\ \xi) - f_n(\xi)]d\xi , \qquad n = 0,1,\ldots,$$

откуда, на основании (4) и (6) последовательно получаем

$$|y_1(x) - z_1(x)| \le A\omega(h,f_0)\int_a^x K(\xi)d\xi,$$

$$|y_2(x)-z_2(x)| \le L_2 \int_a^x K(\xi)\,|y_1(\xi)-z_1(\xi)|\,d\xi + A\omega(h,f_1)\int_a^x K(\xi)d\xi \le$$

$$\le AL_2^{-1}\left[\frac{\omega(h,f_0)}{2}\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)^2+\omega(h,f_1)\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)\right]$$

и, применяя метод математической индукции, приходим к оценке

$$|y_n(x)-z_n(x)| \le AL_2^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\omega(h,f_i)}{(n-i)!}\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)^{n-i}, \quad n=1,2,\ldots . \tag{33}$$

Представляя неравенство (I2) в виде

$$A_0\omega(h,f_n) \le \frac{B-F(1-hq_0)}{1 - hq_0} - \frac{B}{1 - hq_0}(hq_0)^{n+1}$$

и учитывая (7) и (8) получаем

$$\omega(h;f_n) \le h[\gamma_1 - \gamma_2(hq_0)^n], \quad n = 1,2,\dots, \tag{34}$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_2 + L_1 + lL_2, \quad \gamma_2 = \frac{BL_2(L_0+K_h)}{1 - hq_0}. \tag{35}$$

Теперь оценку (33) можно представить в виде

$$|y_n(x)-z_n(x)| \le h[\gamma_1 P_n(x) - \gamma_2 Q_n(x)], \; n=1,2,\dots, \tag{36}$$

где

$$P_n(x) = AL_2^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)^i$$
$$\tag{37}$$
$$Q_n(x) = AL_2^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(hq_0)^i}{(n-i)!}\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)^{n-i}$$

В итоге, из неравенства $|y(x)-y_n(x)| \le |y(x) - z_n(x)| + |y_n(x) - z_n(x)|$ и соотношения (36) получаем следующую оценку погрешности алгоритма (2):

$$|y(x)-y_n(x)| \le F_0L_2^{-1}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i!}\Big(L_2\int_a^x K(\xi)d\xi\Big)^i + h[\gamma_1P_n(x)-\gamma_2Q_n(x)],$$

$$n = 0,1,\dots, \tag{38}$$

где $F_0 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x,\varphi(x))|$, $P_0(x) = Q_0(x) \equiv 0$, причем $Q_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [a,b]$. В этой оценке первое слагаемое характеризует погрешность обычного метода последовательных приближений, а второе - погрешность, обусловленную сплайн-аппроксимацией за n итераций.

Изложенные выше результаты сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА. *Если функции* $\varphi(x) \in C[a,b]$, $K(x,\xi) \in C(D)$ и $f(x,y) \in C(D_1)$ *удовлетворяют условиям* (5) и (6) *и шаг сетки* h *удовлетворяет условию* (30), *то алгоритм* (2) *сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $[a,b]$ к некоторой функции $y^*(x)\in C[a,b]$ и имеет место оценка погрешности (38).

5. Приведем иллюстрирующий пример, для которого укажем шаг сетки, при котором выполняется условие (30), а также определим область, из которой не выходят все последовательные приближения алгоритма (2):

$$y(x) = 1+\frac{8}{3}x+\frac{20}{9}x^2+\frac{40}{81}x^3-\frac{40}{243}\int_0^x\frac{(x-\xi)^3}{\sqrt{y(\xi)}}\,d\xi,\quad y(x)=(1+x)^{8/3}. \qquad (39)$$

Вычислим необходимые константы при $x\in[0,1]$: $\|K\| = 10\cdot 3^{-5}$, $K(\xi) = 40\cdot 3^{-5}(1-\xi)^3$; $L_1 = L_3 = 0$, $\varphi=\varphi(0) = 1$, $\Phi=\varphi(1) = 517\cdot 3^{-4}$, $l=\varphi'(1) = 232\cdot 3^{-3}$, $L_2 = 0{,}5(1-\mu)^{-1{,}5}$, $L_4 = 0{,}75(1-\mu)^{-2{,}5}$; $F=(1-\mu)^{-0{,}5}$, $K_h = 40\cdot 3^{-5}h^3$, $L_0(\xi) = 40\cdot 3^{-4}(1-\xi)^2$, $L_0 = 40\cdot 3^{-5}$, $q_0 = 80\cdot 3^{-6{,}5}\times$ $\times(1-\mu)^{-1{,}5}(1+h^3)$, $B=(1-\mu)^{-0{,}5}+464\cdot 3^{-4{,}5}(1-\mu)^{-1{,}5}h$.

Число μ, при котором все $y_n(x)\in[-\mu+\varphi,\ \Phi+\mu]$ при любом допустимом шаге сетки ($h\le 0{,}5$), определяется из уравнения (9):

$$\mu = \frac{10[3^5(1-\mu)+232\sqrt{3}]}{3^5[3^5(1-\mu)^{1{,}5}-5\sqrt{3}]},$$

решая которое, получаем $\mu\approx 0{,}13$ и, следовательно, $y_n(x)\in[0{,}86;2{,}3]$, при этом $F\le 1{,}1$, $L_2\le 0{,}63$, $L_4\le 1{,}1$, $B\le 3{,}2$, $q_0\le 0{,}089$, $B/(1-hq_0)\le$ $\le 3{,}3$, $q_1\le 29$, $\alpha = 1{,}0$, $q\le 0{,}83$. Таким образом, условие (30) для уравнения (39) выполняется при $h\le 1{,}2$, т.е. алгоритм (2) для приведенного примера сходится при всех допустимых значениях шага сетки.

Алгоритм (2) реализован в виде программы для ЭВМ. Погрешность вычислений при $h = 0{,}1$ для примера (39) в третьей итерации равна: $\nu_3 = 5{,}7\cdot 10^{-7}$, где $\nu_3 = \max\limits_i|y(x_i) - y_3(x_i)|$.

Литература

1. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения.- М.:Мир,1972.- 316 с.

2. БЕРДЫШЕВ В.И., СУББОТИН Ю.Н. Численные методы приближения функций.- Свердловск: Сред.-Урал.кн.изд-во,1979.- 120 с.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И.,МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций.- М.: Наука,1980. - 352 с.

4. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики.- М.:Наука, 1977.- 456 с.

5. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.- М.: Наука, 1976. - 248 с.

6. ПОЛЯКОВ Р.В., ШЛЕПАКОВ Л.Н. О сходимости одного метода решения нелинейных интегральных уравнений с помощью сплайн-функций. - В кн.: Асимптотические методы в нелинейной механике. Киев, 1974, с.204-211.

7. ТИВОНЧУК В.И., ШЛЕПАКОВ Л.Н. Об условиях сходимости и оценке погрешности сплайн-итерационного метода решения нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна.- В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Киев, 1979, с.75-84.

8. ТИВОНЧУК В.И. Решение линейных интегральных уравнений Вольтерра методом осреднения функциональных поправок в сочетании со сплайнами. - Укп.мат.ж., 1980, т.32, №3, с.415-422.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 марта 1981 года