АНАЛИЗ РАЗНОТИПНЫХ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 99

УДК 517

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

С.В. Нагаев

Рассматриваемая в статье задача возникла в связи с изучением идеально организованных иерархических систем [I]. Для любой последовательности $f_j(u)$, $j=1\div m$, функций действительного переменного определим семейство функций nm переменных

$$\mathfrak{M}(f_1,f_2,\dots,f_m,c,\alpha)=\{\varphi(X):\ X=\{x_{ij}:\ i=1\div n,\ j=1\div m\};\ \varphi(X)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} f_j(x_{ij});\ (\Sigma_1^n c_i^{1/\alpha})^{\alpha}=c,\ c_i>0\}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть каждая из функций $f_j(u)$, $j=1\div m$, задана на $(0,\infty)$, положительна, строго убывает и имеет строго возрастающую логарифмическую производную $f_j'(u)/f_j(u)$.

Если $\alpha>1$ и любая $\varphi\in\mathfrak{M}(f_1,\dots,f_m,c,\alpha)$ имеет локальный минимум во внутренней точке области $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=x_j$, $j=1\div m$, $x_{ij}>0$, при любых $x_j>0$ и

$$\varphi(X^0)=c\,\Pi_1^n f_j(x_j), \tag{1}$$

где X^0 – точка локального минимума, то

$$f_j(u)=b_j u^{\alpha_j},\quad j=1\div m, \tag{2}$$

где $\alpha_j<0$ удовлетворяют условию

$$\Sigma_1^m \alpha_j = 1 - \alpha,$$

а $b_j > 0$ — произвольные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что убывание $-f'_j/f_j$ и f_j влечет убывание $-f'_j$.

Кроме того, из монотонности производной f'_j следует ее непрерывность, поскольку разрывность f'_j приводит к несовпадению правой и левой производной в точках разрыва. Это замечание относится и к логарифмической производной.

Фиксируем какой-нибудь набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющий условию

$$(\Sigma_1^n c_i^{1/\alpha})^\alpha = c \ . \tag{3}$$

Введем функцию Лагранжа

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} f(x_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}).$$

Пусть $X^0 = \{x^0_{ij}\}$, $i = 1{\div}n$, $j = 1{\div}m$. Дифференцируя $\Phi(X)$, мы находим, что

$$c_i f'(x^0_{ij}) \prod_{k \neq j} f_k(x^0_{ik}) = \lambda_j. \tag{4}$$

Положим для краткости

$$\left.\begin{aligned} \prod_{k \neq j} f_k(x^0_{ik}) &= \Pi^0_{ij}, \\ \prod_{k \neq j} f_k(x_k) &= \Pi_j . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Введем обозначение $a_i(x_j) = x^0_{ij}/n$. Очевидно, $0 < a_i(x_j) < 1$ и $\forall 1 \le j \le m$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_j) = 1 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} a'_i(x_j) = 0 \ . \tag{6}$$

Дифференцируя по x_j обе части равенства

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{m} f_k(a(x_k)x_k) = c \prod_{k=1}^{m} f_k(x_k)$$

и учитывая (5), мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i(x_j) + a_i'(x_j)x_j)f'(x_{ij}^0)\ \Pi_{ij}^0 = c\ f_j'(x_j)\ \Pi_j. \tag{7}$$

В силу (4) и (6)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x_j)f'(x_{ij}^0)\ \Pi_{ij}^0 = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_i(x_j) = \lambda_j, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i a_i'(x_j)x_j f'(x_{ij}^0)\ \Pi_{ij}^0 = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_i'(x_j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует

$$\lambda_j = c\ \Pi_j f_j'(x_j). \tag{9}$$

Умножая обе части (4) на $f_j(x_{ij}^0)/f_j'(x_{ij}^0)$ и суммируя потом по i, мы заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{m} f_k(x_{ik}^0) = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} f_j(x_{ij}^0)/f_j'(x_{ij}^0). \tag{10}$$

Из (I0), (9) и (I) следует

$$f_j(x_j)/f_j'(x_j) = \sum_{i=1}^{n} f_j(x_{ij}^0)/f_j'(x_{ij}^0). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$c_i f_j'(x_{ij}^0)\ \Pi_{ij}^0 = \lambda_j, \quad j = 1 \div m, \tag{12}$$

где i фиксировано. Очевидно, $f_j'(x_{ij}^0)\ \Pi_{ij}^0\ /f_k'(x_{ik}^0)\ \Pi_{ik}^0 = \lambda_j\ /\lambda_k$. Отсюда

$$f_k'(x_{ik}^0)/f_k(x_{ik}^0) = (\lambda_k/\lambda_j)(f_j'(x_{ij}^0)/f_j(x_{ij}^0)). \tag{13}$$

Полагая $\varphi_j(u) = f_j'(u)/f_j(u)$, мы находим, что

$$x_{ik}^0 = \varphi^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\,\varphi(x_{ij}^0)\right). \tag{14}$$

Подставляя теперь в (I2) вместо каждого x_{ik}^0, $k \neq j$, его представление (I4), мы получаем

$$c_i^{-1} = f_j'(x_{ij}^0) \prod_{k\neq j} f_k\left(\varphi_j^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\,\varphi_j(x_{ij}^0)\right)\right)\lambda_j^{-1}. \tag{15}$$

Функция $\varphi_j^{-1}(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\ \varphi_j(\cdot))$ строго возрастает и непрерывна.

Поэтому функция $f_k\left(\varphi_j^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\ \varphi_j(\cdot)\right)\right)$ строго убывает и непрерывна. Учитывая еще, что функция $-f_j'(\cdot)$ убывает и $\lambda_j < 0$, мы заключаем, что функция

$$\omega_j(\cdot) = \lambda_j/f_j'(\cdot) \prod_{k\neq j} f_k\left(\varphi_j^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\ \varphi_j(\cdot)\right)\right)$$

строго возрастает, непрерывна и положительна.

Очевидно, функция $\omega_j(\cdot)$ имеет обратную $\omega_j^{-1}(\cdot)$ и вследствие (I5)

$$\omega_j^{-1}(c_i) = x_{ij}^0. \tag{16}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА. Пусть непрерывная строго возрастающая положительная функция $f(u)$ удовлетворяет условию

$$\Sigma_1^k f(u_j) = 1, \tag{17}$$

если $\Sigma_1^k u_j=1$, $u_j \geq 0$. Тогда этим же свойством обладает и обратная функция $f^{-1}(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\exists v_1^0, v_2^0, \ldots, v_k^0$ такие, что $\Sigma_1^k v_j^0 = 1$, $v_j^0 \geq 0$ и $\Sigma_1^k f^{-1}(v_j^0) < 1$.. Заметим, что в силу (I7) $\Sigma_1^k f(u_j) < 1$, если $\Sigma_1^k u_j < 1$. Действительно, $\Sigma_1^k f(u_j) < \Sigma_1^k f(u_j) + f(1 - \Sigma_1^{k-1} u_j) = 1$. Поэтому $1 = \Sigma_1^k v_j^0 = \Sigma_1^k f(f^{-1}(v_j^0)) < 1$. Мы пришли к противоречию. Аналогично исключается случай $\Sigma_1^k f^{-1}(v_j^0) > 1$. □

Функция $f(u) = \omega_j^{-1}(cu^\alpha)/x_j$ удовлетворяет условиям леммы. Поэтому в силу (3) и (I6) $\Sigma_1^n(\omega_j(x_{ij}^0))^{1/\alpha} = c^{1/\alpha}$.

Это, в свою очередь, означает, что любой набор x_{ij}^0, удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^n x_{ij}^0 = x_j$, реализуется при некоторых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющих (3).

Возвращаясь теперь к (II), мы видим, что функция $\psi_j(u) = 1/\varphi_j(u)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\psi(u) = \Sigma_1^n\ \psi(u_i), \tag{18}$$

где $\Sigma_1^n u_i = u$.

Известно, что при условии монотонности уравнение (18) имеет лишь решения вида $\psi(u) = au$. Таким образом, $f'_j(u)/f_j(u) = 1/au$, т.е.

$$f_j(u) = b_j\, u^{\alpha_j}, \tag{19}$$

где $\alpha_j < 0$. Вследствие (9), (13) и (19)

$$x_k/x^0_{ik} = x_j/x^0_{ij}. \tag{20}$$

Полагая $\beta_i = x^0_{ik}/x_k$, мы получаем из (4) и (9), что

$$c_i = c\ \beta_i^{1-\Sigma_1^n \alpha_j}\,.$$

Отсюда $(\Sigma_1^n c_i^{1/\beta})^\beta = c$, где $\beta = 1 - \Sigma_1^n \alpha_j$.

Но при $\beta \neq \alpha$ и $c_i > 0$, $i = 1 \div n$, $(\Sigma_1^n c_i^{1/\beta})^\beta \neq (\Sigma_1^n c_i^{1/\alpha})^\alpha$ (см., например, [2, с. 43, теорема 19]). Следовательно, $\alpha = \beta$, т.е. справедливо представление (2). □

Литература

1. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем I. -В кн.: Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с.3-28.

2. ХАРДИ Г.Г., ЛИТТЛЬВУД Д.К., ПОЛИА Г. Неравенства.-М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 ноября 1983 года