ОДНОРОДНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ИЗ МИКРО-ЭВМ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 97

УДК 519.17:519.68

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ АДРЕСАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИКЛИЧЕСКОГО ГРАФА

В.А. Воробьёв

I. Циклические графы

Циклическим графом называется граф $G = \langle L,E,S \rangle$, где $L = \{0,1,\ldots,N-1\}$ - множество вершин, идентифицируемых своими номерами, $|L| = N$ - число вершин или порядок графа G, S - множество целых чисел - образующих графа, $|S| = n$ - размерность графа. Множество дуг $E = \{(i,j)/j - i \equiv s_k (\mathrm{mod}\ N),\ i,j \in L,\ s_k \in S\}$, причем $s_k \in S$ - отметка дуги, удовлетворяющей соответствующему сравнению.

Из определения циклического графа следует, что он является групп-графом циклической группы C_N порядка N, если за образующие группы C_N взять числа из множества S. Заметим, что числа $s_k \in S$ можно заменить любыми представителями класса $\bar{s}_k$ по модулю N, не меняя графа G. Имеет смысл, кроме того, рассматривать только такие множества отметок, в которых $s_k \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ N)$ при любых k. Таким образом, не теряя общности, можно положить $0 < s_k < N$. Если отвлечься от направлений дуг циклического графа, т.е.принять $(i,j) \in E \rightarrow (j,i) \in E$, то получится диофантова структура или D_n - граф, имеющий параметрическое описание $\langle N,S \rangle$. Группа C_N является транзитивной подгруппой группы автоморфизмов D_n -графа и сохраняет отметки его ребер.

В дальнейшем мы будем считать множество S упорядоченным и рассматривать его как вектор $\bar{S}$. Пара $\langle N,\bar{S} \rangle$ полностью описывает циклический граф.

Интенсивное изучение указанных выше графов началось [1-3] в связи с потребностями вычислительной техники. Основное внимание при этом уделялось решению задачи синтеза однородной структуры минимального диаметра [4,5] в классе КАИС-структур [6]. Главной проблемой при этом оказалось изучение и использование изоморфизмов D_n -графов, но большинство результатов относится и к циклическим графам. В [I,7] показано, что если N и t взаимно просты, то циклические графы $\langle N, \bar{S} \rangle$ и $\langle N, t\bar{S} \rangle$ изоморфны. Поскольку при синтезе D_n -графов направление дуги не рассматривается, то замена $s_k \in S$ на $N-s_k$ дает граф, изоморфный исходному, с точностью до направлений дуг [I]. В [7,8] показано, что если исключить из рассмотрения и отметки дуг, то множество изоморфных преобразований полученных однородных графов может быть расширено, когда N-составное число. Однако этот факт при синтезе не был использован, так как соответствующие преобразования сложны.

В настоящей работе будут изучаться вопросы, относящиеся к организации функционирования однородных вычислительных систем: адресация элементов, организация путевых процедур [9], вложение заданных подсистем в структуру системы. Эти вопросы требуют исследования свойств циклического графа во всем объеме. В первую очередь будет сформулирована теорема о соотношениях между образующими. В [I] эта теорема сформулирована неточно.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ - наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Выражение $[a]_b$ обозначает класс $\bar{a}$ по модулю b, представленный своим произвольным вычетом. Если же величина модуля оговорена в контексте и вид a достаточно прост, то будем пользоваться и обычной записью $\bar{a}$.

Поскольку все группы, встречающиеся в этой работе, абелевы, будем пользоваться аддитивной терминологией и записью.

2. Определяющие соотношения

Напомним [I], что компоненты связности циклического графа имеют порядок $p = N/(N, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$. Отсюда $p = N$, т.е. циклический граф связен, при условии

$$(N, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = 1. \qquad (1)$$

В дальнейшем предполагается выполнение этого условия.

Порядок образующей s_k равен соответственно $p_k = N/(N, s_k) = [N, s_k]/s_k$.

ТЕОРЕМА I. Соотношения между образующими $s_k, s_l \in S$, помимо коммутативности, имеют вид

$$s_k\left[\frac{s_l}{(s_k,s_l)}\,t\right]_{p_k} - s_l\left[\frac{s_k}{(s_k,s_l)}\,t\right]_{p_l} \equiv 0(\mathrm{mod}\ [p_k,p_l]), \qquad (2)$$

где $t = 1,2,\dots,(p_k,p_l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое соотношение следует из решения диофантова уравнения $s_k x_k - s_l x_l = 0$, причем система решений [IO] этого уравнения дает систему классов $\bar{x}_k(t), \bar{x}_l(t)$ по модулям p_k, p_l соответственно. Величина $[p_k,p_l]$ - порядок подгруппы $C_N(s_k,s_l)$, порождаемой образующими s_k, s_l. Возьмем в качестве представителей классов $\bar{x}_k(t), \bar{x}_l(t)$ минимальные положительные вычеты $0 < x_k(t) \le p_k$. Тогда очевидно, что количество различных слов подгруппы $C_N(s_k,s_l)$ равно $p_k\ p_l$, следовательно, множество рассматриваемых слов распадается на классы эквивалентности и в каждом классе содержится $p_k p_l/[p_k,p_l] = (p_k,p_l)$ слов, получающихся друг из друга применением соотношения (2) при некотором значении t.

Заметим теперь, что

$$p_k = \frac{[N,\ s_k]}{s_k} \ge \frac{[s_k,\ s_l]}{s_k} = \frac{s_l}{(s_k,\ s_l)},$$

и, следовательно, указанный в теореме ряд значений параметра t таков, что величины $x_k(t)$ представляют собой вычеты различных классов по модулю p_k (соответственно p_l). Таким образом, множество выражений вида (2), указанное в теореме, исчерпывает все соотношения, кроме коммутативности между образующими s_k и s_l. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что все множество соотношений (2) для $t = 1,\dots,(p_k,p_2)$ получается из одного соотношения вида (2) при $t = I$, если последнее t раз сложить само с собой покомпонентно по модулю $p_k, p_l, [p_k,p_l]$. Таким образом, имея $\langle N,\bar{S}\rangle$-описание циклического графа, нетрудно выписать определяющие соотношения соответствующего комбинаторного представления группы C_N. В двумерном случае они имеют следующий вид:

$$\frac{N}{(N,s_0)}\cdot s_0 \equiv 0(\mathrm{mod}\ N) \quad \Bigg|\ ,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{N}{(N,s_1)}\cdot s_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ N),\\ &s_0\left[\frac{s_1}{(s_0,s_1)}\right]_{p_0} \equiv s_1\left[\frac{s_0}{(s_0,s_1)}\right]_{p_1} \ (\mathrm{mod}\ N),\\ &s_0+s_1 \equiv s_1+s_0(\mathrm{mod}\ N).\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

3. Группа эквивалентных преобразований относительного адреса

Пусть $\bar{S}\bar{X} = \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k$ – скалярное произведение векторов $\bar{S}$ и $\bar{X}$. Относительным адресом $\bar{X}_l$ элемента $j \in L$ относительно элемента $i \in L$ при $j-i=l$ в циклическом графе называется решение сравнения

$$\bar{S}\bar{X}_l \equiv l(\mathrm{mod}\ N) \ . \qquad (4)$$

В силу однородности циклического графа значение $\bar{X}_l$ зависит [I] только от разности номеров i и j. Компонентами вектора $\bar{X}_l$ являются классы $\bar{x}_{kl}$ по модулю p_k. При условии (I) сравнению (4) удовлетворяет счетное множество решений соответствующего диофантова уравнения [IO], причем это множество распадается на классы, являющиеся различными решениями сравнения (4). Рассмотрим подробнее множество этих классов.

Пусть $\bar{X}'_l$ и $\bar{X}_l$ – различные решения сравнения (4), тогда из свойств сравнений следует $\bar{S}(\bar{X}'_l - \bar{X}_l) \equiv 0(\mathrm{mod}\ N)$. Таким образом, $\bar{X}_0 = \bar{X}'_l - \bar{X}_l$ – решение сравнения

$$\bar{S}\bar{X}_0 \equiv 0(\mathrm{mod}\ N), \qquad (5)$$

где $\bar{X}'_l - \bar{X}_l$ – покомпонентная разность векторов $\bar{X}'_l$ и $\bar{X}_l$, понимаемая для каждого $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ как разность $\bar{x}'_{kl} - \bar{x}_{kl}$ классов вычетов по модулю p_k. С другой стороны, если $\bar{X}_0$ – решение сравнения (5), а $\bar{X}_l$ – решение сравнения (4), то $\bar{X}'_l = \bar{X}_0 + \bar{X}_l$ – решение сравнения (4). Очевидно также, что те же рассуждения справедливы относительно решений самого сравнения (5). Таким образом, система решений сравнения (5) представляет собой абелеву группу X_0 эквивалентных преобразований относительного адреса $\bar{X}_l$. Операцией группы X_0 является сложение векторов $\bar{X}_0$ покомпонентно по модулю p_k, нулем – вектор $\langle 0,0,\dots,0 \rangle$.

Представляет интерес получить подробное описание структуры группы X_0. В двумерном случае $n=2$ полный перечень элементов X_0 непосредственно дается теоремой I и представляет собой множество векторов вида

$$\left\langle \left[\frac{s_1 t}{(s_0,s_1)}\right]_{p_0}, -\left[\frac{s_0 t}{(s_0,s_1)}\right]_{p_1} \right\rangle$$

при $t = 1,2,\ldots,p_{01}$, где $p_{01} = \dfrac{p_0 p_1}{N}$. Здесь, как и ранее, предполагается выполнение (I).

В многомерном случае $n > 2$ группа X_0 имеет достаточно простую структуру в одном важном частном случае, когда для какого-либо k имеется $(N,s_k) = 1$. Не снижая общности, можно полагать $k = 0$.

ЛЕММА I. При $(N,s_0,\ldots,s_{n-1}) = 1$ порядок p_{00} группы X_0 эквивалентных преобразований относительного адреса равен $p_{00} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} p_k / N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы I, величина $\prod\limits_{k=0}^{n-1} p_k$ – число различных относительных адресов в циклическом графе размерности n . Следовательно, указанное в лемме число p_{00} – количество эквивалентных адресов, получающихся друг из друга преобразованиями группы X_0. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $p_0 = N$, то группа X_0 эквивалентных преобразований относительного адреса есть прямое произведение циклических подгрупп X_{0i}, имеющих элементы $\bar{X}_{0i} \in X_{0i}$ вида

$$\left\langle \left[\frac{s_i t_i}{(s_0,s_i)}\right]_{p_0}, 0,0,\ldots,0, -\left[\frac{s_0 t_i}{(s_0,s_i)}\right]_{p_i}, 0,\ldots,0 \right\rangle,$$

где $i=1,2,\ldots,(n-1)$; $t_i=1,2,\ldots,p_{0i}$; $p_{0i}=p_0 p_i/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вид элементов $\bar{X}_{0i} \in X_{0i}$ задается теоремой I. Необходимо показать, что порядок p_{00} группы X_0 равен $\prod\limits_{i=1}^{n-1} p_{0i}$. Используя лемму I и делая непосредственные преобразования, имеем:

$$\prod_{i=1}^{n-1} p_{0i} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{p_0 p_i}{N} = \frac{p_0^{n-2}}{N^{n-2}} \cdot \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} p_i}{N} = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} p_i = p_{00}.$$

Осталось показать, что любой вектор $\bar{X}_0 \in X_0$ может быть представлен суммой векторов $\bar{X}_{0i}$, или, что то же, их линейной комбинацией с целочисленными коэффициентами α_i .

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\bar{X}_{0i}$ вида $\bar{X}_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{X}_{0i}$, где суммы и произведения берутся покомпонентно по модулям p_i. Ясно, что $\bar{X}_0 \in X_0$. Если имеется импликация $\bar{X}_0 = \bar{0} \to \forall i=\overline{1,n-1}\ \{\alpha_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p_i)\}$, то множество элементов группы X_0 совпадает с множеством указанных линейных комбинаций векторов $\bar{X}_{0i}$ в силу равенства их мощностей.

По определению $\bar{X}_0$, его i-я компонента при $i=\overline{1,n-1}$ имеет вид $-\left[\dfrac{\alpha_i s_i}{(s_0,s_i)}\right]_{p_i}$, и, учитывая условие доказываемой теоремы, теорему Лагранжа о порядках подгрупп и очевидные утверждения теории чисел, имеем следующую систему импликаций;

$$[(N,s_0)=1] \wedge (p_i|N) \to (p_i,s_0) = 1 \to \left(\frac{s_0}{(s_0,\ s_i)}\ ;\ p_i\right) = 1.$$

Из последнего утверждения немедленно следует требуемая импликация

$$\bar{X}_0 = \bar{0} \to \left[\frac{\alpha_i\ s_0}{(s_0,s_i)}\right]_{p_i} = 0 \to \alpha_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ p_i),\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Теорема доказана.

Построим, например, группу X_0 для циклического графа $\langle$ I2;I, 2,3 $\rangle$. Порядок образующих I,2,3 равен соответственно $p_0 =$ I2, $p_1 = 6$, $p_2 = 4$. Порядки подгрупп X_{01}, X_{02} соответственно $p_{01} = 6$, $p_{02} = 4$. Порядок группы X_0, согласно лемме I, $p_{00} = 24$. Подгруппы X_{01}, X_{02} даны в табл. I, 2. В качестве представителей классов взяты минимальные по абсолютной величине вычеты.

Таблица I

s_k	$\bar{X}_{01}(t)$	t_1 = I	2	3	4	5	6
I	$[2t_1]_{12}$	2	4	6	-4	-2	0
2	$[t_1]_6$	I	2	3	-2	-I	0
3	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

s_k	$\bar{X}_{02}(t)$	t_2 = I	2	3	4
I	$[3t_2]_{12}$	3	6	-3	0
2	0	0	0	0	0
3	$[t_2]_4$	I	2	-I	0

Векторы $\bar{X}_{0i} \in X_{0i}$ являются столбцами табл.2 и 3 при фиксированных t_i. Элементы группы X_0 перечислены в табл. 3. Векторы $\bar{X}_0 \in X_0$ представлены в ней строками минимальных по абсолютной величине вычетов соответствующих классов.

Таблица 3

0,	0,	0	3,	0,	I	6,	0,	2	-3,	0,	-I
2,	I,	0	5,	I,	I	-4,	I,	2	-I,	I,	-I
4,	2,	0	-5,	2,	I	-2,	2,	2	-I,	2,	-I
6,	3,	0	-3,	3,	I	0,	3,	2	3,	3,	-I
-4,	-2,	0	-I,	-2,	I	2,	-2,	2	5,	-2,	-I
-2,	-I,	0	I,	-I,	I	4,	-I,	2	-5,	-I,	-I

Заметим, что табл. 3 является минимальным представителем счетного множества эквивалентных преобразований группы X_0. В некоторых случаях удобнее использовать другие представления векторов $\bar{X}_0 \in X_0$, например, минимальные положительные вычеты. В дальнейшем, однако, будем пользоваться вычетами, минимальными по абсолютной величине. Такое представление минимизирует, в частности, длину $|\bar{X}_0|$ вектора $\bar{X}_0 \in X_0$, где $|\bar{X}_0| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k0}|$. Укажем еще два полезных свойства относительных адресов и определяющих соотношений циклического графа. Во-первых, очевидно, что $\bar{X}_1 = -\bar{X}_{N-1}$. Во-вторых, соотношения между образующими s_k, s_1 можно записать в виде $\bar{S}\cdot\bar{X}_{k1}(t) \equiv$ $\equiv 0(\mathrm{mod}\ [p_k,p_1])$, где параметр t пробегает полную систему вычетов по модулю (p_k,p_1), $k,1$ - номера ненулевых компонент вектора $\bar{X}_{k1} \in X_0$, соответствующих образующим s_k,s_1. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что

$$\bar{X}_{k1}((p_k,p_1)-t) = -\bar{X}_{k1}(t). \tag{6}$$

Это равенство вдвое сокращает вычисления при построении подгруппы $X_{01} \subseteq X_0$ (табл. I, 2).

4. Размеченная решетка относительных адресов

Данный параграф содержит алгебраическую интерпретацию относительной адресации и предназначен для введения соответствующей терминологии.

Рассмотрим n-мерную целочисленную решетку Z^n. Из предыдущего изложения ясно, что если $\langle N,\bar{S} \rangle$-описание циклического графа удовлетворяет условию (I), связности, то для любого $\bar{X} \in Z^n$ найдется такое $1 \in \{0,1,\dots,N-1\}$, что сравнение (4) будет удовлетворено. Таким образом, решетка Z^n является решеткой относительных адресов для циклических графов при условии (I). Введем следующие обозначения. Компоненты вектора $\bar{X}_k \in Z^n$ будем обозначать x_{ik}, где $i = 0,1,\ldots,n-1$. Вектор, все компоненты которого равны 0, обозначим $\bar{0}$. Для любого $\bar{X} \in Z^n$ введем характеристический вектор по следующему правилу:

$$\delta(\bar{X}) = \{\delta_i(\bar{X})/i=0,1,\ldots,n-1\}, \qquad \delta_i(\bar{X}) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, \\ 0, & x_i = 0, \\ -1, & x_i < 0. \end{cases}$$

Символы $\cup, \cap, \setminus$ будем, как и раньше, использовать для опи[illegible] операций над множествами, символы $+, \cdot$ - соответственно покомпонентное сложение и скалярное умножение векторов из Z^n. Операции над элементами Z^n обозначим и определим следующим образом:

$$\inf(\bar{X},\bar{Y}) = \langle \min \{x_i, y_i\}/i=\overline{0,n-1}\rangle,$$

$$\sup(\bar{X},\bar{Y}) = \langle \max \{x_i, y_i\}/i=\overline{0,n-1}\rangle.$$

К любым множествам $X \subseteq Z^n$ будем применять операции :

$$\inf X = \langle \min_k \{x_{ik}/k=0,1,\ldots,|X|-1\} / i = \overline{0,n-1}\rangle,$$

$$\sup X = \langle \max_k \{x_{ik}/k=0,1,\ldots,|X|-1\} / i = \overline{0,n-1}\rangle.$$

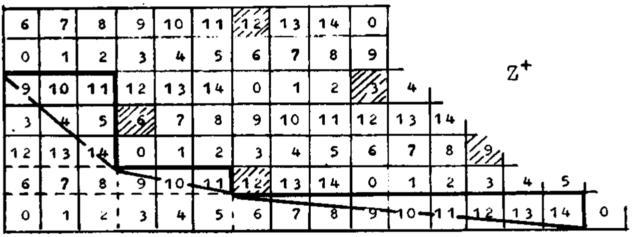
Нетрудно проверить, что все необходимые свойства [II] структурных операций - идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, закон поглощения - имеют место для inf и sup . Более того, рассматриваемая структура Z^n дистрибутивна.

Для задания отношения частичного порядка на Z^n будем употреблять символы $\geq$, $\leq$ в их обычном смысле, причем для $\bar{X},\bar{Y} \in Z^n$ $\bar{X} \geq \bar{Y} \longleftrightarrow \forall i = \overline{0,n-1}\{x_i \geq y_i\}$. Отношение частичного порядка $\geq$ содержит отношение непосредственного следования $>$, которое определяется следующим образом:

$$\bar{X} > \bar{Y} \longleftrightarrow (\bar{X} \neq \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \geq \bar{Y}) \wedge \neg\exists \bar{Z} \in Z^n \{\bar{X} \geq \bar{Z} \geq \bar{Y}\}.$$

Отношение непосредственного следования обычно используется при изображении структуры Z^n в виде графа, который вполне оправдывает термин "решетка" (см. рисунок).

В дальнейшем нам потребуется рассматривать "положительный квадрант" Z^+ решетки Z^n, т.е. такое множество векторов $\bar{X} \in Z^n$, что для всех $i=\overline{0,n-1}$, $x_i \geq 0$. Множество Z^+ является решеткой с



нулем $\bar{0}$ и теми же операциями и отношениями порядка, что и на Z^n. Каждому элементу $\bar{X} \in Z^+$ в Z^+ соответствует идеал $I(\bar{X})$, т.е. полная решетка с нулем $\bar{0}$ и единицей $\bar{X}$. Элементами $I(\bar{X})$ служат все векторы $\bar{X}_k \in Z^+$, удовлетворяющие условию $\bar{X}_k \le \bar{X}$. Поскольку каждому $\bar{X}_k \in I(\bar{X})$ соответствует свой идеал $I(\bar{X}_k)$, можно говорить и о полной решетке идеалов, порождаемой вектором $\bar{X} \in Z^+$. Операции над элементами решетки идеалов те же[ж)], что и в Z^n, а отношения порядка – теоретикомножественное отношение включения.

Перепишем теперь сравнение (4) в следующем виде: $l \equiv \overline{\bar{S}\bar{X}} (\mathrm{mod}\ N)$, $l \in L$, $\bar{X} \in Z^n$. Очевидно, что при выполнении условия связности (I) $\langle N, \bar{S} \rangle$ -описание циклического графа задает отображение $\phi: Z^n \to L$, которое каждому элементу решетки Z^n ставит в соответствие номер $l \in L$. Будем говорить, что $\langle N, \bar{S} \rangle$ -описание размечает решетку Z^n элементами из L. В частности элементы группы X_0 эквивалентных преобразований помечены номером 0.

Подмножество $Z \subseteq Z^n$ назовем однозначно размеченным или однозначным, если в Z не найдется двух элементов, помеченных одним и тем же номером из L. Каждому подграфу циклического графа соответствует однозначное множество элементов в Z^n (более того, счетное множество таких однозначных множеств). В связи с этим многие задачи теории циклических графов, связанные с построением подграфов, сводятся к нахождению соответствующих однозначных множеств в Z^n.

Пусть $Z \subseteq Z^n$. Множество $\mathrm{Inf}(Z)$ элементов из Z, несравнимых между собой и таких, что в Z не найдется ни одного элемента, который был бы меньше любого элемента из $\mathrm{Inf}(Z)$, назовем нижней

ж) Операция inf в решетке идеалов совпадает с пересечением множеств $\cap$, но этого нельзя сказать об операции sup.

границей Z. Аналогично определяется верхняя граница Z, обозначаемая $\mathrm{Sup}(Z)$. Очевидно, что не всякое $Z \subseteq Z^n$ имеет верхнюю или нижнюю границы. Если же $\mathrm{Inf}(Z)$ или $\mathrm{Sup}(Z)$ существуют, то Z ограничено снизу или сверху соответственно. Например, $\mathrm{Sup}(Z^+)$ не существует, а $\mathrm{Inf}(Z^+) = \{\bar{0}\}$.

Итак, структура относительной адресации задается четверкой $\langle Z^n, N, \bar{S}, \phi \rangle$. Иногда удобно ограничиться четверкой $\langle Z^+, N, \bar{S}, \phi \rangle$, что и будет сделано в следующем параграфе.

5. Однозначно размеченные идеалы в Z^+.

Исследуем вопрос о том, можно ли разместить в данном циклическом графе решетку $\bar{A}$ размером $\prod_{i=0}^{n-1} a_i$. Подобная задача решалась в [12] для бесконечной двумерной решетки Z^2, в которой некоторые элементы запрещены для использования (заняты или вышли из строя). В этих условиях авторы [12] предлагают критерий вложимости в Z^2 решетки размером $a_0 \times a_1$, включающей заданный элемент $\bar{Z} \in Z^2$, и в пределах заданного конечного подмножества $Z \subset Z^2$.

Для циклических графов можно компактно описать все множество A решеток, вложимых в граф. Действительно, в силу однородности можно рассматривать только решетки, имеющие элемент с номером $1 = 0$ в качестве начальной точки отсчета и a_i элементов по i-й образующей, причем только в положительном направлении от нулевого. Все прочие случаи размещения решеток в циклическом графе порождаются автоморфизмами группы C_N. Легко видеть, что решетке $\bar{A}$ при таком ограниченном рассмотрении соответствует идеал $I(\bar{Z}) \subseteq Z^+$, где $\bar{Z} = \langle a_0-1, a_1-1, \ldots, a_{n-1}-1 \rangle$. Если же решетка вкладывается в циклический граф, то соответствующий идеал будет однозначно размеченным. Пусть I - множество таких однозначных идеалов. Поскольку I - подмножество решетки идеалов Z^+, то достаточно найти $\mathrm{Sup}(I)$, чтобы полностью задать все множество I ($\mathrm{Sup}(A)$ и A соответственно). Итак, вопрос, поставленный в начале настоящего параграфа, свелся к следующей математической задаче: **найти** $\mathrm{Sup}(I)$ для данной системы $\langle Z^+, N, S, \phi \rangle$, где I - множество однозначных идеалов в Z^+.

Рассмотрим условия однозначности идеала $I(\bar{Z}) \subset Z^+$. Очевидно, что $I(\bar{Z})$ не должен содержать элементов группы X_0 эквивалентных преобразований, не равных 0. Указанное условие, однако, недостаточно.

Построим множество $X_0^+ \subset Z^+$ следующим образом :

$$X \in X_0^+ \leftrightarrow \exists \overline{X}_0 \in X_0 \forall i=\overline{0,n-1}\{x_i = |x_{i0}|\},$$

т.е. элементы X_0^+ получаются из элементов X_0 удалением отрицательных знаков компонент.

ТЕОРЕМА 3. Идеал $I(\overline{Z}) \subset Z^+$ однозначен, если и только если выполнено условие

$$I(\overline{Z}) \cap X_0^+ = \{\overline{0}\}. \qquad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем достаточность условия (7). Пусть условие (7) выполняется, но существуют такие $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2 \in I(\overline{Z})$, что $\overline{Z}_1 \neq \overline{Z}_2$ и оба эти элемента имеют одинаковую отметку $l \in L$. Тогда из свойств сравнений $l \equiv \overline{Z}_1\overline{S} \equiv \overline{Z}_2\overline{S} (\mathrm{mod}\ N)$, $(\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)\overline{S} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ N)$. Следовательно, $\overline{Y} = \overline{Z}_1 - \overline{Z}_2 \neq \overline{0}$ и $\overline{Y} \in X_0$. Теперь возможны два случая:

а) все $y_i \geq 0$, тогда $\overline{Y} \leq \overline{Z}_1 \leq \overline{Z}$ и $\overline{Y} \in I(\overline{Z})$, $\overline{Y} \in X_0^+$;

б) среди компонент $\overline{Y}$ найдутся отрицательные.

Рассмотрим вектор $\overline{Y}^+ = \langle |y_0|, |y_1|, \dots, |y_{n-1}| \rangle$, $\overline{Y}^+ \in X_0^+$. Очевидно, $|y_i| = |z_{i1} - z_{i2}| \leq |\max\{z_{i1}, z_{i2}\}|$, откуда следует

$$\overline{Y}^+ \leq \sup(\overline{Z}_1, \overline{Z}_2) \leq \overline{Z}, \quad \overline{Y}^+ \in I(\overline{Z}).$$

Итак, в обоих случаях "а" и "б" имеем: $\overline{Y}^+ \neq \overline{0}$ и $\overline{Y}^+ \in I(\overline{Z}) \cap X_0^+$, что противоречит первоначальной посылке (7). Таким образом, условие (7) исключает неоднозначность $I(\overline{Z})$.

Докажем необходимость (7). Пусть $I(\overline{Z})$ однозначен, но существует $\overline{X}_0^+ \in X_0^+$ такой, что $\overline{X}_0^+ \in I(\overline{Z})$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\overline{X}_0^+ \in \mathrm{Inf}(X_0^+ \setminus \{\overline{0}\})$. Покажем, что при этом предположении в $I(\overline{Z})$ найдутся такие $\overline{Z}_1$ и $\overline{Z}_2$, что $\overline{Z}_1\overline{S} \equiv \overline{Z}_2\overline{S} (\mathrm{mod} N)$. Если для $\overline{X}_0^+$ выполнено $\overline{X}_0^+\overline{S} \equiv 0 (\mathrm{mod} N)$, то однозначности нет, так как $\overline{0} \in I(\overline{Z})$ и $\overline{0S} \equiv 0 (\mathrm{mod} N)$. Пусть $\overline{X}_0^+\overline{S} \not\equiv 0 (\mathrm{mod} N)$, тогда в группе X_0 найдется элемент $\overline{X}_0$ такой, что $|x_{i0}| = x_{i0}^+$ для всех i. По определению X_0 имеем $\overline{X}_0\overline{S} = 0 (\mathrm{mod} N)$. Рассмотрим два вектора $\overline{Y}_0^+$ и $\overline{Y}_0^-$. Ненулевые компоненты $\overline{Y}_0^+$ таковы, что $y_{i0}^+ = x_{i0}$, а остальные компоненты $\overline{Y}_0^+$ равны нулю. Ненулевые компоненты $\overline{Y}_0^-$ таковы, что $y_{i0}^- = -x_{i0}$, а остальные компоненты $\overline{Y}_0^-$ равны нулю. Очевидно, что $\overline{Y}_0^+ \leq \overline{X}_0^+$ и $\overline{Y}_0^- \leq \overline{X}_0^+$, откуда $\overline{Y}_0^+, \overline{Y}_0^- \in I(\overline{Z})$. Пусть l и l' - отметки $\overline{Y}_0^+$ и $\overline{Y}_0^-$ соответственно, но тогда $l - l' \equiv \overline{Y}_0^+\overline{S} - \overline{Y}_0^-\overline{S} \equiv (\overline{Y}_0^+ - \overline{Y}_0^-)\overline{S} \equiv \overline{X}_0\overline{S} \equiv 0 (\mathrm{mod} N)$, т.е. $1 = 1'$. Полученное противоречие с посылкой об однозначности $I(\bar{Z})$ доказывает необходимость условия (7). Теорема доказана.

Теорема 3 сводит поставленную задачу к перебору идеалов решетки Z^+, не содержащих элементов из X_e^+. Остается еще найти способ перебора, причем такой, чтобы получающаяся последовательность идеалов была как можно более близка к $\sup(I)$.

Рассмотрим прежде всего те условия, при которых некоторое множество $Y \subset Z^+$ определяет множество K идеалов, не пересекающихся с Y. Множество $Y \subset Z^+$ называется **несравнимым**, если не существуют такие $\bar{Y} \in Y$ и $Y' = Y \setminus \{\bar{Y}\}$, что $\bar{Y} \le \sup Y'$.

ЛЕММА 2. *Несравнимое множество Y в n-мерной решетке Z^+ содержит не более чем n элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всегда можно выбрать n несравнимых элементов в Z^+. Для этого достаточно взять n векторов, каждый из которых, скажем i-й, содержит максимальную, пусть тоже i-ю координату: $Y = \{\bar{Y}_k / k = \overline{0, n-1}\}$, $y_{ii} = \max\limits_k \{y_{ik}\}$. Добавим к Y еще один $n+1$-й элемент $\bar{Y}_n$. Если для всех k выполняется $y_{kn} \le \max\limits_{i \ne n} \{y_{ki}\}$, то множество $Y \cup \{\bar{Y}_n\}$ - сравнимо по определению. Если в $\bar{Y}_n$ найдется такая k-я координата, что $y_{kn} > \max\limits_{i \ne n}\{y_{ki}\}$, то тогда $\bar{Y}_k \le \sup(Y \cup \{\bar{Y}_n\} \setminus \{\bar{Y}_k\})$ и вновь нарушается условие несравнимости. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если в n-мерной решетке Z^+ выбрать несравнимое множество $Y = \{\bar{Y}_i / i \in J\}$ такое, что $|Y| = m < n$, то в Z^+ найдется бесконечное множество идеалов, не содержащих элементов из Y.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку идеалы Z^+ образуют решетку с нулем $\bar{0}$, любое их конечное множество K можно задать конечной же верхней границей $\sup(K)$. Покажем, что при условии леммы 3 такую границу указать невозможно. Пусть $\bar{Y} = \sup(\{\bar{Y}_i - \delta(\bar{Y}_i) / i \in J\})$, тогда в любом $Y_i \in Y$ найдется хотя бы одна компонента y_{ki} такая, что $y_{ki} > y_k$. Откуда следует, что

$$I(\bar{Y}) \cap Y = \emptyset . \qquad (8)$$

С другой стороны, несравнимость множества Y будет обеспечена, если найдутся такие m координат, что каждой из них будет соответствовать вектор $\bar{Y}_k \in Y$, имеющий максимальное значение выделенной k-й координаты: $y_{kk} > y_{kj}$ при $k \neq j$. Остальные $n-m$ координат можно произвольно изменять, не нарушая несравнимости получаемых множеств Y. Соответственно и в $\bar{Y}$ можно сколько угодно увеличивать эти $n-m$ координат, не нарушая условия (8). Поскольку решетка Z^+ не имеет верхней грани, таких идеалов будет бесконечное счетное множество. Лемма доказана.

Итак, согласно лемме 2 несравнимое множество $Y \subset Z^+$ содержит не более чем n элементов $|Y| \leq n$, согласно лемме 3 конечное множество идеалов, отвечающих условию (8), не может быть определено, если $|Y| < n$. При $|Y| = n$ рассуждения леммы 3 об увеличении $n-m$ координат теряют смысл из-за отсутствия этих произвольных координат, а указанный вектор $\bar{Y}$ является максимально возможным. Общий вывод дает следующая, теперь уже очевидная,

ТЕОРЕМА 4. *Несравнимое множество Y элементов n-мерной решетки Z^+ при $|Y| = n$ однозначно определяет конечное множество K идеалов, непересекающихся с Y. Множество K является полной решеткой с нулем $\{\bar{0}\}$ и единицей $I(\bar{Y})$, где $\bar{Y} = \sup\{\bar{Y}_i - \delta(\bar{Y}_i)/i=\overline{0,n-1}\}$.*

Теперь нам осталось подходящим образом выбирать множества несравнимых элементов, определяющие однозначные идеалы множества I, принадлежащие $\operatorname{Sup}(I)$. Ограничим, прежде всего, выбор элементами множества $\operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$. Множество $\operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$ имеет следующие свойства:

I) любая пара элементов $\bar{Y}_k, \bar{Y}_l \in \operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$ несравнима между собой, т.е. всегда найдутся такие координаты i и j, что $y_{ik} > y_{il}$ и $y_{jk} < y_{jl}$;

2) при $Y \subseteq \operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$ и $|Y| > 1$, $\sup Y \notin \operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$;

3) $|\operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})| \geq n$, поскольку в нижней границе содержится по крайней мере n векторов вида $\langle 0, 0, \ldots, p_k, \ldots, 0 \rangle$, $k = \overline{0,n-1}$.

Множество $Y_\Gamma \subseteq \operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$ назовем гранью множества $X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\}$, если: I) $|Y_\Gamma| = n$; 2) не существует такого элемента $\bar{Y} \in \operatorname{Inf}(X_\theta^+ \setminus \{\bar{0}\})$, что

$$\bar{Y} \leq \sup(Y_\Gamma \setminus \{\bar{Y}\}) \qquad (9)$$

Непосредственно из определения следует, что грань Y_Γ - множество несравнимых элементов, расположенных "по соседству". Элементы грани Y_Γ однозначно определяют (n-1)-мерную плоскость, по одну сторону которой находится $\overline{0}$, а по другую - все остальные элементы из $X_0^+ \setminus Y_\Gamma$. Множество граней $\mathrm{Inf}(X_0^+\setminus\{\overline{0}\})$ принадлежит поверхности выпуклого многогранника, натянутого на элементы нижней границы множества $X_0^+\setminus\{\overline{0}\}$. При n=2 эта поверхность представляет собой выпуклую ломаную линию (см. рис.I).

ТЕОРЕМА 5. Пусть Y_Γ - грань множества $X_0^+\setminus\{\overline{0}\}$, I - множество однозначных идеалов в $\langle Z^+, N, \overline{S}, \Psi\rangle$, тогда $I(\sup\{\overline{Y}_i - \delta(\overline{Y}_i)/\overline{Y}_i \in Y_\Gamma\}) \in$ $\in \mathrm{Sup} I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду теоремы 3 и 4, а также несравнимость Y_i, достаточно показать, что указанный в теореме идеал не содержит элементов из X_0^+. Нетрудно убедиться, что обратное допущение приводит к противоречию с определением множества Y_Γ. Теорема доказана.

Аналогичные рассуждения приведут и к доказательству обратной теоремы, которое будет опущено.

ТЕОРЕМА 6. Пусть I - множество однозначных идеалов в $\langle Z^+,N,\overline{S},\Psi\rangle$ и $I(\overline{Z}) \in \mathrm{Sup}\ I$, тогда найдется такая грань Y_Γ множества $X_0^+\setminus\{\overline{0}\}$, что $\overline{Z} = \sup\{\overline{Y}_i - \delta(\overline{Y}_i)/\overline{Y}_i \in Y_\Gamma\}$.

Таким образом, перебор Sup I сводится к перебору граней множества $\mathrm{Inf}(X_0^+\setminus\{\overline{0}\})$, т.е. всех n-сочетаний элементов этого множества, удовлетворяющих условию (9). В общем случае такой перебор возможен только на ЭВМ, но в важнейшем частном случае n=2 достаточно упорядочить множество $\mathrm{Inf}(X_0^+\setminus\{\overline{0}\})$ так, чтобы значения одной из координат, скажем, нулевой, возрастали, а другой, соответственно первой, убывали. Нетрудно убедиться, что в этом порядке каждая пара соседей (предыдущий-последующий) образует грань Y_Γ множества $\mathrm{Inf}(X_0^+\setminus\{\overline{0}\})$.

Вернемся, наконец, к исходной задаче. Речь шла о вложении решетки $\overline{A}$ размером $\prod_{i=0}^{n-1} a_i$ в циклический граф. Заметим, что если $I(\overline{Z})$ - однозначный идеал в $\langle Z^+,N,\overline{S}, \Psi\rangle$, то соответствующая решетка имеет размер $\prod_{i=0}^{n-1}(z_i+1)$. Согласно теореме 4, при вычислении единицы $\overline{z}$ идеала $I(\overline{Z})$ из каждого вектора $\overline{Y}_i \in Y_\Gamma$ необходимо было вычесть $\delta(\bar{Y}_1)$. При вычислении размера $\bar{A}$ необходимо вновь увеличить все координаты на I. Таким образом, все манипуляции с характеристическим вектором оказываются излишними. Кроме того, если нас интересует только размер решетки $\bar{A}$, а не ее расположение по образующим графа, то можно дополнительно сократить $\mathrm{Sup}\ A$, упорядочив координаты a_i по убыванию и найдя $\mathrm{Sup}\ A'$ для множества решеток A', полученного из A указанным упорядочиванием.

Итак, искомый алгоритм следующий. Пусть дано описание $\langle N, \bar{S} \rangle$ циклического графа.

I. Найдем группу X_0 эквивалентных преобразований относительного адреса (теоремы I,2), представив ее минимальными по абсолютной величине вычетами. Элемент $\bar{0} \in X_0$ должен быть при этом представлен n раз векторами вида $\langle 0, \ldots, p_i, \ldots, 0 \rangle$, $i = \overline{0, n-1}$.

2. Найдем X_0^+, удалив все отрицательные знаки из X_0.

3. Найдем $Y = \mathrm{Inf}(X_0^+ \setminus \{\bar{0}\})$.

4. Переберем n-сочетания элементов множества Y и проверкой условия (9) выделим грани $Y_\Gamma \subseteq Y$ множества $X_0^+ \setminus \{\bar{0}\}$. В случае $n = 2$ перебор сокращается, как указано выше (см. с. 99), проверка условия (9) также отпадает. Для каждой вновь полученной грани Y_Γ

4.I. Найдем $\bar{A} = \sup Y_\Gamma$.

4.2. Упорядочим компоненты $\bar{A}$ по убыванию.

4.3. Запишем вновь полученную решетку $\bar{A}'$ в $\mathrm{Sup}\ A'$, если там не найдется такой элемент $\bar{B}' \in \mathrm{Sup}\ A'$, что $\bar{B}' \geq \bar{A}'$.

4.4. Продолжим перебор граней Y_Γ, если это еще возможно, иначе на п. 5.

5. Конец.

Рассмотрим пример. Пусть дано $\langle N, \bar{S} \rangle$-описание $\langle I5; I, 6 \rangle$. Как в п. 3, построим группу X_0, но ее элемент $\langle 0,0 \rangle$ распишем в виде пары $\langle p_0, 0 \rangle$ и $\langle 0, p_1 \rangle$ (см. табл. 4.). Так как $p_0 = I5$, $p_1 = 5$, $(p_0, p_1) = 5$, то согласно соотношению (6) $t = 0, I, 2$. Множество $X_0^+ \setminus \{\bar{0}\} = \{\langle I5, 0 \rangle, \langle 6, I \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 0, 5 \rangle\}$, причем в данном примере сразу имеет место $\mathrm{Inf}(X_0^+ \setminus \{\bar{0}\})$ и элементы упорядочены по убыванию первой компоненты и по возрастанию второй. Находя теперь $\sup Y_\Gamma$, где Y_Γ – любая пара соседей в упорядоченном ряду $X_0^+ \setminus \{\bar{0}\}$, имеем $\mathrm{Sup} A$ множества A решеток, которые можно разместить в циклическом графе $\langle I5; I, 6 \rangle$:

Т а б л и ц а 4

s_k	$\bar{X}_0(t)$	t			
		0	0	I	2
I	$[6t]_{15}$	I5	0	6	-3
6	$-[t]_5$	0	5	-I	-2

$\langle 15,1 \rangle$, $\langle 6,2 \rangle$, $\langle 5,3 \rangle$. В данном случае оказалось, что в граф $\langle 15,1,6 \rangle$ можно вложить все решетки мощности, меньшей или равной 15, кроме одной: $\langle 7,2 \rangle$.

Наглядно все построения видны на рис.I, где каждому элементу $\bar{z} \in Z^n$ соответствует клетка, соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. Элементы X_0^+ помечены на рис.I нулями или выделены штриховкой. Ломаная линия, проходящая через $\mathrm{Inf}(X_0^+ \setminus \{\bar{0}\})$, наглядно демонстрирует систему граней. Максимальные однозначные идеалы системы $\langle Z^+, 15, \langle 1,6 \rangle, \Psi \rangle$ обведены жирной линией.

6. Заключение

Представленное выше исследование математической природы относительной адресации дало следующие результаты.

I. Относительный адрес $\bar{X}_{ij}$ элемента j относительно i в циклическом графе $\langle N, \bar{S} \rangle$ зависит только от разности номеров $l = j-i$ и является решением сравнения $\overline{SX}_l \equiv l(\mathrm{mod}N)$.

2. Решения соответствующего сравнения при $l = 0$ образуют группу X_0 эквивалентных преобразований относительного адреса $\bar{X}_l$ для любого $l < N$. Элементы $\bar{X}_0 \in X_0$ порождают соотношения между образующими множества S. Для двумерных $(n=2)$ графов и подавляющего большинства практически интересных случаев многомерных графов группа X_0 может быть достаточно просто построена.

3. Связь между нумерацией элементов множества L - вершин графа $\langle N, \bar{S} \rangle$ и произвольным относительным адресом $\bar{X}_l \in Z^n$ задает разметку решетки Z^n. При этом любому однозначно размеченному подмножеству Z^n соответствует подмножество L. Этот факт позволяет использовать построенную математическую модель для построения полезных подграфов циклического графа: путей, циклов, решеток и тому подобное, а также для анализа алгоритмов указанных построений: процедур настройки и путевых процедур.

4. В частности, однозначным идеалам решетки Z^+ соответствуют решетки, вложимые в циклический граф. Дан алгоритм построения $\mathrm{Sup}\, A$ множества A этих решеток.

Литература

I. ВОРОБЬЁВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем. -В кн.: Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Вып. 60, Новосибирск, 1974, с. 35-49.

2. WONG C.K., Don COPPERSMITH. A Combinatorial Problem Releted to Multimodule Memory Organization.- J.Assoc.Comput.Machinery,1974,v.21, N 3,p.392-402.

3. WONG C.K.,MADDOCKS J.W. A generalized Pascal's triangle.- The Fibonacci Quarterly,1975,v.13,p.134-136.

4. ВОРОБЬЁВ В.А., ГАВЫРИН Ю.А. К теории структур однородных вычислительных систем. -В кн.: XXXIII Всесоюзная научная сессия,посвященная Дню радио, аннотации и тезисы докладов. М., 1978, с.69-70.

5. МОНАХОВА Э.А. Синтез оптимальных диофантовых структур. -В кн.: Вопросы теории и построения вычислительных систем (Вычислительные системы, вып. 80). Новосибирск, 1979, с. 18-35.

6. ВОРОБЬЁВ В.А.,КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем. -В кн.: Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Вып. 60. Новосибирск, 1974, с. 3-16.

7. Elspas B.,Turner I. Graphs with circulant asjacency matrices.-J.Combinatorial Theory,1970,v.9,N 3,p.297-307.

8. TURNER I. Point-symmetric graphs with a prime number of points.-J.Combinatorial Theory,1967,v.3,N 2,p.136-145.

9. ВОРОБЬЁВ В.А., МОНАХОВА Э.А. Оптимальные диофантовы структуры однородных вычислительных систем. Синтез и путевые процедуры. - В кн.: Всесоюзное научно-техническое совещание "Проблемы создания и использования высокопроизводительных машин",секция: Модели оценки эффективности вычислительных систем. Тез. докл. Кишинёв, 9-11 октября 1979 г.

10. БУХШТАБ А.А. Теория чисел.-М.: Просвещение. 1966. -383 с.

11. СКОРНЯКОВ Л.А. Элементы теории структур.-М.: Наука, 1970. - 148 с.

12. МИРЕНКОВ Н.Н., ФИШЕРМАН С.Б. Алгоритмы распознавания подсистем заданных структур в ОВС. -В кн.: Вычислительные системы. Теория однородных вычислительных систем. Вып. 63. Новосибирск, 1975, с. 44-53.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 ноября 1982 года