МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 519.652

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Б.И. Квасов

Предложены алгоритмы интерполяции функций с ограниченными разрывами типа "скачок" квадратическими сплайнами. Показано, что предлагаемая методика обеспечивает максимальный возможный для квадратических сплайнов порядок приближения. Рассмотрен вариационный подход к построению интерполяционного сплайна.

§1. Задача интерполяции. Алгоритм

Пусть на отрезке $[a,b]$ требуется интерполировать кусочно-гладкую функцию $f(x)$ с ограниченными разрывами типа "скачок" в узлах некоторой сетки Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$. Будем считать, что интерполируемые значения $y_i=f(\bar{x}_{i+1})$ заданы в точках $\bar{x}_{i+1}=(x_i+x_{i+1})/2$, $i=0,1,\ldots,N-1$, и известна функция $p(x)$ такая, что выражение $p(x)f(x)$ непрерывно. Для простоты будем предполагать $p(x)$ кусочно-постоянной $p(x)=p_i\neq 0$ для $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,N-1$. Такая функция может быть построена, например, по правилу [1, с.206] $p_0=1$, $p_i=p_{i-1}f(x_i-0)/f(x_i+0)$, $i=1,2,\ldots,N-1$.

Для решения поставленной задачи рассмотрим квадратический сплайн $S(x)$, который на каждом интервале (x_i,x_{i+1}), $i=0,1,\ldots,N-1$, совпадает с некоторым квадратным многочленом и удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &p_{i-1}S^{(r)}(x_i-0)=p_iS^{(r)}(x_i+0), \quad r=0,1; \quad i=1,2,\ldots,N-1,\\ &S(\bar{x}_{i+1})=y_i, \quad i=0,1,\ldots,N-1. \end{aligned}\right\}\quad(1.1)$$

Отметим, что при $p_i=1$, $i=0,1,\ldots,N-1$, $S(x)$ - стандартный квадратический сплайн [2] (см. также [3]).

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуется задание краевых условий, в качестве которых рассмотрим условия одного из следующих типов:

I. $S(a) = f_0$, $S(b) = f_N$.

II. $S'(a) = f'_0$, $S'(b) = f'_N$.

III. Условия периодичности. Будем считать, что соотношения (I.I) выполняются и при $i = N$, причем $p_N = p_0$.

IV. $S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$, $i=1,N-1$; $p_0=p_1$, $p_{N-2}=p_{N-1}$.

Введем обозначения: $S_i = p_{i-1}S(x_i-0) = p_i S(x_i+0)$, $i = 1,2,\ldots$ $\ldots,N-1$, $S_0 = p_0 S(x_0+0)$, $S_N = p_{N-1}S(x_N-0)$. Тогда для $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$S(x) = (1-t)(1-2t)\frac{S_i}{p_i} + 4t(1-t)y_i + t(2t-1)\frac{S_{i+1}}{p_i}, \qquad (1.2)$$

где $t = (x-x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1}-x_i$.

В силу соотношений (I.I) для нахождения параметров сплайна имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda_i S_{i-1} + 3S_i + \mu_i S_{i+1} = c_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \qquad (1.3)$$

где $\lambda_i = 1-\mu_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $c_i = 4\lambda_i p_{i-1} y_{i-1} + 4\mu_i p_i y_i$.

Замыкающие систему (I.3) краевые соотношения перечисленных выше типов имеют вид:

I. $S_0 = p_0 f_0$, $S_N = p_{N-1} f_N$.

II. $3S_0 + S_1 = p_0(4y_0 - h_0 f'_0)$, $S_{N-1} + 3S_N = p_{N-1}(4y_{N-1} + h_{N-1} f'_N)$.

III. В периодическом случае к (I.3) добавляется такое же уравнение с $i=N$ и полагается $h_N = h_0$, $S_N = S_0$, $S_{N+1} = S_1$.

IV. $h_i^2 S_{i-1} + (h_i^2 - h_{i-1}^2)S_i - h_{i-1}^2 S_{i+1} = 2p_i(h_i^2 y_{i-1} - h_{i-1}^2 y_i)$, $i=1,N-1$.

Полученные системы для неизвестных S_i отличаются от соответствующих систем для стандартного квадратического сплайна [3] только правыми частями. Как следствие обеспечены существование и единственность рассматриваемых сплайнов в случае любого из краевых условий типов I-IV.

Более эффективным при практических вычислениях является представление сплайна $S(x)$ посредством параметров $S'_i = p_{i-1}S'(x_i-0) = p_i S'(x_i+0)$, $i=1,2,\ldots,N-1$, $S'_0 = p_0 S'(x_0+0)$, $S'_N = p_{N-1}S'(x_N-0)$.

В терминах этих величин для $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = y_i + (2t-1)\frac{h_i}{8p_i}[(3-2t)S'_i + (2t+1)S'_{i+1}] \ . \qquad (1.4)$$

Выполнение условия (I.I) при $r=0$ дает здесь следующую систему для нахождения параметров сплайна:

$$\mu_i S'_{i-1} + 3S'_i + \lambda_i S'_{i+1} = 8\frac{p_i y_i - p_{i-1} y_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad i = 1,2,\dots,N-1, \qquad (1.5)$$

к которой нужно добавить граничные соотношения

I. $3S'_0 + S'_1 = 8p_0(y_0 - f_0)/h_0$, $S'_{N-1} + 3S'_N = 8p_{N-1}(f_N - y_{N-1})/h_{N-1}$.

П. $S'_0 = p_0 f'_0$, $S'_N = p_{N-1} f'_N$.

Ш. В периодическом случае уравнения (I.4) считаются выполняющимися и при $i=N$ и полагается $h_N = h_0$, $S'_N = S'_0$, $S'_{N+1} = S'_1$.

IУ. $\lambda_i S'_{i-1} - S'_i + \mu_i S'_{i+1} = 0$, $i = 1, N-1$.

В случае краевых условий типов I-Ш матрицы систем имеют диагональное преобладание. Для краевых условий типа IУ, исключив посредством граничных соотношений неизвестные S'_0, S'_N из (I.4), получим систему также с диагональным преобладанием. При практических вычислениях в целях уменьшения числа выполняемых арифметических операций рекомендуется переписать эти системы относительно неизвестных $\bar{S}'_i = S'_i/2$, одновременно умножая i-е уравнение на $h_{i-1} + h_i$. После вычисления прогонкой всех $\bar{S}'_i$ интерполяцию целесообразно осуществлять по формуле $S(x) = y_i + (x - \bar{x}_{i+1})[A_i + (x - \bar{x}_{i+1})B_i]$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, с коэффициентами $A_i = \bar{S}'_i + \bar{S}'_{i+1}$, $B_i = (\bar{S}'_{i+1} - \bar{S}'_i)/h_i$.

§2. Оценки погрешности интерполяции

Пусть $L_\infty[a,b]$ - пространство измеримых и ограниченных в существенном на $[a,b]$ функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Через $W^3_\infty[a,b]$ обозначим множество функций с абсолютно непрерывной второй производной и третьей производной из $L_\infty[a,b]$. Обозначение $W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$ используем для класса функций $f(x)$ с ограниченными разрывами на сетке Δ таких, что $f(x) \in W^3_\infty[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,N-1$. Предполагая, что интерполируемая функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$p_{i-1} f^{(r)}(x_i - 0) = p_i f^{(r)}(x_i + 0), \quad r=0,1; \quad i=1,2,\dots,N-1, \qquad (2.1)$$

введем обозначения $f^{(r)}_i = p_{i-1} f^{(r)}(x_i - 0) = p_i f^{(r)}(x_i + 0)$, $i = 1,2,\dots$

$\ldots,N-1,\ f_0^{(r)}=p_0 f^{(r)}(x_0+0),\ \ f_N^{(r)}=p_{N-1} f^{(r)}(x_N-0),\ \ r=0,1.$
Положим также $\bar{h} = \max\limits_i h_i$.

ЛЕММА. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$ и удовлетворяет краевым условиям одного из типов I, II, III, то при выполнении условий (2.1) справедливы оценки при $i = 0,1,\ldots,N$:

$$|S_i - f_i| \le \max_i |p_i| \frac{\bar{h}^3}{24} \|f'''\|_\infty , \tag{2.2}$$

$$|S_i' - f_i'| \le \max_i |p_i| \frac{\bar{h}^2}{6} \|f'''\|_\infty . \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай краевых условий типа I. Из уравнений (1.3) с учетом краевых условий для неизвестных $q_i = S_i - f_i$, $i = 0,1,\ldots,N$, имеем систему

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i q_{i-1} + 3q_i + \mu_i q_{i+1} = \tilde{c}_i , \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \\ &q_0 = q_N = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где согласно формуле Тейлора

$$\tilde{c}_i = \tfrac{1}{2}\lambda_i h^3_{i-1} p_{i-1} \int_0^1 \varphi(\tau) f'''(x_{i-1}+h_{i-1}\tau)\,d\tau - \tfrac{1}{2}\mu_i h_i^3 p_i \int_0^1 \varphi(1-\tau) f'''(x_i+h_i\tau)\,d\tau$$

с подынтегральной функцией

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \le \tau \le 1/2, \\ (3\tau-1)(1-\tau), & 1/2 \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Оценивая интегралы с помощью неравенства Гёльдера, получаем $|\tilde{c}_i| \le \max\limits_i |p_i| \frac{\bar{h}^3}{12} \|f'''\|_\infty$, $i = 1,2,\ldots,N-1$. Поэтому, пользуясь диагональным преобладанием системы (2.4) и применяя следствие Д.I из [I], приходим к оценке (2.2). Таким же образом устанавливается эта оценка в случае краевых условий типа II, III. Исходя из системы (I.5), аналогично получим оценку (2.3). Лемма доказана.

Отметим, что оценки вида (2.2), (2.3) имеют место и в случае краевых условий типа IV, но с большими постоянными. Методика их вывода не отличается от использовавшейся. Ограничения на длины предграничных интервалов $[x_0,x_1]$, $[x_{N-1},x_N]$, гарантирующие выполнение оценок (2.2), (2.3) и в случае краевых условий типа IV, приведены в [3].

ТЕОРЕМА. Если $s(x)$ интерполирует функцию $f(x)\in W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$ и удовлетворяет краевым условиям одного из типов I, II, III, то при выполнении соотношений (2.1) справедливы оценки

$$\|s^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty\le (C_r+\tfrac{8}{3}\max_i|p_i|/\min_i|p_i|)(\tfrac{\bar h}{4})^{3-r}\|f'''\|_\infty,\quad r=0,1\ ,$$

с постоянными $C_0=0$, $C_1=2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (1.2) следует, что для $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$s(x)-f(x)=h_i^3 I+(1-t)(1-2t)\frac{s_i-f_i}{p_i}+t(2t-1)\frac{s_{i+1}-f_{i+1}}{p_i}\ ,$$

где в силу формулы Тейлора

$$I=t(2t-1)\int_t^1\frac{(1-\tau)^2}{2}f'''(x_i+h_i\tau)d\tau+(1-t)(1-2t)\int_t^0\frac{\tau^2}{2}f'''(x_i+h_i\tau)d\tau+$$

$$+t(1-t)\int_t^{1/2}\frac{(1-2\tau)^2}{2}f'''(x_i+h_i\tau)d\tau\ .$$

Оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера и привлекая оценку (2.2), находим

$$|s(x)-f(x)|\le\frac{t(1-t)|1-2t|}{12}h_i^3\|f'''\|_\infty+|1-2t|\frac{1}{|p_i|}\max_i|s_i-f_i|\le$$

$$\le\max_i|p_i|/\min_i|p_i|\frac{\bar h^3}{24}\|f'''\|_\infty.$$

В силу (1.4) $s'(x)-f'(x)=h_i^2 I_1+[(1-t)(s_i'-f_i')+t(s_{i+1}'-f_{i+1}')]/p_i$, где

$$I_1=(1-t)\int_0^t\tau f'''(x_i+h_i\tau)d\tau+t\int_t^1(1-\tau)f'''(x_i+h_i\tau)d\tau\ ,$$

и аналогично имеем

$$|s'(x)-f'(x)|\le\frac{t(1-t)}{2}h_i^2\|f'''\|_\infty+\frac{1}{|p_i|}\max_i|s_i'-f_i'|\le$$

$$\le(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{6}\max_i|p_i|/\min_i|p_i|)\bar h^2\|f'''\|_\infty\ .$$

Теорема доказана.

На практике условие (2.I) при $r=1$ естественно не обязательно выполняется. Нетрудно показать, что это, вообще говоря, приводит к снижению точности приближения до $O(\bar{h})$. Если точек x_i, где указанное условие не выполняется, немного, то можно локализовать их влияние, выбирая ближайшие с ним шаги сетки h_{i-1}, h_i достаточно малыми. Это позволит избежать потери порядка приближения. Более детально этот вопрос рассмотрен в [3].

§3. Вариационный подход к построению интерполяционного сплайна

Для построения интерполяционного сплайна можно рассмотреть также задачу о нахождении минимума функционала $I(S)=\int_a^b[(pS)']^2dx$ на множестве введенных в §I квадратических сплайнов, для которых выполнение соотношений (I.I) требуется только при $r=0$.

В силу формулы (I.2) имеем

$$I(S)=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{3h_i}[7S_i^2+16p_i^2y_i^2+7S_{i+1}^2-16p_iS_iy_i+2S_iS_{i+1}-16p_iy_iS_{i+1}].$$

Условие стационарной точки $\partial I/\partial S_i=0$, $i=0,1,\ldots,N$, дает следующую систему для определения параметров сплайна:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{7}{h_0}S_0+\frac{1}{h_0}S_1=\frac{8p_0}{h_0}y_0,\\
&\frac{1}{h_{i-1}}S_{i-1}+7\Big(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\Big)S_i+\frac{1}{h_i}S_{i+1}=\frac{8p_{i-1}}{h_{i-1}}y_{i-1}+\frac{8p_i}{h_i}y_i,\\
&\qquad\qquad i=1,2,\ldots,N-1,\\
&\frac{1}{h_{N-1}}S_{N-1}+\frac{7}{h_{N-1}}S_N=\frac{8p_{N-1}}{h_{N-1}}y_{N-1},
\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$

матрица которой имеет диагональное преобладание, и, следовательно, сплайн существует и единствен. Нетрудно показать, что он доставляет минимум функционалу $I(S)$. Действительно, пусть $AS=Hy$ – матричная запись системы (3.I), где $S=(S_0,S_1,\ldots,S_N)^T$, $y=(y_0,y_1,\ldots,y_{N-1})^T$, а A, H – соответственно квадратная и прямоугольная матрица размерностей $(N+1)\times(N+1)$ и $(N+1)\times N$. Через $\bar{S}$ обозначим решение системы (3.I). Тогда выражение для функционала $I(S)$ можно переписать в виде

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(4p_i y_i)^2}{3h_i} + \frac{1}{3}(AS-2Hy, S) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(4p_i y_i)^2}{3h_i} + \frac{1}{3}(A(S-\bar{S}), S-\bar{S}) - \frac{1}{3}(A\bar{S}, \bar{S}).$$

Здесь (.,.) означает скалярное произведение. Так как A - симметричная положительно определенная матрица, то очевидно, что I принимает наименьшее значение при $S = \bar{S}$.

Оценим погрешность получаемого на этом пути приближения. Пусть, например, $S(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям и, следовательно, $h_N = h_0$, $S_N = S_0$, $S_{N+1} = S_1$. Будем считать, что выполнены соотношения (2.I). Тогда уравнения (3.I) можно переписать относительно неизвестных $q_i = S_i - f_i$ в виде

$$\lambda_i q_{i-1} + 7q_i + \mu_i q_{i+1} = \tilde{c}_i, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{3.2}$$

где в силу формулы Тейлора

$$\tilde{c}_i = \frac{1}{2}\lambda_i h_{i-1}^2 p_{i-1} f''(x_i - 0) + \frac{1}{2}\mu_i h_i^2 p_i f''(x_i + 0) + \ldots \quad .$$

Как следствие, пользуясь диагональным преобладанием системы (3.2), приходим к оценке $|S_i - f_i| \le \frac{1}{12}\max_i |p_i| \bar{h}^2 \|f''\|_\infty + O(\bar{h}^3)$, которая по порядку улучшена быть не может. Поступая далее аналогично тому, как это делалось в §2, имеем $S(x) - f(x) = O(\bar{h}^2)$. Таким образом, точность получаемого приближения по порядку хуже, чем достигаемая с помощью методики, описанной в §I.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. MARSDEN M.J. Quadratic spline interpolation.- Bull. Amer. Math.Soc., 1974, v.80, N 5, p. 903-906.

3. КВАСОВ Б.И. Интерполяция квадратическими сплайнами. -Препринт Ин-та теор. и прикл. механики СО АН СССР, Новосибирск, 1981, № 3-81.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 мая 1983 года