ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПРОГРАММИРУЕМОЙ СТРУКТУРОЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 94

УДК 519.2:519.68:519.71

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МЕЖМАШИННЫЕ СВЯЗИ

Н.В. Лаходынова

1. Предмет исследования

При изучении однородных вычислительных систем (ОВС) [1] были предложены их стохастические модели, представляющие собой совокупность независимых и идентичных марковских процессов. В [2] предлагается модель ОВС, как системы зависимых вероятностных автоматов. С вероятностной точки зрения такая модель представляет собой многокомпонентную случайную систему, а ее равновесное состояние - случайное поле. В настоящее время развита [3] теория многокомпонентных систем, в которых компонента принимает значения из алфавита $X = \{0,1\}$. Для произвольного алфавита состояний известны общие результаты [4], касающиеся случайных полей. В предлагаемой работе строится стохастическая модель ОВС, представляющая собой многокомпонентную систему с произвольным конечным алфавитом состояний компоненты. Показано, что в обратимом случае равновесные состояния таких систем являются марковскими полями и имеют гиббсовское описание. Предложенная модель используется для анализа надежности ОВС и оценки погрешности методов вычисления коэффициента готовности элементарной машины (ЭМ), предлагаемых в [1].

2. Состояния на конечных графах

Пусть $\bar{L} = (L, E)$ - конечный граф с множеством вершин L и множеством дуг E, причем если $l_1, l_2 \in L$ и дуга $(l_1, l_2) \in E$, то дуга $(l_2, l_1) \in E$. Вершины $l_1, l_2 \in L$ называются соседними, если $(l_1, l_2) \in E$. Совокупность вершин, соседних вершине l, обозначим ∂l и будем называть окрестностью вершины l.

Для всякого фиксированного $l \in L$ зададим случайную функцию ζ_l, принимающую значения в мно⸱стве $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, и назовем ее компонентой случайной сис⸱мы.

Положим, что $Y = X^{|L|}$ есть декартово произведение множества X на себя $|L|$ раз, где $|L|$ – количество вершин графа $\bar{L}$. Элементы множества Y называются конфигурациями. Множество конфигураций $y \in Y$, совпадающих на множестве $A \subset L$, обозначим y_A. Символом (y_A, z_B) обозначим множество конфигураций, совпадающих с y на множестве A, с z на множестве B, причем $A \cap B \neq \emptyset$.

Пусть F – множество всех подмножеств Y, т.е. F есть σ-алгебра на Y. Всякая положительная вероятностная мера μ на F называется состоянием на $\bar{L}$. Совокупность всех таких мер называется множеством состояний на $\bar{L}$.

Будем говорить, что состояние μ есть марковское случайное поле на $\bar{L}$, если для всякого $l \in L$ имеем $\mu(x_l / x_{L \setminus l}) = \mu(x_l / x_{\partial l})$. Используя формулу полной вероятности, условие марковости можно переписать следующим образом:

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_l} \mu(y_l, x_{L\setminus l})} = \frac{\sum\limits_{z_{L\setminus l\setminus \partial l}} \mu(x_{l \cup \partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\sum\limits_{z_{L\setminus l\setminus \partial l}} \sum\limits_{y_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l})}.$$

Эта формула имеет сложный вид и не очень удобна, поэтому введем понятие состояния ближайшего соседа и покажем, что оно эквивалентно понятию марковского случайного поля.

Пусть x^0 – конфигурация, принимающая в каждой точке $l \in L$ значение a_1. Состояние μ назовем состоянием ближайшего соседа, если

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{L\setminus l})} = \frac{\mu(x_{l \cup \partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}.$$

ЛЕММА I. Если μ - марковское случайное поле, то μ является состоянием ближайшего соседа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если μ – марковское случайное поле на $\bar{L}$, то условные вероятности $\mu(x_l / x_{L\setminus l})$ зависят только от значения конфигурации x на множестве $\partial l \subset L$. В точках множества $L \setminus l \setminus \partial l$ конфигурация x может принимать любые значения. Поэтому положим

$x_{L\setminus l\setminus \partial l} = x^0_{L\setminus l\setminus \partial l}$. Тогда $\mu(x_l/x_{L\setminus l}) = \mu(x_l/x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})$.Отсюда

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{z_l \neq x_l} \mu(z_l, x_{L\setminus l}) + \mu(x)} = \frac{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l}) + \sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})} .$$

Умножив обе части уравнения на знаменатель левой части,приведя подобные и преобразовав коэффициент при $\mu(x)$, получаем

$$\mu(x)\frac{\sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l}) + \sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})} =$$

$$= \sum_{z_l \neq x_l} \mu(z_l, x_{L\setminus l}) \frac{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l}) + \sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})},$$

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{z_l \neq x_l} \mu(z_l, x_{L\setminus l})} = \frac{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\sum\limits_{y_l \neq x_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})} .$$

Итак, μ - состояние ближайшего соседа.

ЛЕММА 2. Если μ-состояние ближайшего соседа, то μ-марковское случайное поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем конфигурацию x на $\bar{L}$.Рассмотрим какую-нибудь конфигурацию, которая на множестве $l\cup\partial l$ совпадает с x , а в остальных точках принимает произвольные значения $z_{L\setminus l\setminus \partial l}$. Так как μ - состояние ближайшего соседа, то из доказательства леммы I

$$\frac{\mu(x_{l\cup\partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\sum\limits_{y_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l})} = \frac{\mu(x_{l\cup\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})}{\sum\limits_{y_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, x^0_{L\setminus l\setminus \partial l})} = \frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_l} \mu(y_l, x_{L\setminus l})} .$$

Откуда

$$\mu(x)\sum_{y_l} \mu(y_l, x_{\partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l}) = \mu(x_{l\cup\partial l}, z_{L\setminus l\setminus \partial l}) \sum_{y_l} \mu(y_l, x_{L\setminus l}) .$$

Просуммировав последнее равенство по всем $z_{L\setminus\iota\setminus\partial\iota}$, получаем

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_\iota}\mu(y_\iota,x_{L\setminus\iota})}=\frac{\sum\limits_{z_{L\setminus\iota\setminus\partial\iota}}\mu(x_{\iota\cup\partial\iota},z_{L\setminus\iota\setminus\partial\iota})}{\sum\limits_{z_{L\setminus\iota\setminus\partial\iota}}\sum\limits_{y_\iota}\mu(y_\iota,x_{\partial\iota},z_{L\setminus\iota\setminus\partial\iota})},$$

т.е. μ - марковское случайное поле.

Функция $V: Y\to R$ (R - множество действительных чисел), такая, что $\sum\limits_{x\in Y}\exp V(x)<\infty$, $V(x^0)=0$, называется потенциалом. Для любого потенциала V определим гиббсовское состояние $\pi(x)=Z^{-1}(V)\exp V(x)$, где $Z(V)=\sum\limits_{x\in Y}\exp V(x)$.

Введем потенциал возаимодействия $J_V(x)$ для случайного поля с положительной мерой следующим образом:

$$J_V(x)=\sum_{x'\in I}(-1)^{|x-x'|}V(x'),$$

где $|x-x'|$ равен числу точек, в которых x' отличается от x, $I=\{x': x'_\iota=x_\iota$, либо $x^0_\iota\}$.

ЛЕММА 3.

$$V(x)=\sum_{x'\in I}J_V(x').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$J_V(x')=\sum_{x''\in I}(-1)^{|x''-x'|}V(x'').$$

Просуммировав это выражение по всем конфигурациям x': $x'_\iota=x_\iota$, либо x^0_ι, получаем утверждение леммы 3.

Полученная связь между потенциалом $V(x)$ и потенциалом взаимодействия $J_V(x)$ является разновидностью известного принципа включения исключения и называется иногда обращением Мёбиуса.

Носителем конфигурации x называется $A=\mathrm{supp}(x,x^0)=\{\iota: x_\iota\neq x^0_\iota\}$. Потенциал V называется потенциалом ближайшего соседа, если $J_V(x)\neq 0$, тогда и только тогда, когда $A=\mathrm{supp}(x,x^0)$ есть симплекс графа $\bar{L}$.

ЛЕММА 4. Потенциал V на Y является потенциалом ближайшего соседа тогда и только тогда, когда для любого $x\in Y$

и любой пары $l_1, l_2 \in A$, $(l_1, l_2) \notin E$ (E – множество дуг графа $\bar{L}$, A – носитель конфигурации x) выполняется равенство:

$$V(x_{B\cup l_1 \cup l_2}, x^0_{L\setminus A}) - V(x_{B\cup l_1}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1}) - V(x_{B\cup l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_2}) + V(x_B, x^0_{L\setminus B}) = 0, \qquad (1)$$

где $B = A\setminus l_1\setminus l_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив в определение $J_V(x)$ вместо $V(x')$ левую часть условия леммы 4, мы убедимся, что полученное выражение совпадает с $\sum_{x'\in I} (-1)^{|x'-x|} V(x')$, т.е.

$$J_V(x) = \sum_{x'\in I} (-1)^{|x'-x|} [V(x'_A, x_{L\setminus A}) - V(x'_{B\cup l_1}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1}) -$$

$$- V(x'_{B\cup l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_2}) + V(x'_B, x^0_{L\setminus B})] .$$

Если выполняется (I), то $J_V(x) = 0$, когда $\mathrm{supp}(x, x^0)$ не симплекс. Следовательно, $V(x)$-потенциал ближайшего соседа.

Обратно, пусть V – потенциал ближайшего соседа и $\mathrm{supp}(x, x^0)$ не симплекс, тогда $J_V(x) = 0$. Проделав обращение Мёбиуса и использовав определение $J_V(x)$, мы убедимся, что равенство (I) выполнено.

ТЕОРЕМА I. Пусть π – гиббсовское состояние с потенциалом ближайшего соседа V. Тогда π – марковское случайное поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая леммы I,2 достаточно показать, что π является состоянием ближайшего соседа. Так как V – потенциал ближайшего соседа, то $V(x_{B\cup l_1}, y_{l_2}, x^0_{L\setminus l_1\setminus l_2}) - V(x_{B\cup l_1}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1}) -$ $- V(x_B, y_{l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_2}) + V(x_B, x^0_{L\setminus B}) = 0$; $V(x_{B\cup l_1}, x_{l_2}, x^0_{L\setminus l_1\setminus l_2}) -$ $- V(x_{B\cup l_1}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1}) - V(x_B, x_{l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_2}) + V(x_B, x^0_{L\setminus B}) = 0$; $(l_1, l_2) \notin E$.

Из этих равенств следует, что

$$\exp[V(x_{B\cup l_1}, y_{l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1\setminus l_2}) - V(x_{B\cup l_1\cup l_2}, x^0_{L\setminus B\setminus l_1\setminus l_2})] =$$

$$= \exp[V(x_B, y_{1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2}) - V(x_{B\cup 1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})] \quad .$$

Просуммируем по $y_{1_2} \neq x_{1_2}$. Получаем

$$\frac{\exp V(x_{B\cup 1_1\cup 1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_1\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \exp V(x_{1_1}, y_{1_2}, x_B, x^0_{L\backslash B\backslash 1_1\backslash 1_2})} = \frac{\exp V(x_{B\cup 1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} V(y_{1_2}, x_B, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})} \quad .$$

Таким образом (в силу одинаковости нормирующего множителя),

$$\frac{\mu(x_{B\cup 1_1\cup 1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_1\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(x_{1_1\cup B}, y_{1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_1\backslash 1_2})} = \frac{\mu(x_{1_2\cup B}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_B, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})} .$$

Заметим, что левая часть полученного равенства равна

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_{L\backslash 1_2})} ,$$

а в правой части $x_{1_1} = x^0_1$, т.е. точка 1_1 "выпала" из множества A. Повторим все рассуждения, взяв в качестве носителя $A = B\cup 1_2$, а в качестве $B = A\backslash 1_2\backslash 1_3$, $(1_2, 1_3) \notin E$. Получаем

$$\frac{\mu(x_{B\cup 1_2}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_B, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2})} = \frac{\mu(x_{1_2}, x_{B\backslash 1_3}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2\cup 1_3})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_{B\backslash 1_3}, x^0_{L\backslash B\backslash 1_2\cup 1_3})} .$$

Продолжая рассуждения для всех 1_1 таких, что $(1_1, 1_2) \notin E$, через конечное число шагов получим

$$\frac{\mu(x)}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_{L\backslash 1_2})} = \frac{\mu(x_{1_2}, x_{\partial 1_2\cap B}, x^0_{L\backslash (B\cap\partial 1_2)\backslash 1_2})}{\sum\limits_{y_{1_2}\neq x_{1_2}} \mu(y_{1_2}, x_{\partial 1\cap B}, x^0_{L\backslash (B\cap\partial 1)\backslash 1_2})} .$$

Последнее равенство эквивалентно определению состояния ближайшего соседа. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ-марковское случайное поле. Тогда существует единственный (при фиксированной конфигурации x^0) потенциал ближайшего соседа V.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Потенциал единственный, так как он определяется формулой $V(x)=\mathrm{Ln}\,\dfrac{\mu(x)}{\mu(x^0)}$ для всякого $x \in Y$. Используя равенство (I) и определение марковского случайного поля нетрудно убедится, что V – потенциал ближайшего соседа.

3. Состояния ординарных динамических систем

Рассмотрим теперь динамическую систему. Пусть для всякого момента времени t $P_t: Y \times Y \to R$, так что оператор P_t в фиксированный момент времени t задается матрицей вероятностей перехода из одной конфигурации в другую. Семейство операторов $\{P_t\}_{t\ge 0}$ описывает следующую модель: если в момент времени s система имела конфигурацию $y' \in Y$, то вероятность того, что в момент времени $t+s$ она будет иметь конфигурацию $y'' \in Y$ есть $P_t(y',y'')$. Семейство операторов $\{P_t\}_{t\ge 0}$ образует полугруппу и обладает свойствами:

1) $P_t(y',y'')\ge 0$ для всяких $y',y''\in Y,\ t \ge 0$;

2) $\sum\limits_{y''\in Y} P_t(y',y'')=1$ для всякого $y'\in Y,\ t \ge 0$;

3) $\sum\limits_{y'''\in Y} P_t(y',y''')\cdot P_s(y''',y'') = P_{t+s}(y',y'')$ для всяких $s,t\ge 0$;

4) $$\lim_{t\to 0} P_t(y',y'')=I_{\{y'\}}(y'') = \begin{cases} 1, & y'= y'' \\ 0, & y'\ne y'' \end{cases}.$$

Известно, что существует единственная функция $G: Y \times Y \to R$, удовлетворяющая условиям:

I) $G(y',y'') \ge 0,\ \ y' \in Y,\ \ y'' \in Y\backslash y$;

2) $\sum_{y''\in Y} G(y',y'') = 0, \quad y' \in Y;$

3) $P_t = \exp tG = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n$, G^n – произведение матрицы G на себя n раз, $G^0 = I$ – единичная матрица. Оператор G называется генератором полугруппы $\{P_t\}_{t\geq 0}$.

Пусть π – состояние на L. Состояние π называется равновесным состоянием полугруппы $\{P_t\}_{t\geq 0}$, если

$$\sum_{y'\in Y} \pi(y')\cdot P_t(y',y'') = \pi(y''), \quad y''\in Y, \quad t \geq 0.$$

Обычно π называется стационарным распределением вероятностей. Нетрудно убедиться, что состояние π является равновесным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{y'\in Y} \pi(y')\cdot G(y',y'') = 0, \quad y''\in Y.$$

Генератор G называется неприводимым, если для любых $y',y'' \in Y$ существуют $x_1,x_2,\dots,x_n \in Y$ $(n < \infty)$ такие, что $x_1=y'$, $x_n=y''$, $G(x_1,x_2)\cdot G(x_2,x_3)\cdot \ldots \cdot G(x_{n-1},x_n) > 0$. Полугруппа $\{P_t\}_{t\geq 0}$ с неприводимым генератором G называется обратимой, если

$$\pi(y')\cdot G(y',y'') = \pi(y'')\cdot G(y'',y'), \qquad y',y'' \in Y.$$

Далее будем рассматривать только неприводимые генераторы G. Это обеспечит нам положительность меры π на всех конфигурациях и, следовательно, применимость результатов § 2.

Опишем теперь модель, которую можно назвать ординарной системой. Пусть $\xi_l \in \{a_1,a_2,\dots,a_n\} = X$ – некоторые состояния компоненты. Для всякой пары (a,b) состояний определим функции $\beta_{ab}: L\times Y \to R$. Потребуем, чтобы $\beta_{ab}(l,x) > 0$ для любого $x \in Y$. Предположим, что вероятность смены состояния a на состояние b (в точке $l \in L$, в промежутке времени от t до $t+dt$ при условии, что в момент времени t система имеет конфигурацию x) равна $\beta_{ab}(l,x)dt + o(dt)$. Генератор G полугруппы $\{P_t\}_{t\geq 0}$, описывающий эту модель определяется так: $G(y',y'') = \beta_{ab}(l,y')$ для пар $y',y''\in Y$ таких, что $y'_{L\setminus l}=y''_{L\setminus l}$, $y'_l \neq y''_l$; значение $G(y',y'')$ определяется из условия $\sum_{y''\in Y} G(y',y'') = 0$; для всех других пар $y',y''\in Y$ положим $G(y',y'')=0$.

Полугруппу, отвечающую такому генератору, назовем ординарной.

Полугруппу $\{P_t\}_{t\geq 0}$ назовем полугруппой ближайшего соседа, если $\beta_{ab}(1,x) = \beta_{ab}(1,x_{1\cup\partial 1},x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})$, $1\in L$, $x\in Y$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{P_t\}_{t\geq 0}$ – обратимая ординарная полугруппа ближайшего соседа, π – ее равновесное состояние. Тогда π – марковское случайное поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{P_t\}_{t\geq 0}$ обратимая полугруппа ближайшего соседа, то

$$\frac{\pi(y')}{\pi(y'')} = \frac{\pi(y'_{1\cup\partial 1},\ x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})}{\pi(y''_1, y_{\partial 1},\ x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})},$$

где $y''_{L\setminus 1}=y'_{L\setminus 1}$, $y''_1 \neq y'_1$. Просуммировав по всем y'', таким, что $y''_{L\setminus 1}=y'_{L\setminus 1}$, $y''_1 \neq y'_1$, получаем

$$\frac{\pi(y')}{\sum\limits_{y''\neq y'} \pi(y''_1, y'_{L\setminus 1})} = \frac{\pi(y'_{1\cup\partial 1},\ x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})}{\sum\limits_{y''\neq y'} \pi(y''_1, y'_{\partial 1}, x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})},$$

т.е. π – состояние ближайшего соседа, а, следовательно, π – марковское случайное поле.

ТЕОРЕМА 4. Если μ – состояние ближайшего соседа, то ординарная полугруппа с генератором

$$\beta_{ab}(1,y') = \frac{\mu(y'')}{\mu(y')},\quad \beta_{ba}(1,y'')=1,\ y''_{L\setminus 1}=y'_{L\setminus 1},\ y''_1 \neq y'_1,$$

является обратимой полугруппой ближайшего соседа и имеет μ своим равновесным состоянием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\mu(y')\cdot\frac{\mu(y'')}{\mu(y')} = \mu(y'')\cdot 1 .$$

Покажем, что полугруппа с таким генератором имеет μ своим равновесным состоянием.

Очевидно, что

$$\sum_{y'\in Y}\mu(y')\cdot G(y',y'')=\sum_{y'\neq y''}\mu(y')\cdot G(y',y'')+\mu(y'')\cdot G(y'',y'') .$$

Учитывая свойства генератора полугруппы, имеем

$$G(y'',y') = -\sum_{y'\neq y''} G(y'',y') .$$

Умножим обе части на $\mu(y'')$

$$G(y'',y'')\cdot\mu(y'') = -\sum_{y'\neq y''} \mu(y'')\cdot G(y'',y') .$$

Так как $\mu(y'')\cdot G(y'',y') = \mu(y')\cdot G(y',y'')$, то

$$G(y'',y'')\cdot\mu(y'') = -\sum_{y'\neq y''}\mu(y')\cdot G(y',y'') .$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{y'\in Y} \mu(y')\cdot G(y',y'') = 0$, т.е. μ - равновесное состояние полугруппы с генератором G. В силу первого замечания полугруппа $\{P_t\}_{t\geq 0}$ обратима. Покажем, что она является полугруппой ближайшего соседа. Действительно

$$\beta_{ab}(1,y') = \frac{\mu(y'')}{\mu(y')} = \frac{\mu(y''_1 = b/y''_{L\setminus 1})\ \mu(y''_{L\setminus 1})}{\mu(y'_1 = a/y'_{L\setminus 1})\ \mu(y'_{L\setminus 1})} .$$

Так как $y''_{L\setminus 1} = y'_{L\setminus 1}$ и μ - марковское случайное поле $\beta_{ab}(1,y') = \beta_{ab}(1,y'_{\partial 1}, x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1})$; $\beta_{ba}(1,y'') = \beta_{ba}(1,y''_{\partial 1}, x^0_{L\setminus 1\setminus\partial 1}) = 1$ по условию теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что если μ не является состоянием ближайшего соседа, то полугруппа с генератором, указанным в теореме 4, будет обратимой,но не будет являться полугруппой ближайшего соседа. Другими словами, для всякого состояния $\mu>0$ существует обратимая полугруппа, имеющая μ своим равновесным состоянием, но не всегда являющаяся полугруппой ближайшего соседа.

ТЕОРЕМА 5. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *ординарная полугруппа* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *обратима;*

2)

$$\frac{\beta_{ac}(1,y^1)}{\beta_{ca}(1,y^3)} = \frac{\beta_{ab}(1,y^1)}{\beta_{ba}(1,y^2)}\ \frac{\beta_{bc}(1,y^2)}{\beta_{cb}(1,y^3)}, \qquad (2)$$

где $l \in L$; $y^1, y^2, y^3 \in Y$; $y^1_{L\setminus l} = y^2_{L\setminus l} = y^3_{L\setminus l}$; $y^3_l = c$; $y^2_l = b$; $y^1_l = a$ и одновременно

$$\frac{\beta_{ab}(l,y^1)}{\beta_{ba}(l,y^3)} \cdot \frac{\beta_{cd}(l_1,y^4)}{\beta_{dc}(l_1,y^1)} = \frac{\beta_{cd}(l_1,y^2)}{\beta_{dc}(l_1,y^3)} \cdot \frac{\beta_{ab}(l,y^4)}{\beta_{ba}(l,y^2)}, \tag{3}$$

где $l, l_1 \in L$; $y^1, y^2, y^3, y^4 \in Y$; $y^1_{L\setminus l\setminus l_1} = y^2_{L\setminus l\setminus l_1} = y^3_{L\setminus l\setminus l_1} = y^4_{L\setminus l\setminus l_1}$; $y^4_l = a$; $y^4_{l_1} = c$; $y^1_l = a$; $y^1_{l_1} = d$; $y^2_l = b$; $y^2_{l_1} = c$; $y^3_l = b$; $y^3_{l_1} = d$;

3) существует потенциал $V: Y \to R$ такой, что

$$\frac{\beta_{ab}(l,y^2)}{\beta_{ba}(l,y^1)} = \exp[V(y^2) - V(y^1)],$$

где $y^2_{L\setminus l} = y^1_{L\setminus l}$; $y^2_l = b$; $y^1_l = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из условия I) следует условие 2). Из условия обратимости имеем :

$$\frac{\pi(y^3)}{\pi(y^1)} = \frac{\beta_{ac}(L,y^1)}{\beta_{ca}(l,y^3)}; \quad \frac{\pi(y^3)}{\pi(y^2)} = \frac{\beta_{bc}(l,y^2)}{\beta_{cb}(l,y^3)}; \quad \frac{\pi(y^2)}{\pi(y^1)} = \frac{\beta_{ab}(l,y^1)}{\beta_{ba}(l,y^2)},$$

где $y^1_{L\setminus l} = y^2_{L\setminus l} = y^3_{L\setminus l}$; $y^1_l = a$; $y^2_l = b$; $y^3_l = c$.

Отсюда

$$\frac{\pi(y^3)}{\pi(y^1)} = \frac{\beta_{bc}(l,y^2)}{\beta_{cb}(l,y^3)} \cdot \frac{\beta_{ab}(l,y^1)}{\beta_{ba}(l,y^2)} = \frac{\beta_{ac}(l,y^1)}{\beta_{ca}(l,y^3)},$$

т.е. равенство (2) выполнено.

Пусть теперь $y^1_{L\setminus l\setminus l_1} = y^2_{L\setminus l\setminus l_1} = y^3_{L\setminus l\setminus l_1} = y^4_{L\setminus l\setminus l_1}$; $y^4_l = a$; $y^4_{l_1} = c$; $y^1_l = a$; $y^1_{l_1} = d$; $y^2_l = b$; $y^2_{l_1} = c$; $y^3_l = b$; $y^3_{l_1} = d$. Из условия обратимости:

$$\frac{\pi(y^3)}{\pi(y^1)} = \frac{\beta_{ab}(l,y^1)}{\beta_{ba}(l,y^3)}; \quad \frac{\pi(y^1)}{\pi(y^4)} = \frac{\beta_{cd}(l_1,y^4)}{\beta_{dc}(l_1,y^1)};$$

$$\frac{\pi(y^3)}{\pi(y^2)}=\frac{\beta_{cd}(1_1,y^2)}{\beta_{dc}(1_1,y^3)};\quad \frac{\pi(y^2)}{\pi(y^4)}=\frac{\beta_{ab}(1,y^4)}{\beta_{ba}(1,y^2)}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi(y^3)}{\pi(y^4)}=\frac{\beta_{ab}(1,y^1)}{\beta_{ba}(1,y^3)}\cdot\frac{\beta_{cd}(1_1,y^4)}{\beta_{dc}(1,y^1)}=\frac{\beta_{cd}(1_1,y^2)}{\beta_{dc}(1_1,y^3)}\cdot\frac{\beta_{ab}(1,y^4)}{\beta_{ba}(1,y^2)},$$

т.е. равенство (3) выполнено.

Покажем, что из условия 2) следует условие 3). Потенциал $V(y)$ будем определять индукцией по y. По определению $V(x^0) = 0$. Положим

$$V(y^2) = V(y^1)+\ln\frac{\beta_{ab}(1,y^1)}{\beta_{ba}(1,y^2)},\quad y^2_{L\setminus 1} = y^1_{L\setminus 1};\quad y^2_1 = b;\quad y^1_1 = a.$$

Равенства (2) и (3) обеспечивают однозначность задания потенциала при фиксированной конфигурации x^0. Из задания потенциала следует, что

$$\frac{\beta_{ab}(1,y^1)}{\beta_{ba}(1,y^2)}= \exp[V(y^2)-V(y^1)],\ y^2_{L\setminus 1} = y^1_{L\setminus 1};\ y^2_1 = b;\ y^1_1 = a.$$

Наконец покажем, что из условия 3 следует условие I. Пусть μ – гиббсовское состояние с потенциалом V. Тогда, если $y^2_{L\setminus 1} = y^1_{L\setminus 1}$; $y^2_1=b$; $y^1_1 = a$, из задания потенциала следует:

$$\frac{\mu(y^2)}{\mu(y^1)}=\frac{\beta_{ab}(1\ y^1)}{\beta_{ba}(1\ y^2)}.$$

Следовательно $\mu(y^1)\cdot G(y^1,y^2) = \mu(y^2)\cdot G(y^2,y^1)$.

Если $y^2_{L\setminus 1} \neq y^1_{L\setminus 1}$, то $G(y^1,y^2) = G(y^2,y^1)= 0$. Таким образом полугруппа $\{P_t\}_{t\geq 0}$ обратима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\{P_t\}_{t\geq 0}$ обратимая ординарная полугруппа ближайшего соседа, то V – потенциал ближайшего соседа. В этом можно убедиться, проверив выполнение условий леммы 4.

4. Надежность однородных вычислительных систем

4.1. Рассмотрим систему из N элементарных машин (ЭМ), каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: исправном 0 и неисправном 1, т.е. $\xi_1 \in \{0,1\}$. Из 0 в 1 переход осуществляется с интенсивностью β, из 1 в 0 с интенсивностью δ. Будем обозначать конфигурацию так: A обозначает, что на множестве A элементарные машины находятся в состоянии 1, а на $L \setminus A$ – в состоянии 0. Генератор полугруппы, описывающий эту модель, выглядит следующим образом: $G(A, A \cup 1) = \beta(1) = \beta$, $G(A \cup L, A) = \delta(1) = \delta$. Так как мы считаем интенсивности перехода одинаковыми для всех ЭМ, то $V(x) = \ln\frac{\beta}{\delta}$; $V(x \cup y) = 2\ln\frac{\beta}{\delta}$; $V(A) = |A|\ln\frac{\beta}{\delta}$, где $|A|$ – количество неисправных ЭМ. Пусть $\gamma = \frac{\beta}{\delta}$. Посчитаем нормирующий множитель

$$Z(V) = \sum_{A \subset L} \exp V(A) = \sum_{A \subset L} \gamma^{|A|} = (1+\gamma)^N .$$

Вероятность того, что в точках множества A элементарные машины неисправны, а в остальных вершинах графа $\bar{L}$ исправны, равна

$$\mu(A) = \frac{\exp[\,|A|\ln\gamma\,]}{(1+\gamma)^N} = \frac{\gamma^{|A|}}{(1+\gamma)^N} = \frac{\delta^{N-|A|}\cdot\beta^{|A|}}{(\delta+\beta)^N} .$$

Вероятность того, что $|A|$ элементарных машин неисправно равно

$$\mu_1(|A|) = C_N^{|A|}\,\frac{\beta^{|A|}\cdot\delta^{N-|A|}}{(\delta+\beta)^N} .$$

4.2. Пусть по-прежнему $\xi_1 \in \{0,1\}$, но интенсивности перехода β и δ зависят от состояний соседних ЭМ следующим образом: пусть n – количество соседей отдельной ЭМ, k – количество неисправных соседей, тогда

$$\beta = \begin{cases} \beta, & k < n \\ \beta_c, & k = n \end{cases}; \qquad \delta = \begin{cases} \delta, & k < n \\ \delta_b, & k = n \end{cases} .$$

Пусть (L, E) – кольцевая структура с циклической группой автоморфизмов. Состояния системы, получающиеся друг из друга путем циклических перестановок, объединим в один класс и будем называть фактор-состоянием системы. Так как система однородна, то все состояния,

$$000 \underset{\delta}{\overset{3\beta}{\rightleftarrows}} 001 \underset{2\delta}{\overset{2\beta}{\rightleftarrows}} 011 \underset{3\delta_b}{\overset{\beta_c}{\rightleftarrows}} 111$$

Рис.1.

входящие в фактор-состояние, можно считать равновероятными и работать не с состояниями системы, а с фактор-состояниями.

Пусть $N = 3$, $n = 2$. Граф фактор-состояний такой системы изображен на рис.I. Исследуем систему на обратимость. В случае $\xi_1 \in \{0,1\}$ и $N = 3$ в обозначениях п.4.I условие обратимости примет вид

$$\frac{\beta(1,x\cup y)}{\delta(1,x\cup y)}\cdot\frac{\beta(y,x)}{\delta(y,x)} = \frac{\beta(y,x\cup 1)}{\delta(y,x\cup 1)}\cdot\frac{\beta(1,x)}{\delta(1,x)},$$

где $x,y,1$ – вершины кольцевой структуры (L,E), $N=|L|=3$. Подставив значения интенсивностей перехода, мы убедимся, что система обратима. Следовательно, мы можем однозначно определить потенциал для каждого фактор-состояния. Положим $V(000) = 0$, тогда

$$V(001) = \ln\frac{3\beta}{\delta};\ V(011) = \ln\frac{3\beta^2}{\delta^2};\ V(111) = \ln\frac{\beta^2}{\delta^2}\frac{\beta_c}{\delta_D},\ Z(V) = \sum_{x\in Y}\exp V(x).$$

Теперь мы можем записать вероятности фактор-состояний в виде $P(x) = \dfrac{\exp V(x)}{Z(V)}$. Зная вероятности фактор-состояний можно посчитать P_0 – вероятность того, что ЭМ находится в состоянии 0 и P_1 – вероятность нахождения ее в состоянии 1. Учитывая, что мы работаем с фактор-состояниями, имеем

$$P_0 = P(000)+\frac{2}{3}P(001)+\frac{1}{3}P(011);\quad P_1 = \frac{1}{3}P(001)+\frac{2}{3}P(011)+P(111).$$

4.3. Пусть ЭМ имеет конечное число состояний, т.е. $\xi_1 \in \{a_1,\ldots,a_n\}$. ЭМ меняют свои состояния с интенсивностями, зависящими от состояний соседей. В состояние неисправности a_1 ЭМ переходят независимо друг от друга. Вероятность неисправности ЭМ равна P_H. Предположим, что система обратима. Тогда по теореме 5 можно вычислить потенциал $V(y)$ любой конфигурации y. Так как ЭМ выходят из строя независимо друг от друга, то $\pi(x^0) = P_H^N$, где N – количество ЭМ в системе, $x_1^0 = a_1$. Но $V(x^0) = 0$ и, следовательно, $\pi(x^0) = 1/Z$, $Z = 1/P_H^N$. Тогда вероятность любой конфигурации y в стационарном режиме равна

$$\pi(y) = \frac{\exp V(y)}{P_H^N}.$$

Теорема 5 позволяет вычислять вероятности состояний обратимых систем, не решая уравнений Колмогорова-Чэпмена, а пользуясь рекурентной формулой для потенциала. При использовании рекурентной формулы мы должны перебрать все конфигурации системы. Это можно сделать с помощью современных ЭВМ. Решить же соответствующую систему уравнений практически невозможно.

4.4. Дадим приближенную формулу для коэффициента готовности [I] системы, в которой каждая элементарная машина функционирует так же, как описанные выше, но количество ЭМ произвольно, т.е. произвольно количество вершин графа $\bar{L}=(L,E)$.

Функционирование такой системы выглядит следующим образом.

Элементарные машины отказывают независимо друг от друга, но если все соседи некоторого элемента отказали, то и сам этот элемент теряет связь с системой в целом и может считаться неисправным в этом смысле. Кроме того при самодиагностике системы элементы считаются исправными, если они удовлетворяют тестам взаимопроверки. Изолированный элемент не может удовлетворять таким тестам, так как все его соседи отказали и, следовательно, автоматически считается неисправным.

Будем рассматривать вероятностное пространство (Y,F,P), где $Y=X^{|L|}$; $X=\{0,1\}$; $|L|=N$; P – вероятностная мера на F. Договоримся обозначать через $(1_l, k_{\partial l}, x_{L\setminus l\setminus \partial l})$ такое состояние системы, что в точке $l\in L$ элемент неисправен, т.е. $\xi_l=1$; в окрестности вершины l имеется k неисправных элементов, а на $L\setminus l\setminus \partial l$ состояния элементов произвольны. Аналогично будем понимать обозначение $(0_l, k_{\partial l}, x_{L\setminus l\setminus \partial l})$.

Сделаем следующие предположения относительно вероятностной меры P:

1) $P(1_l/k_{\partial l}, x_{L\setminus l\setminus \partial l}) = P(1_l/k_{\partial l})$;

$P(0_l/k_{\partial l}, x_{L\setminus l\setminus \partial l}) = P(0_l/k_{\partial l})$, $k\geq 0$.

2) $P(1_l/k_{\partial l}) = const_1$, $k>0$;

$P(1_l/k_{\partial l}) = const_2$, $k=0$.

3) $P(0_{\partial l}/1_l) = [P(0_l/1_{\partial l})]^n$.

Вероятность P_1 нахождения элементарной машины в состоянии 1 записывается следующим образом:

$$P_1 = \sum_{x_{L\setminus l\setminus \partial l}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, P(1_l, k_{\partial l}, x_{L\setminus l\setminus \partial l}).$$

Используя предположения I и 2, получим $P_1 = P(1_l/k_{\partial l}) + P(0_{\partial l})\,\Delta P$, где $\Delta P = P(1_l/0_{\partial l}) - P(1_l/k_{\partial l})$.

Учитывая предположение 3, имеем

$$P(0_{\partial l}) = \frac{P_1\,[P(0_l/k_{\partial l})]^n}{1 - P(0_l/0_{\partial l})}.$$

Тогда

$$P_1 = \frac{P(1_l/k_{\partial l})\cdot P(1_l/0_{\partial l})}{P(1_l/0_{\partial l}) - \Delta P\,[1-P(1_l/k_{\partial l})]^n},$$

где n – количество соседей точки $l \in L$.

Для обратимых систем всегда выполняется предположение I. Кроме того, для обратимых систем является правомерным вычисление условных вероятностей, как вероятностей состояний элемента при фиксированной окрестности [5]. Учитывая последнее, можно сказать, что предположение 2 строго выполняется для рассматриваемой модели в обратимом случае. Предположение 3 выполняется для систем, удовлетворяющих предположениям I,2 и таких, что элементы окрестности отдельной ЭМ не являются соседями (такое возможно, например, на решетке). В общем случае описанная выше система не является обратимой, поэтому мы получим лишь приближенную формулу для коэффициента готовности. Итак, вычислим условные вероятности для каждой фиксированной окрестности и подставим их в выражение для P_1. Получим

$$P_1 = \frac{(a+1)^n}{(a+1)^{n+1} - a^n(a-b)},$$

где

$$b = \frac{\beta_c}{\delta_в}; \qquad a = \frac{\beta}{\delta}.$$

При $a = b$ имеем коэффициент готовности $P_0 = 1 - P_1 = \frac{\beta}{\beta+\delta}$, что совпадает с выражением для коэффициента готовности в независимом случае [I]. Рассмотрим, при каких значениях интенсивностей перехода

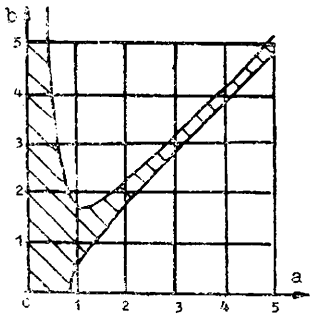

Рис.2.

отклонение коэффициента готовности, вычисленного с учетом зависимости между элементарными машинами, от коэффициента готовности для системы независимых машин мало. Пусть P_1' – коэффициент готовности в системе независимых элементарных машин. Тогда имеем

$$|P_1'-P_1| = \left| P_1 \cdot \frac{a^n(b-a)}{(a+1)^{n+1}} \right|.$$

Пусть k – относительная ошибка, $0 \le k < 1$.

При

$$a\left[1-\left(1+\frac{1}{a}\right)^{n+1}\cdot k\right] \le b \le a\left[\left(1+\frac{1}{a}\right)^{n+1}\cdot k+1\right]$$

учет межмашинных связей дает поправку не более $100\cdot k\%$. Для $k = 0{,}01$ и $n = 5$ область изменения b изображена на рис.2 (заштрихованная часть).

5. Заключение

Рассмотрена модель ОВС, учитывающая зависимость поведения ЭМ от состояний соседних машин. Для обратимых систем с положительными интенсивностями перехода показано, как вычислять вероятности конфигураций. Показано, что равновесные состояния полугрупп ближайшего соседа являются марковскими случайными полями. Приведена формула для подсчета коэффициента готовности элементарной машины с учетом зависимости между компонентами системы.

В заключение автор благодарит Ю.К. Устинова и В.А. Воробьёва за руководство данной работой.

Литература

1. ЕВРЕИНОВ Э.В., Хорошевский В.Г. Однородные вычислительные системы.– Новосибирск: Наука,1978. – 315 с.

2. ВОРОБЬЁВ В.А. О содержании теории однородных вычислительных систем.– В кн.: XXIУ областная научно-техническая конференция, посвященная Дню радио. Тезисы докл.Новосибирск,1981,с.67–68.

3. ПРЕСТОН К. Гиббсовские состояния на счетных множествах.– М.: Мир,1977.– 125 с.

4. АВЕРИНЦЕВ М.Б. Гиббсовское описание случайных полей, условные вероятности которых могут обращаться в нуль. - Проблемы передачи информации, 1975, т.XI, вып.4, с.86-96.

5. SPITZER F. Random time evolution of infinite particle systems.- Advances in Matematics, 1975, v.16, N 2, p.139-143.

Поступила в ред.-изд.отд.
1 июня 1982 года