МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВС ИЗ МИКРО-ЭВМ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 96

УДК 519.681.2+510.64

ЗАМЕЧАНИЯ О КОНСТРУКТИВНЫХ ИМПЛИКАТИВНЫХ ЛОГИКАХ

Н.Н. Непейвода

При логическом подходе процесс построения искусственного объекта рассматривается как процесс поиска доказательства теоремы [1,2]. Так как принципиальную роль при этом играет согласованность средств и обстановки, в которой они применяются,то возникает задача выбора конкретной конструктивной логики. В такой логике структура создаваемого объекта должна соответствовать структуре доказательства, из которого извлекается построение (это - главный критерий конструктивности логики). Кроме этого,согласно определению логики как науки о формах правильных рассуждений, структура доказательства должна соответствовать структуре наших рассуждений при построении объекта (условие адекватности логики).

Выбор наиболее подходящей логики из обширного класса возможных конструктивных логик тем более затруднителен,что подобные задачи ранее практически не решались. Традиционно пользовались общепринятой классической логикой: вопрос о ее применимости в данной конкретной ситуации, как правило,даже не ставился. Иногда использовалась какая-либо другая из известных логик: например, интуиционистская. Здесь обоснования обычно присутствовали, но задача выбора логики,как правило, уже была решена заранее и обосновывалась лишь применимость выбранной логики и ее преимущество лишь перед тривиальным решением - использованием классической логики.

Здесь мы демонстрируем некоторые возможности,возникающие при варьировании логик, и некоторые критерии выбора подходящей логики из класса возможных. Такую нетрадиционную задачу естественно вначале исследовать на каких-либо простейших моделях, не стесняясь того, что в отдельных случаях это может создавать впечатление слабости создаваемого аппарата. ("Неясно, зачем столько возни вокруг таких простых задач, когда сложные надо решать".)

В качестве такой модели рассматривается класс простейших конструктивных логик - логик, в которых есть всего одна конструктивная связка $\to$ (импликация). Более того, итерирование этой связки недопустимо. Простота рассматриваемого класса логик позволяет ясно продемонстрировать многие тонкие вопросы, принципиальные и для более сложных логик, но зачастую затемняемые в них техническими сложностями. Это позволяет осознать, что хороший выбор конструктивной логики для некоторого класса задач - проблема сложная и многоаспектная. В частности, всплывают такие проблемы, как соотношение формализаций, объем доказуемых формул в которых один и тот же; место традиционной семантики формул как булевозначных выражений; структура доказательств как характеристика логики.

На нашей модели демонстрируется роль многих решений, особенно важных при работе со сложными задачами. Да и осознать саму необходимость выбора одного из многих инструментов там, где традиционно применялся лишь один, можно было лишь на опыте одновременной работы и со сложными практическими задачами, и с теорией на самом высоком уровне.

Сейчас лишь десятки человек в мире владеют нужным теоретическим аппаратом (конструктивной логикой в широком смысле этого слова), и большинство из них - чистые теоретики. Конструктивные логики создавались именно ими и в чисто теоретических целях. Поэтому даже если содержание некоторой теории полностью отвечает существу рассматриваемых практических задач (да и это - редкость), форма все равно неадекватна, поскольку она была приспособлена лишь для теоретического изучения множества доказуемых формул или, в лучшем случае, для некоторых преобразований доказательств. Поэтому, хотя уже и становится ясно, что аппарат конструктивных логик нужен для решения многих задач, в частности, для автоматизации программирования, использование его без довольно существенных модификаций нецелесообразно. Часто из-за этого возникают эффекты неадекватного использования аппарата (микроскопом забивают гвозди и при этом обижаются, что он для этого неудобен; см., например, [3]) и даже ошибки.

Некоторые пути требуемых модификаций теоретических определений показаны в данной статье; вариации структур доказательств в импликативной логике обобщаются на все известные сейчас автору конструктивные логики.

§I. Естественный вывод.
Четыре вопроса о структуре доказательств

В импликативных логиках из доказательства извлекается программа (план действий, система), представляющая собой линейную композицию подпрограмм (элементарных действий, элементов). Каждый элемент из данного нам набора исходных имеет один вход и один выход. Такие композиции дают программы и схемы вида:

$$\underline{\text{begin}}\ f1\,;\, f_2\,;\ldots;\ fn\ \underline{\text{end}}, \tag{1}$$

$$\rightarrow \boxed{f1} \rightarrow \boxed{f2} \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{fn} \rightarrow . \tag{2}$$

Элемент правильно работает, если он дает на выходе те данные, которые мы от него ожидаем. Это возможно лишь при условии, что на входе он получает данные требуемого вида. Иными словами, элемент описывается как триада

$$A \xrightarrow{f} B, \tag{3}$$

где A - условие на вход (предусловие,посылка или просто условие), B - на получающиеся результаты (постусловие,заключение,обещание), f - имя элемента. В этом представлении четко разграничиваются цель,представленная исходным (A) и конечным (B) состояниями, и средства, способ ее достижения (f) . Если имеется набор функций, описанных триадами, то f можно определить по A и B . Таким образом, оказывается возможным для целей конструирования временно отделить и упрятать в тень алгоритмическую информацию, чтобы она не провоцировала нас слишком рано принимать конкретные решения, и представлять триаду (3) конструктивной импликацией

$$A \twoheadrightarrow B, \tag{4}$$

где A - условие (посылка), B - обещание (заключение). Импликация означает, что имеется способ преобразовать условие в обещание имеющимися у нас средствами. В отличие от классической импликации, (4) можно читать "A преобразуется в B", "из A можно получить B". Представление триад через конструктивные импликации является одним из частных случаев принципа неявности из [I].

Для построения композиций вида (I),(2) нужно уяснить себе условие A и цель B и подобрать совокупность элементов $A_0 \twoheadrightarrow A_1$, $A_1 \twoheadrightarrow A_2,\ldots,A_{n-1} \twoheadrightarrow A_n$, таких, что $A = A_0$, $B = A_n$. Представляя такой переход от A к B в виде доказательства в некоторой теории, получаем следующую схему.

Требуется доказать: $A_0 \Rightarrow A_n$.

Исходные операции: произвольный список импликаций, содержащий, в частности, $A_0 \Rightarrow A_1, \dots, A_{n-1} \Rightarrow A_n$.

Доказательство:

$A_0 \Rightarrow A_1 \qquad A_1 \Rightarrow A_2 \qquad\qquad\qquad A_{n-1} \Rightarrow A_n$

Дано: $A_0 \to A_1 \to A_2 \to \dots \qquad A_{n-1} \to$ Результат: A_n (5)

Доказано: $A_0 \Rightarrow A$.

Здесь используются следующие аналогии: каждой аксиоме соответствует исходная функция, применению функции - применение правила вывода, промежуточные утверждения A_i - промежуточным состояниям программы.

Анализируя схему доказательства (5), видим, что переход от A_0 к A_n происходил путем применения правила, известного в традиционной логике под именем modus ponens, или правила извлечения следствий:

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B,}{B} \tag{6}$$

$A \Rightarrow B$ называется главной посылкой правила, A - малой посылкой, B - результатом, или заключением, правила. При конструктивном истолковании это правило соответствует применению операции, описанной $A \Rightarrow B$, в состоянии, где выполнено ее условие B.

Доказательство (5) состоит из предположения о выполнимости условия создаваемой процедуры (т.е. A) и последовательности правил извлечения следствий, которые преобразуют A в B. Основная часть доказательства - промежуток от A до B - называется вспомогательным выводом. Слово "вспомогательный" является традиционным логическим термином, не несущим оттенка второстепенности; оно означает лишь то, что в этом промежутке мы опираемся не только на аксиомы теории, но и на предположение, или допущение, A.

Успешный переход от условия A к обещанию B дает возможность реализовать $A \Rightarrow B$, т.е. построить программу для перехода от A к B. Это наблюдение фиксируется в форме еще одного традиционного правила вывода: правила дедукции

$$\frac{]A \; \dots \; B}{A \Rightarrow B} \,. \tag{7}$$

Здесь] обозначает допущение, черта помечает вспомогательный вывод, многоточие означает, что в этом промежутке может быть сколь угодно длинная последовательность утверждений. Заметим, что на заключение правила дедукции $A \Rightarrow B$ черта уже не продолжается. Посылкой же правила служит весь вспомогательный вывод. Такие правила, когда при выводе заключения опираются на целое вспомогательное рассуждение, а не на отдельные формулы, называются правилами косвенного заключения.

Правила (6) и (7) взяты из системы правил естественного вывода (см., например, [4]). Первоначально эта система была создана для того, чтобы дать формализацию вывода, лучше согласующуюся с методами рассуждений человека, чем, например, гильбертовская система. Характеристическое свойство таких систем - возможность делать в выводе допущения и пользоваться ими внутри вспомогательных выводов, что требует правил косвенного заключения.

Общие определения доказательства и вспомогательного вывода в некоторой системе естественного вывода можно задать одновременным индуктивным определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Д о к а з а т е л ь с т в о - это последовательность формул и вспомогательных выводов, такая, что каждая формула в ней является следствием из аксиом теории и ранее встретившихся формул либо вспомогательных выводов по одному из правил вывода. В с п о м о г а т е л ь н ы й в ы в о д - последовательность такого же вида, первым членом которой может являться произвольная формула, помеченная знаком $]$ - д о п у щ е н и е вспомогательного вывода.

Дадим теперь традиционные логические определения теории и сигнатуры, преобразованные в форму, удобную для наших целей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. С и г н а т у р а - конечное множество символов элементарных предикатов. Ф о р м у л а - выражение вида A или $A \Rightarrow B$, где A, B - элементарные предикаты. Т е о р и я - конечное множество импликаций данной сигнатуры, т.е. формул вида $A \Rightarrow B$. Эти формулы называются а к с и о м а м и.

Заметим, что, согласно этим определениям, количество формул данной сигнатуры конечно.

ПРИМЕР I. Пусть сигнатура S_0 состоит из элементарных предикатов $\{A_1, A_2, \ldots, A_9\}$. Пусть задана теория T_0 с аксиомами

$$\begin{array}{lll|} A_1 \Rightarrow A_3 & A_1 \Rightarrow A_4 & \\ A_2 \Rightarrow A_4 & A_2 \Rightarrow A_5 & A_2 \Rightarrow A_7 \\ A_3 \Rightarrow A_1 & A_3 \Rightarrow A_2 & A_3 \Rightarrow A_8 \\ & & \vdots \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} A_4 \Rightarrow A_6 & A_4 \Rightarrow A_6 & \\ A_5 \Rightarrow A_6 & A_5 \Rightarrow A_8 & A_5 \Rightarrow A_9 \\ A_6 \Rightarrow A_8 & A_6 \Rightarrow A_6 & \\ A_7 \Rightarrow A_9 & & \\ A_8 \Rightarrow A_1 & A_8 \Rightarrow A_4 & A_8 \Rightarrow A_6 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Содержательно аксиома $A_i \Rightarrow A_j$ интерпретируется как описание операции f_{ij}, применимой, если выполнено A_i, и приводящей к состоянию, удовлетворяющему A_j.

В теории (8) имеется несколько доказательств $A_1 \Rightarrow A_9$. Каждому из них соответствует композиция функций f_{ij}, реализующая переход от A_1 к A_9. Приведем три доказательства (аксиомы T_0, применяемые в конце доказательства, опускаем, так как они однозначно определяются из контекста):

$$\rceil\, \underline{A_1\ A_3\ A_2\ A_7\ A_9} \quad A_1 \Rightarrow A_9 \tag{9}$$

$$\rceil\, \underline{A_1\ A_3\ A_2\ A_4\ A_6\ A_8\ A_1\ A_3\ A_2\ A_5\ A_9} \quad A_1 \Rightarrow A_9 \tag{10}$$

$$\rceil\, \underline{A_1\ A_3\ A_2\ A_5\ A_9} \quad A_1 \Rightarrow A_9 \tag{11}$$

Программы, извлекаемые из доказательств (9)-(II), имеют вид:

<u>begin</u> f13; f32; f27; f79 <u>end</u>,

<u>begin</u> f13; f32; f24; f46; f68; f81; f13; f32; f25; f59 <u>end</u>,

<u>begin</u> f13; f32; f25; f59 <u>end</u>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Теорема формальной теории T сигнатуры S есть формула сигнатуры S, встречающаяся в качестве конечной формулы некоторого доказательства теории T. Итак, понятие теоремы существенно зависит от используемой логики, т.е. системы правил вывода. Отметим одну теорему, которую можно доказать без использования аксиом.

ТЕОРЕМА покоя. Если A – элементарный предикат, то $A \Rightarrow A$ – теорема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\rceil\, \underline{A\ A} \quad A \Rightarrow A. \tag{12}$$

Любая логическая система требует определения класса интерпретаций, которым она соответствует. Для задания интерпретации необходимо проинтерпретировать все понятия, встречающиеся в заданной сигнатуре, и дать правила определения (не обязательно эффективного) интерпретаций сложных формул и других сложных понятий, которые могут быть построены в данном языке из элементарных понятий заданной сигнатуры. Для наших конструктивных логик мы будем стремиться рассматривать такие интерпретации, где импликации будут требовать композиций некоторых объектов. Если требуемая композиция будет существовать, импликация будет считаться реализуемой. Для элементарных же предикатов мы будем задавать просто интерпретации и даже не будем никогда про них говорить, что они истинны или реализуемы.

Правила логики после задания класса интерпретаций задают некоторые преобразования интерпретаций формул. Эти преобразования должны быть приемлемы при любой интерпретации из рассматриваемого нами класса. Если некоторый логический переход ведет к недопустимому преобразованию значений хотя бы в отдельных случаях, его уже нельзя брать в качестве логического правила. Это не снижает общности наших рассмотрений: если данный переход возможен в данном конкретном случае, он выражается при помощи аксиом используемой нами теории.

Исследуя различные интерпретации нашей импликативной логики, мы увидим, что разные объекты накладывают различные ограничения на структуру композиций и соответственно на структуру доказательств. Этот анализ интерпретаций будет нами проделан в следующем параграфе. Однако те вопросы, которые возникают после анализа, так же естественно возникают и при непредвзятом взгляде на само наше понятие доказательства. Выделим четыре из них.

1) При доказательстве теоремы покоя (12) мы повторили допущение еще раз, уже как результат. Допустимо ли такое повторение одного и того же утверждения? Или же его лучше постулировать там, где он нужен, в виде, например, $A_6 \Rightarrow A_6$ из системы аксиом T_0 ?

2) Можно ли использовать любой ранее доказанный результат или лишь непосредственно предшествующий? В логике обычно считается, что можно использовать только непосредственно предшествующий вспомогательный вывод, но используя при этом любую ранее доказанную теорему.

3) Можно ли повторно использовать формулы (в частности, аксиомы), уже использованные ранее? Этой возможностью мы, в частности,

воспользовались во втором из доказательств (9), где мы зашли в тупик A_8 и вернулись в A_1, повторно пройдя затем A_3 и A_2.

4) И наконец, вопрос о глобальной перестройке всей структуры доказательства. Если рассматривать процесс поиска решения как формулировку проблемного противоречия (противоречия между тем, что имеется, и тем, что должно быть) $A \Rightarrow B$ и затем его сведение к тривиальным противоречиям, которые у нас известно, как решать, то возникает следующее правило вывода, известное в логике под названием правила силлогизма:

$$\begin{tikzcd} A \Rightarrow B \arrow[dr] & & B \Rightarrow C \arrow[dl] \\ & A \Rightarrow C & \end{tikzcd} \tag{13}$$

Естественно возникает вопрос, а нельзя ли упростить структуру доказательства, обходясь без вспомогательных выводов и пользуясь лишь правилом силлогизма?

§2. Интерпретация конструктивных теорий и логики $\Rightarrow_{ijk}$

Здесь мы рассмотрим семейство логик, появляющихся в результате различных ответов на первые три вопроса. Теоретически таких логик может быть восемь, т.е. вопросы формально логически независимы. Получающиеся логики мы будем обозначать $\Rightarrow_{000}$, $\Rightarrow_{001}, \ldots, \Rightarrow_{111}$, в зависимости от того, отрицательно или положительно мы отвечаем на первые три вопроса. Например, $\Rightarrow_{010}$ означает, что у нас нет возможности дублировать утверждение, можно использовать не только непосредственно предшествующий, но и любой полученный ранее результат, нельзя повторно использовать уже использованные ранее формулы.

Проинтерпретируем некоторые из этих логик.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ I. Операции над миром. Пусть наши операции интерпретируются как приказ некоторому механизму совершить действие, изменяющее либо состояние самого механизма (например, "переписать ленту I на диск 2"), либо внешний мир (например, "выкопать яму"), либо и то, и другое. Тогда мы приходим к логике $\Rightarrow_{001}$ либо $\Rightarrow_{101}$ (к какой именно, требует дополнительного рассмотрения), поскольку результаты, которые появлялись ранее, использовать уже нельзя, так как действие механизма может изменить состояние мира или машины существенно и необратимо. При необходимости одно и то же действие можно повторить несколько раз, если есть условия для его применения. А вот верна ли теорема покоя, зависит от того, есть ли у нас в распоряжении действие, ничего не изменяющее, т.е. может ли наш робот бездействовать. Если у нас какие-либо условия зависят от времени, то бездействие уже невозможно: делаем мы что-нибудь или нет, состояние мира непрерывно изменяется. Если же мы рассматриваем внешний мир нашего робота как абсолютно пассивный, изменяемый лишь нашими действиями, то мы можем принять теорему покоя.

Эта рассмотренная нами интерпретация не была строгой. Дадим ее естественное математическое уточнение.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 2. Функции над состояниями. Пусть S - множество состояний системы (мир, робот). Текущее состояние системы есть $s \in S$, действие - функция $f\colon S \to S$, т.е. изменение состояния, элементарные предикаты интерпретируются как подмножества S, т.е. как одноместные отношения. Функция f реализует $A \Rightarrow B$, если $f\langle I(A)\rangle \subseteq I(B)$. Здесь I- функция, сопоставляющая каждому предикату его интерпретацию. Итак, f реализует $A \Rightarrow B$, если f переводит любое состояние $s \in I(A)$ в состояние $f(s) \in I(B)$.

Фиксируем некоторый класс функций θ, удовлетворяющий условию: вместе с любыми двумя функциями $f, g \in \theta$ он содержит и их композицию $\varphi(s) = f(g(s))$.

Этому классу интерпретаций соответствует логика $\Rightarrow_{001}$, в которой теорема покоя не принимается в качестве логического принципа.

ЛЕММА I. Формула $\mathfrak{A}$ выводима в логике $\Rightarrow_{001}$ из аксиом теории T, если в любой интерпретации, в которой реализуемы все аксиомы теории T, реализуема и $\mathfrak{A}$. И, наоборот, если формула реализуема во всех моделях (т.е. интерпретациях, в которых реализуемы все аксиомы) теории T, то она выводима в T при помощи логики $\Rightarrow_{001}$.

Утверждения, подобные лемме I, в математической логике называются теоремой полноты. Доказывать математические утверждения, встречающиеся в данной статье, мы не будем, так как это делается известными методами.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 3. Функции, включающие тождественную. Наложим на класс θ из интерпретации 2 еще одно условие: он должен содержать тождественную функцию $e(s) = s$. Тогда будет справедлива теорема полноты для этого класса интерпретаций и логики $\Rightarrow_{101}$, в которой имеет место теорема покоя.

Из этого рассмотрения видно, что чисто математическая переформулировка интерпретации I, хотя и позволяет доказывать точные утверждения и четко провести грань между логиками $\Rightarrow_{001}$ и $\Rightarrow_{101}$, скрывает от нас наиболее важное с содержательной точки зрения различие между ними: то, что одну из них целесообразно применять в статическом, а другую - в динамическом мире. Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что $A \Rightarrow A$ выражает статичность мира.

ПРИМЕР 2. Казалось бы, что логика $\Rightarrow_{001}$ слабее логики $\Rightarrow_{101}$, так как она позволяет доказать меньшее число теорем. Однако на самом деле это ослабление открывает перед нами новые возможности. К примеру, в логике $\Rightarrow_{001}$ можно поставить задачу построения бесконечного циклического процесса, описав один его цикл. Построим в системе аксиом (8) процесс $A_1 \Rightarrow A_1$:

$$
\begin{array}{l}
]\,A_1 \\
\quad|\; A_4 \\
\quad|\; A_6 \\
\quad|\; A_8 \\
\quad|\; A_1 \\
A_1 \Rightarrow A_1 .
\end{array}
$$

Доказанная теорема задает план одного цикла процесса:

<u>do</u> f14; f46; f68; f81 <u>od</u>.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 4. Построение систем из элементов. Пусть требуется построить систему для преобразования A в B, пользуясь физически реализованными блоками преобразований f. Здесь каждой аксиоме нашей теории T соответствует блок, который будет физически подставлен в создаваемую схему. Поэтому уже использованная аксиома вторично использована быть не может. Получается логика $\Rightarrow_{100}$, поскольку естественно предполагать возможность построения "пустой" системы, осуществляющей тождественное преобразование.

В необходимых условиях запрет на дублирование аксиом можно обойти, запасая нужные аксиомы в нескольких экземплярах.

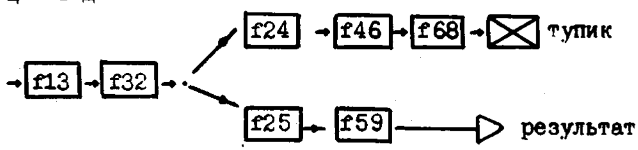
ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 5. Функции поиска информации. Элементарные предикаты интерпретируются как типы данных (см., например, [5]), операции f - как преобразование поля памяти, содержащего данные:

ищется в поле памяти данное типа A и, если оно находится, с его помощью вычисляется данное типа B и записывается в поле памяти. Если данных типа A в памяти нет, f неприменима. Такой интерпретации соответствует логика, допускающая использование любого ранее полученного утверждения, теорему покоя (область памяти - пассивный объект, не изменяющийся помимо наших действий) и повторное использование аксиом, т.е. $\Rightarrow_{111}$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим еще раз доказательство (10). В нем можно избежать повторного прохода от A_1 к A_2 , если бросить A_8 "на произвол судьбы" и воспользоваться уже встретившимся ранее A_2. Получающееся доказательство можно изобразить следующим образом:

$$\underline{]A_1\ A_3\ A_2\ A_4\ A_6\ A_8\ A_5\ A_9} \qquad A_1 \Rightarrow A_9 \ .$$

Стрелкой показана зависимость A_5 от A_2 . Это доказательство не транслируется прямо в линейную программу. Оно порождает структуру операций вида



(14)

В рамках интерпретации (5), можно изобразить (14) как программу

begin f13; f32; f24; f46; f68; f25; f59; **end** .

Здесь f25 сама разберется, откуда взять данное A_2.

Итак, построены интерпретации четырех логик: $\Rightarrow_{001}$, $\Rightarrow_{101}$, $\Rightarrow_{100}$, $\Rightarrow_{111}$. А как же оставшиеся четыре? Можно высказать предположение: в практической деятельности не могут возникать ситуации, где было бы целесообразно их использование. Основанием этого могут служить следующие аргументы, показывающие, что независимость первых трех вопросов - чисто формальная; содержательно ответы на них коррелированы.

Любое формальное понятие, используемое нами, на самом деле является лишь одной из формализаций некоторого содержательного, и чаще всего даже неформализуемого, понятия. Это содержательное понятие все время изменяет свой смысл и к его формализациям необходимо относиться как к чему-то, что может быть в любой момент по-

полнено и даже пересмотрено. Соответственно есть резон при проверке взаимосвязи между формальными понятиями отходить на шаг назад и рассматривать эти формальные понятия как элементы некоторой, не полностью нам известной системы формализаций, включающей их естественные пополнения и модификации. В связи с этим возникают следующие (безусловно, нестрогие, но помогающие как раз при проверке строгих рассмотрений) отношения между понятиями.

Система понятий концептуально противоречива, если естественные модификации некоторых из них логически противоречат естественной модификации какого-либо другого понятия из этой системы. Концептуально противоречивые понятия мешают друг другу и мешают себя правильно использовать. Примером концептуального противоречия может служить противоречие между побочным эффектом процедур и трансформационным определением условного оператора в АЛГОЛе-60.

Понятие $\mathcal{a}$ прагматически влечет понятие $\mathcal{b}$, если наличие $\mathcal{a}$ вместе с отсутствием $\mathcal{b}$ ведет к концептуально противоречивой системе.

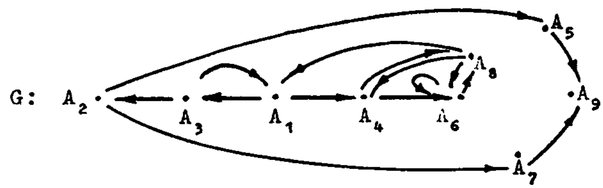
В этом смысле мы можем сказать, что положительный ответ на наш второй вопрос прагматически влечет положительные ответы и на оба других вопроса. В самом деле, если мы можем в любой момент использовать ранее полученный результат, значит, у нас есть безопасное место для его хранения и необратимость наших действий не влияет на наше описание мира: в нем у нас информация лишь накапливается. Значит, мы можем считать мир статическим и при необходимости делать нужные нам повторные вычисления, т.е. повторно использовать аксиомы.

Соответственно отрицательный ответ на третий вопрос прагматически влечет положительный ответ на первый вопрос по причинам, уже рассмотренным нами в интерпретации 4, и отрицательный ответ на второй вопрос, поскольку, как только что было показано, положительный ответ на второй вопрос влек бы за собой положительный ответ и на третий вопрос.

§3. Несколько важных математических интерпретаций

Здесь мы продолжим рассмотрение строгих интерпретаций конструктивных логик. Новые интерпретации уже не будут давать новых логик, хотя и будут обладать многими важными и зачастую новыми свойствами. Для всех этих интерпретаций будет выполнена теорема полноты для соответствующей логики, а для некоторых из них будут и более сильные соотношения с доказательствами в логических системах.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 6. Ориентированный граф. Представим элементарные предикаты точками (вершинами графа), а аксиомы - ребрами. В частности, для теории из примера I ее граф имеет вид:



Так как аксиомы теории соответствуют исходным операциям, то им же соответствуют и ребра графа. Композициям этих операций соответствуют пути в этом графе.

Формула $A \Rightarrow B$ реализуема, если в графе теории есть путь из A в B.

Такая модель, когда каждой аксиоме теории соответствует ребро графа, будет называться канонической. Как будет показано далее, каноническая модель в некотором смысле кодирует в точности все доказательства данной теории.

Варьируя понятие пути, на конечном графе можно интерпретировать все наши логики. Логика $\Rightarrow_{101}$ получается при стандартной интерпретации пути, когда путь - это конечная (возможно, пустая) последовательность ребер, такая, что конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего; $\Rightarrow_{001}$ - если мы исключаем пустые пути; $\Rightarrow_{100}$ - если мы запрещаем пути дважды проходить через одно и то же ребро; $\Rightarrow_{111}$ - если в качестве пути из A в B мы рассматриваем произвольное дерево, вложенное в граф G, корнем которого является A, а одной из конечных вершин B.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 7. Бинарное отношение на множестве элементарных предикатов и его транзитивное замыкание. Возьмем бинарное отношение между предикатами "$A \Rightarrow B$ является аксиомой теории T". Обозначим это отношение $A R B$. Тогда $C \Rightarrow D$ доказуемо в теории T с логикой $\Rightarrow_{001}$ тогда и только тогда, когда пара $\langle C, D \rangle$ принадлежит транзитивному замыканию отношения R. Выводимость с логикой $\Rightarrow_{101}$ соответствует транзитивному и рефлексивному замыканию, когда мы образуем из R новое отношение R^+ по правилам:

$$x R^+ x, \qquad \frac{x R^+ y,\ y R z}{x R^+ z}$$

Представление теории в виде транзитивного замыкания полностью стирает информацию о путях из C в D, которым и соответствуют построения.

Сравним теперь представления в виде бинарного отношения и в виде графа. Для человека чаще всего предпочтительнее представление в виде графа. При математической формализации представления в виде графа и отношения эквивалентны. В самом деле, формальное определение графа - это пара $\langle V, R \rangle$, где V - множество вершин, а R, бинарное отношение на V, - множество ребер.

Такой математический изоморфизм может несколько подвести нас при выборе исходного машинного представления. В самом деле, отношения естественно представляются как булевы матрицы (таблица инцидентности), но такое удобное представление не выдерживает некоторых естественных обобщений.

Если мы интересуемся не просто планом действий, но еще и ресурсами, которые требуются для его исполнения, то каждой аксиоме естественно сопоставить ресурсы, которые потребуются для исполнения ее реализации. Тогда еще на этапе планирования, т.е. поиска доказательства, мы сможем оценивать получающиеся планы и выбирать из них более подходящие для наших целей. Это обобщение еще не очень портит матричное представление: мы просто переходим от булевой матрицы к матрице, в которой булевы I заменены на ресурсы. Однако и здесь при представлении в виде графа задача поиска оптимального пути выглядит несколько естественнее. Окончательно портит матричное представление вполне возможный вариант, когда у нас есть несколько, несравнимых по затратам ресурсов способов перехода от A к B (например, один требует меньше времени, а другой - меньше внешних устройств). Тогда граф просто превращается в мультиграф, у которого может быть несколько ребер с одним и тем же началом и концом, а матричное представление не работает (нужна либо матрица множеств, либо множество матриц).

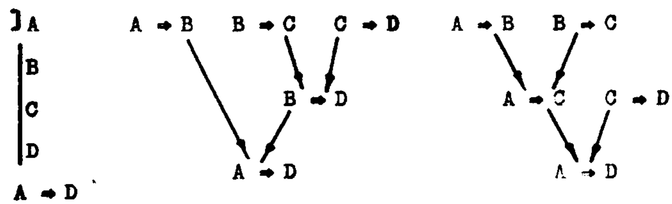
ИНТЕРПРЕТАЦИЯ 8. Категория возможностей. В этом случае моделью теории является категория [6]. Элементарные предикаты интерпретируются как классы объектов, а операции $A \to B$ - как семейства морфизмов $f_{a \in A}$, таких, что $f\colon a \to b$, где $b \in B$. Это еще один класс интерпретаций логики $\to_{101}$. $A \to A$ реализуемо, ввиду того, что в категории существуют единичные морфизмы.

В этой интерпретации проявляется роль еще одного свойства композиции, которое до сих пор оставалось в тени - ассоциативности, которое явно постулируется в определении категории и тривиально выполнялось для всех наших предыдущих итераций.

Категорная интерпретация тесно связана с графовой. Любой мультиграф можно представить как категорию, объектами которой являются вершины графа, а морфизмами – пути.

На основе всех рассмотренных интерпретаций мы можем вернуться и к четвертому вопросу: почему бы не воспользоваться правилом вывода (I3) вместо системы естественного вывода? Рассмотрим

ПРИМЕР 4. Пусть у нас есть теория с тремя аксиомами: $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$. Тогда в ней имеется единственная возможность доказать $A \to D$ в системе естественного вывода и две различных возможности в системе с правилом силлогизма:



Отсюда видно, что если естественный вывод прагматически влечет ассоциативность композиции функций, то силлогизм не предполагает ассоциативности, и поэтому систему с правилом силлогизма лучше применять тогда, когда операция композиции неассоциативна.

Практически полезные примеры неассоциативных композиций автору пока что неизвестны, и он будет благодарен за их указание.

§4. Некоторые теоремы о структуре доказательств

Второе из доказательств (9) можно переформулировать следующим образом, избавившись от повторения пути предварительным построением вспомогательной операции $A_1 \to A_2$:

$$\underset{\sqcap}{A_1}\;\underline{A_3\;A_2}\qquad A_1 \to A_2\qquad \underset{\sqcap}{A_1}\;\underline{A_2\;A_6\;A_8\;A_1\;A_2\;A_5\;A_9}\qquad A_1 \to A_9. \tag{15}$$

От доказательства (I5) можно перейти к исходному, дважды подставив в места, где применялась наша "лемма" $A_1 \to A_2$, ее вспомогательный вывод. В программу доказательство (I5) естественно транслировать следующим образом: (proc F12 = begin f13; f32 end; F12; f26; f68; f81; F12; f25; f59). При исполнении программы [illegible] ка вспомогательного вывода вместо доказанной импликации соответствует вызову процедуры, который традиционно определяется как подстановка тела процедуры в то место, где она должна быть вычислена. Это преобразование доказательства, состоящее в подстановке определений вместо введенных нами вспомогательных понятий, называется в математической логике нормализацией.

В результате нормализации доказанные нами вспомогательные утверждения перестают использоваться и становятся лишними. После этого их можно удалить из доказательства. Процесс удаления неиспользуемых формул вместе с их выводом называется прополкой доказательства. И наконец, в доказательстве могут быть петли, когда мы, выйдя из некоторого утверждения A, через несколько шагов возвращаемся к тому же утверждению A. Процесс удаления петель называется чисткой. В результате нормализации, чистки и прополки мы получаем простое доказательство нашей импликации, не содержащее ничего лишнего.

Сейчас мы приведем ряд результатов, касающихся структуры наших доказательств и преобразований нормализации, чистки и прополки.

Прежде всего, поскольку в наших логиках рассматриваются лишь формулы очень простой структуры, имеют место две леммы, жестко связывающие вид формулы и ее происхождение.

ЛЕММА 2. Если в доказательстве встречается формула вида $A \Rightarrow B$, то она является либо аксиомой, либо заключением правила дедукции (7).

ЛЕММА 3. Если в доказательстве встречается элементарный предикат, то он является либо допущением, либо результатом правила извлечения следствий (6).

Такие леммы уже не имели бы места, если бы мы допускали хотя бы двухэтажные импликации вида $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ или $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Отметим еще одну возможность появления вспомогательных процедур, существенную для более сложных логик, а для нас в некотором смысле избыточную, хотя и допускаемую в принципе нашим определением формального доказательства. В нем могут встретиться структуры типа

$$\begin{array}{l} \rceil A \\ \vdots \\ \rceil C \\ \quad \vdots \\ \quad D \\ C \Rightarrow D \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad (16)$$

где лемма $C \Rightarrow D$ доказывается внутри доказательства леммы $A \Rightarrow B$.

Введем следующее обозначение (которым мы будем пользоваться для формулировки теорем о сериях логик): x есть любое из чисел 0,1.

ЛЕММА 4. Структура вида (16) может встретиться лишь в логиках $\Rightarrow_{x1x}$.

Идея доказательства. Формулу, следующую за $C \Rightarrow D$, неоткуда вывести, поскольку она может следовать лишь из непосредственно предшествующей.

Теперь дадим строгие определения преобразований доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Шаг нормализации - это подстановка вместо применения доказанной нами ранее импликации $A \Rightarrow B$ вспомогательного вывода, при помощи которого она была доказана. При этом допущение вспомогательного вывода отождествляется с малой посылкой правила (6), а его результат - с результатом правила (6).

Заметим, что это определение вводит частично определенную операцию, которая просто неприменима, если в доказательстве нет применений ранее доказанных импликаций. В конструктивной математике не принято пополнять функции до всюду определенных, так как это может нарушить их вычислимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Шаг прополки - это удаление из доказательства формулы, не используемой далее, или вспомогательного вывода, не используемого далее. Шаг слабой прополки - то же, что шаг прополки, но он не может применяться к элементарным предикатам. Шаг чистки – это отождествление двух встретившихся в одном и том же вспомогательном выводе элементарных предикатов, хотя бы один из которых не является допущением либо результатом, и выбрасывание из доказательства отрезка между двумя отождествленными предикатами. Шаг слабой чистки – выбрасывание из доказательства второго из одинаковых предикатов и замена его во всех правилах, где он используется, на первый экземпляр этого предиката.

ЛЕММА 5. Шаг нормализации, прополки и слабой прополки преобразуют доказательство в логике $\Rightarrow_{xxx}$ в доказательство той же формулы в той же логике. Шаг чистки преобразует доказательство в логике $\Rightarrow_{x0x}$ в доказательство той же формулы в той же логике. Шаг слабой чистки преобразует доказательство в $\Rightarrow_{x1x}$ в доказательство той же формулы в той же логике.

Эта лемма устанавливает корректность введенных преобразований. Чистка не является законной операцией в логиках $\Rightarrow_{x1x}$, так как из отброшенного куска в дальнейшем могут быть сделаны выводы. Слабая чистка не может быть законной операцией в логиках $\Rightarrow_{x0x}$, так как она часто заставляет нас сделать несколько выводов из одного и того же утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Доказательство нормализовано (чисто, слабо чисто, прополото, слабо прополото), если к нему не может быть применен шаг соответствующего преобразования.

ЛЕММА 6. Доказательство нормализовано тогда и только тогда, когда ни одна из доказанных импликаций далее не используется. Доказательство чисто тогда и только тогда, когда оно слабо чисто, и тогда и только тогда, когда оно проведено в логике $\Rightarrow_{x1x}$. Доказательство нормализовано и прополото тогда и только тогда, когда оно проведено в логике $\Rightarrow_{x1x}$ и имеет форму схемы (5), т. е.

$$\begin{array}{|l}]A \\ \vdots \\ B \\ A \Rightarrow B \end{array}$$

Эта лемма устанавливает структурные критерии для тех окончательных форм, в которые преобразуются доказательства нашими операциями.

Теперь докажем, что в канонической модели на ориентированном графе имеются соответствия нормализованным прополотым доказательствам. Пусть G - ориентированный граф, представляющий теорию T.

ТЕОРЕМА о канонической модели. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между*

а) множеством всех путей ненулевой длины и множеством всех нормализованных прополотых доказательств в логике $\Rightarrow_{0xx}$;

б) множеством всех путей и множеством всех нормализованных прополотых доказательств в логике $\Rightarrow_{1xx}$;

в) множеством всех путей, не проходящих дважды через одну и ту же вершину, и множеством всех нормализованных прополотых чистых доказательств в логике $\Rightarrow_{1xx}$;

г) то же, что и в "в", для путей ненулевой длины и логики $\Rightarrow_{0xx}$;

д) множеством всех путей (ненулевой длины), не проходящих дважды одно и то же ребро, и множеством всех нормализованных прополотых доказательств в логике $\Rightarrow_{10x}$ ($\Rightarrow_{00x}$);

Сделаем маленькое историческое замечание о канонической модели. В математической логике иногда ставилась задача найти дерево поиска доказательства, копирующее все счетные модели теории и только их. Иногда ставилась задача найти точную модель, в которой формула истинна тогда и только тогда, когда она доказуема. Примеров моделей, копирующих все возможные доказательства, крайне мало. Автор может сослаться лишь на работу Карри [7], где установлено взаимно однозначное соответствие между множеством термов в комбинаторной логике с типами и доказательствами в гильбертовской формализации импликативной конструктивной логики с неограниченными итерациями импликаций.

Теперь сформулируем следующую теорему, которая является некоторым усилением давно известных в логике теорем о нормальной форме вывода.

ТЕОРЕМА о нормализации и прополке. Любое доказательство конечным числом шагов нормализации и прополки (слабой прополки) преобразуется к нормализованному и прополотому (соответственно слабо прополотому). При этом результат преобразований не зависит от последовательности применяемых операций.

Отметим, что при чистке результат может быть существенно различным, но преобразование к чистому доказательству также производится за конечное число шагов.

Теперь немного о логиках $\Rightarrow_{x1x}$. Как видно из теоремы о канонической модели и леммы 6, операция прополки стирает разницу между ними и логиками $\Rightarrow_{xox}$ (все формулы из тупиков просто выпадывают из доказательства). Именно для того, чтобы сохранить специфику этих логик, была введена операция слабой прополки, при которой доказательство сохраняет тупики. Нормализованные слабо прополотые выводы соответствуют вложениям деревьев в граф G.

§5. Об объеме выводимых формул и эквивалентности логик

Из теоремы о нормализации и прополке и конечности числа шагов чистки вытекает следующее следствие, устанавливающее равнообъемность многих наших логик.

ЛЕММА 7. Формула $A \Rightarrow B$ выводима в логике $\Rightarrow_{1xx}$ тогда и только тогда, когда она выводима в логике $\Rightarrow_{100}$. Формула $A \Rightarrow B$ выводима в логике $\Rightarrow_{0xx}$ тогда и только тогда, когда она выводима в логике $\Rightarrow_{000}$.

Итак, все логики $\Rightarrow_{1xx}$ равнообъемны, и точно так же для $\Rightarrow_{0xx}$. Более того, если игнорировать формулы вида $A \Rightarrow A$, то равнообъемны оказываются все логики.

ЛЕММА 8. Если $A \neq B$, то $A \Rightarrow B$ выводима в логике $\Rightarrow_{xxx}$ тогда и только тогда, когда она выводима в $\Rightarrow_{000}$.

Соответственно, используя известный аппарат классического исчисления высказываний, в одном случае, и сильной трехзначной логики Клини, в другом, можно доказать, что в принципе наша доказуемость для $\Rightarrow_{1xx}$ не отличается, а для $\Rightarrow_{0xx}$ немногим отличается от классической общезначимости.

ЛЕММА 9. Формула $A \Rightarrow B$ выводима в теории T при помощи логики $\Rightarrow_{1xx}$ тогда и только тогда, когда она получает значение "истина" при любом приписывании истинностных значений элементарным предикатам, при которых все аксиомы теории T истинны. Формула $A \Rightarrow B$ выводима в теории T при помощи логики $\Rightarrow_{0xx}$ тогда и только тогда, когда она получает значение "истина" при любом приписывании элементарным предикатам значений "истина", "ложь" и "неопределенность", при котором аксиомы теории T получают значение "истина" в сильной трехзначной логике Клини.

Напомним, что таблица истинности для импликации в сильной трехзначной логике Клини выглядит следующим образом:

A \ B	И	Н	Л
И	И	Н	Л
Н	И	Н	Н
Л	И	И	И

Однако более пристальное изучение классической истинности еще раз убеждает нас в том, что она - слишком грубый инструмент для изучения конструктивных теорий и что равнообъемности теорий недостаточно для их подлинной эквивалентности.

В самом деле, если при конструктивных интерпретациях мы имели каноническую модель, которая, в частности, является и точной, т.е. в ней реализуемо то и только то, что доказуемо в теории, то при классической интерпретации точных моделей не имеет уже следующая простейшая теория: $A \to B$, $B \to C$. При любом приписывании истинностных значений A, B, C обязательно окажется истинна либо $B \to A$, либо $C \to B$.

Еще раз повторим в более сильной форме замечание, сделанное нами в интерпретации 7. Формальная математическая эквивалентность понятий не должна успокаивать. При выборе формализации необходимо следить за возможностями ее модификации и обобщения. Малейшая же попытка обобщить конструктивные логики приводит к системам, существенно расходящимся с классическими (см., например, [I]).

Резюмируя все вышеизложенное, мы видим, что подбор логики, соответствующей классу задач, может происходить в два этапа. Вначале мы выбираем вид логических формул, которые будут описывать наши задачи. Класс этих формул определяет логические правила, используемые в конструктивной логике. Затем мы исследуем структуру множества интерпретаций этих формул и подбираем подходящую топологическую структуру выводов.

При выборе логики опасно опираться на какой-то класс выводов, приведенных в каноническую форму, так как при приведении к этой форме могут стираться существенные особенности структуры выводов.

Автор выражает благодарность Ю.Г.Косареву за многократные обсуждения.

Литература

I. NEPEIVODA N.N. The logical approach to programming.- Lec. Notes in Comp.Sci.,1981,v.122,p.261-289.

2. НЕПЕЙВОДА Н.Н., СВИРИДЕНКО Д.И. Программирование с логической точки зрения. (Препринт Т-I, Т-2), Новосибирск,1981.-94 с. (Институт математики, 1981).

3. MANNA Z.,WALDINGER R. A deductive approach to program synthesis.- Proc.6th Intern.Conf.on AI, Tokyo,1979,p.542-561.

4. КАРРИ Х.Б. Основания математической логики.-М.: Мир, 1969. - 568 с.

5. ДЕЙТ К. Введение в системы баз данных. -М.: Наука, 1980. - 463 с.

6. ФЕЙС К. Алгебра: кольца, модули, категории. Т.I. -М.:Мир, 1977. - 688 с.

7. CURRY H.B. Modified basic functionality in combinatory logic.- Dialectica,1969,v.23,p.83-92.

Поступила в ред.-изд.отд.
15 января 1983 года