

УДК 007:62-50

ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ (Д,С)-АССОЦИАЦИЯМИ
В ТЕСТОВОМ ПОДХОДЕ

А.Н.Дмитриев, Е.А.Смертин

Данная работа является дальнейшим расширением и модификацией тестового подхода [1-4]. Необходимость развития подхода вытекает как из внутренних задач логико-комбинаторного направления дискретной математики, так и из практических нужд обнаружения закономерностей, содержащихся в описаниях естественнонаучных объектов, например, геологические объекты, тела, процессы. Материал, подлежащий дальнейшему изложению, представляет собой естественное продолжение работ [12,14,15].

Рассматриваются прямоугольные таблицы, состоящие из нулей и единиц. Пусть D - перечень целевых условий к множеству бинарных отношений строк в T , а C - перечень целевых условий к виду строк таблицы T . Тогда если строки таблицы T и отношения между ними удовлетворяют (D,C) -условиям, то в таблице T имеется (D,C) -закономерность.

Среди проблем прикладной математики проблема обнаружения закономерностей, выливающаяся в конечном счете в предсказание прямых целевых свойств объектов по косвенным признакам, начинает приобретать все большую значимость. В настоящей работе рассматривается следующая задача этого профиля. Пусть некоторое множество объектов охарактеризовано набором признаков, причем признаки x_1, x_2, \dots, x_n - характеристические, а признак x_{n+1} - целевой. Пусть дана прямоугольная таблица T из нулей и единиц, в которой строки соответствуют тем объектам, для которых значение x_{n+1} известно.

Предполагается, что символом "1" обозначается наличие признака у объекта, а "0" - отсутствие, причем "1" для соответствующего объекта отражает его достоинство в том смысле, что "1" благопри-

ятна большему значению x_{n+1} , а "0" отражает в этом смысле "недостаток".

Оправданием неизвариантности метода относительно замены "0" на "1" и обратно - "1" на "0" является, с геологической точки зрения, то, что, как обнаружено в процессе решения геологических задач, геолог, интуитивно или на основании опыта ставит "1" тому значению характеристического признака, которое соответствует повышению целевой значимости объекта.

Математическое обоснование необходимости учета этой неизвариантности и ее положительного влияния рассматривалось и дано в работах [16,17].

Кроме того, в кандидатской диссертации А.П.Мацака проводилось экспериментальное сравнение методов инвариантного относительно замены "0" на "1" и неизвариантного к такой замене, которое выявило предпочтительность, на материале А.П.Мацака, решения по неизвариантному методу.

Пусть обнаружена закономерность в таблице Т, которая позволяет по признакам x_1, x_2, \dots, x_n давать оценку строк S_1, S_2, \dots, S_m таблицы Т по целевой значимости. Требуется в предположении, что строки таблицы T_{Π} подчиняются той же закономерности, дать оценку значений признака x_{n+1} для строк таблицы T_{Π} .

В работе в качестве закономерности на таблице Т обнаруживается множество (Д,С)-ассоциаций, которое, как будет показано, позволяет давать оценку целевых свойств строк таблицы Т. Показано, как с помощью (Д,С)-ассоциаций получают оценки значений признака x_{n+1} для строк таблицы T_{Π} .

Строки таблицы T_{Π} соответствуют тем объектам, для которых значения признака x_{n+1} заранее неизвестно.

Как отмечал в выступлениях на конференциях Ю.А.Воронин, целевая значимость строк T_{Π} грубо может оцениваться количеством ее единиц. И это так до некоторой степени. Однако при оценке строк по количеству единиц не учитывается взаимоотношение между строками, которое играет важную роль, если мы хотим оценивать значения x_{n+1} точнее. Причем окажется, что разные единицы имеют разный вес и некоторые строки с меньшим числом единиц приобретут больший вес, чем строки с большим числом единиц, за счет этого разного веса различных единиц. Так оно и оказывается при решении реальных задач, причем тестовые характеристики точнее характеризуют значения целевого признака x_{n+1} , чем простые количества единиц.

Таким образом, существенным дополнением к учету разной значимости "0" и "1" в одном и том же столбце является учет того, что и символы "1", стоящие в разных столбцах, различаются по своей значимости. Эта значимость оценивается тем, насколько часто тот или иной столбец участвует в выполнении целевых условий к строкам, некоторыми комплексами столбцов - тестами, ассоциациями и т.д.

Элементарные целевые условия к виду строк эмпирических данных:

- а) требование наличия "достоинства" ("1") в строке,
- б) требование наличия "недостатка" ("0") в строке,
- в) наличие "достоинства и недостатка" ("0", "1") в строке,
- г) "пустое" условие - независимость от требований "а" - "в"

Элементарные целевые условия к отношениям строк эмпирических данных:

- а) требование различности строк,
- б) требование сходства строк,
- в) требование одновременно и сходства и различности строк,
- г) "пустое" условие.

Каждый вид целевых условий, взятый отдельно, порождает в тестовом подходе информационные единицы таких двух последовательностей:

- Д: а) Р-тесты - элементарная единица различия строк в Т [1,2].
б) Q-тесты - элементарная единица сходства строк в Т [3].
в) Н-тесты - элементарная единица равновесия строк в Т [4].
- С: а) Р-несовпадения - "портретная" единица различий строк в Т (от нулевой) [6].
б) Q-пакеты - "портретная" единица сходств строк в Т (с нулевой) [7].
в) Н-несовпадения - "портретная" единица равновесия строк в Т (с нулевой); введены здесь.

В первой последовательности достигнута необходимая полнота набора информационных единиц за счет введения понятия Д-тестов, порождаемых соответствующим выбором перечня целевых условий - Д [5].

Во второй последовательности целесообразно сделать аналогичное обобщение к Р-несовпадениям и Q-пакетам - С-несовпадения.

На строках бинарной таблицы Т можно обнаружить, что одни из них целиком состоят из "1", другие - из "0", а третьи содержат и

"0" и "1". Следовательно, и целевые требования к виду строк имеют хотя бы 3 градации.

C_a - строка S_{i_1} должна содержать хотя бы одну единицу;

C_b - строка S_{i_2} должна иметь хотя бы один нуль;

C_v - строка S_{i_3} должна иметь и "0" и "1".

Некоторые строки могут быть свободны от всех требований $C_a - C_v$, что условно выражается требованием:

C_r - строка S_{i_4} свободна от любого из требований $C_a - C_v$.

Допустим, что каждой из строк таблицы T сопоставлено одно из требований $C_a - C_r$, обозначим перечень этих требований через C . Набор столбцов таблицы T , по которому все строки удовлетворяют перечню C , называется C -несовпадением. C -несовпадение называется тупиковым, если удаление любого столбца переводит его в набор столбцов, не являющийся C -несовпадением.

Для иллюстрации общности введенного определения положим: если все требования к строкам таблицы T суть требования C_a , то C -несовпадения представляют собой P -несовпадения для таблицы T ; если все требования вида C_b , то C -несовпадения являются Q -пакетами.

Для поиска тупиковых C -несовпадений таблицы T можно воспользоваться обычным алгоритмом поиска всех тупиковых несовпадений для таблицы H , получаемой из T по таким правилам:

1) все строки таблицы T , которые, согласно перечню C , удовлетворяют требованию C_a , заносятся в H без изменения;

2) строки, удовлетворяющие требованию C_b , в таблицу H заносятся как их противоположности;

3) если строка из T удовлетворяет требованию C_v , то в таблицу H заносятся как сама эта строка, так и противоположная ей;

4) строки, удовлетворяющие C_r , не дают никакого вклада в построение таблицы H .

Представим введенные в [8] узлы и T -наборы следующим образом. Набор столбцов t таблицы T называется Q -набором, если при удалении любого столбца он переходит в набор, содержащий всевозможные строки.

Q -набор, являющийся одновременно T -набором, называется H -набором. Очевидно, что H -наборы представляют собой узлы таблицы T . В T -наборах строки не должны охватывать полностью двоичный куб, а в узлах, кроме того, каждый поднабор столбцов своими строками охватывает весь двоичный куб.

Введем определение новых информационных единиц, которые объединяют обе последовательности информационных единиц.

Пусть на отношения между строками наложен перечень целевых условий D , а сами строки должны удовлетворять целевым требованиям перечня C . Таблица T называется (D, C) -допустимой, если ее строки удовлетворяют всем требованиям перечня D . Набор столбцов t таблицы T называется (D, C) -тестом, если таблица, образуемая его столбцами - (D, C) -допустимая таблица. (D, C) -тест t называется тупиковым, если при удалении любого столбца он переходит в набор, который не является (D, C) -тестом. Очевидно, что и D -тесты и C -несовпадения суть частные случаи (D, C) -тестов.

Оба набора информационных единиц решают задачу построения всех информационных единиц для таблицы. Эта задача обычно решается построением всех тупиковых несовпадений для таблицы сравнений T^* , которая для поиска тупиковых (D, C) -тестов строится следующим путем:

1) в таблицу T^* включаются все строки таблицы H (построение которой из таблицы T дано выше четырьмя правилами);

2) каждой паре строк таблицы T , которая должна, согласно перечню D , различаться, соответствует следующее включение: в таблицу T заносится строка, представляющая собой покомпонентное сложение (по модулю 2) строк этой пары;

3) в T^* включаются все строки, противоположные строкам, представляющим собой покомпонентное сложение (по модулю 2) строк, принадлежащих парам, которые по перечню D должны быть сходны;

4) тем парам строк таблицы T , которые должны быть согласованы (по перечню D), отвечает занесение в T^* как строк, получаемых покомпонентным сложением (по модулю 2) строк такой пары, так и противоположной к ней; никаких других строк, кроме отмеченных в п. п. 1-4, в таблицу T^* не включается.

Алгоритм поиска всех тупиковых несовпадений таблицы T излагается, например, в работе [9].

Для поиска тупиковых T -наборов и узлов употребляется такой же алгоритм [8], где T^* строится для каждого T -набора или узла своя, что представляет известное неудобство.

Однако за счет того, что в таблице T^* , получаемой для поиска C -несовпадений, T -наборов или узлов, число строк обычно намного меньше, чем число строк в T^* , получаемой для поиска D -тестов, средняя длина и количество всех тупиковых C -несовпадений, T -набо-

ров или узлов для таблицы T обычно меньше, чем средняя длина и количество всех тупиковых D -тестов. Поэтому время поиска всех тупиковых S -несовпадений, T -наборов или узлов для таблицы T часто меньше (не всегда), чем время поиска всех тупиковых D -тестов.

Тем не менее результаты распознавания по тупиковым S -несовпадениями, T -наборам или узлам для ряда случаев могут быть слабее, чем по D -тестам, так как в них не учитываются отношения между строками, а их обычно больше, чем число строк таблицы T .

В связи с этим целесообразно ввести следующее, промежуточное понятие - понятие ассоциации [14]. Дадим наиболее общее определение [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (D, S) -ассоциацией для таблицы T называется набор столбцов T , по которому отношения между строками удовлетворяют перечню целевых условий D , а строки удовлетворяют перечню целевых требований S полнее, чем по любому собственному поднабору его столбцов.

Имеет место

ТЕОРЕМА I. Всякое подмножество столбцов тупикового (D, S) -теста является (D, S) -ассоциацией. Всякая (D, S) -ассоциация таблицы T входит в тупиковые (D, S) -тесты, если не самой таблицы T , то таблицы B , полученной добавлением к T определенных столбцов.

Содержательно, как следует из теоремы, (D, S) -ассоциации представляют собой такие наборы столбцов, которые могут быть достроены до тупиковых (D, S) -тестов путем добавления столбцов.

Полезность введения (D, S) -ассоциаций можно усмотреть из работы [10], где употребляется частный вид (D, S) -ассоциаций - совместимые множества для построения алгоритма поиска всех тупиковых тестов, имеющего при $m < n$ меньшую трудоемкость по сравнению с переборными алгоритмами [13].

В дальнейшем они могут применяться в качестве обобщенных признаков таблицы T , таких признаков, которые входят в значительно меньшее число тупиковых (D, S) -тестов, чем обычные признаки (столбцы таблицы T).

Как ассоциации [14], так и тупиковые тесты являются наборами попарно неповторных столбцов [11]. Сама же таблица T нередко име-

ет в своем составе тождественные и зеркальные друг другу столбцы. Это позволило сформулировать алгоритмы поиска числа всех тупиковых тестов таблицы T с учетом повторяемостей ее столбцов [12]. Опишем его.

Для T строится производная таблица T' удалением из T всех столбцов, за исключением одного представителя для каждого типа столбцов. Столбцы принадлежат одному типу, если они тождественные или зеркальные между собой. Пусть $\tau(T')$ - множество всех тупиковых тестов таблицы T' , а x_1, x_2, \dots, x_n - типы ее столбцов. В таблице T число столбцов типа x_j обозначается через r_j и называется повторяемостью столбца типа x_j в таблице T . Число K тупиковых тестов таблицы T в зависимости от повторяемостей ее столбцов выражается многочленом

$$K = \varphi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{t \in \tau(T')} \Pi(t), \quad (1)$$

где $\Pi(t) = r(x_{j_1}), r(x_{j_2}), \dots, r(x_{j_1})$, если $t = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_1})$, что формулируется в виде теоремы в работах [11, 12, 6]. Числа K_j - тех тупиковых тестов, в которые входит столбец x_j , $j=1, 2, \dots, n$, в [12] также выражались в виде многочлена от повторяемостей. Здесь мы установим связь между многочленами для K , K_j и вообще K_{j_1, j_2, \dots, j_1} , где K_{j_1, j_2, \dots, j_1} представляет собой число всех тупиковых тестов таблицы T , в которые входит набор столбцов $t = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_1})$. А именно справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Для длин $l \geq 1$

$$K_{j_1, j_2, \dots, j_1} = \frac{\partial^l \varphi(r_1, r_2, \dots, r_n)}{\partial r_{j_1} \partial r_{j_2} \dots \partial r_{j_1}}, \quad (2)$$

где ∂ - символ обычной частной производной, а $\varphi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ определяется (1).

Теорема 2 верна и для самого общего случая (Д,С)-тестов, если в качестве T берется таблица, получаемая из T вычеркиванием всех тождественных между собой столбцов, кроме одного представителя для каждого вида тождественных столбцов (другими словами, зеркальные столбцы здесь относятся к разным типам), а в качестве повторяемостей - число столбцов в множествах тождественных столбцов из T .

Пусть $\delta(T)$ - множество всех тупиковых (Д,С)-тестов таблицы Т. Имеют место следующие комбинаторные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum_{t \in \delta(T)} C^0 1(t), \quad \sum_{j=1}^n K_j = \sum_{t \in \delta(T)} C_1^1(t), \\ &\dots \\ & \left(\sum_{j_1, j_2, \dots, j_1} K_{j_1, j_2, \dots, j_1} \right) = \sum_{t \in \delta(T)} C_1^1(t), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $l(t)$ - длина тупикового (Д,С)-теста t , $C_1^q(t)$ ($q = 0, 1, \dots, l$) число сочетаний из $l(t)$ элементов по q , причем $C_1^1(t) = 0$ при $l > l(t)$. Из равенств (3), складывая их левые части между собой и то же осуществляя с правыми частями, приходим к соотношению

$$K + \sum_{j=1}^n K_j + \dots = \sum_{t \in \delta(T)} 2^{l(t)} = \sum_{l=1}^n K^l \cdot 2^{l-1},$$

где K^l - число все тупиковых (Д,С)-тестов длины l , а чередуя сложение и вычитание, придем к равенству

$$K - \sum_{j=1}^n K_j + \sum_{j_1, j_2} K_{j_1, j_2} - \dots = 0,$$

откуда*)

$$K = \sum_{j=1}^n K_j - \sum_{j_1, j_2} K_{j_1, j_2} + \sum_{j_1, j_2, j_3} K_{j_1, j_2, j_3} - \dots$$

Справедливо также равенство

$$K + K_{j_1, j_2} + \dots = \sum_{j=1}^n K_j + \sum_{j_1, j_2, j_3} K_{j_1, j_2, j_3} + \dots$$

связывающее между собой четные и нечетные члены вида $K(j_1, j_2, \dots, j_1)$.

В [2], в качестве оценки информационного веса столбца x_j употребляется

$$P_j = \frac{K_j}{K}.$$

*) Подобно формуле в автореф. дис. В.О.Красавчикова "Модификация тестового подхода к анализу таблиц описаний на основе понятия тупикового табличного Т-свойства", Саратов, 1982, с. 1-17.

Целесообразно в качестве оценки ассоциации $a=(j_1, j_2, \dots, j_1)$ ввести отношение

$$P_a = P_{j_1, j_2, \dots, j_1} = \frac{K_{j_1, j_2, \dots, j_1}}{K}. \quad (7)$$

Назовем его информационным весом (D, C) -ассоциации a . Оценка строки \tilde{S} в работе [2] задается величиной

$$P(\tilde{S}) = \sum_{j=1}^n S_j \cdot P_j. \quad (8)$$

Дадим ее обобщение. Пусть α - некоторое множество (D, C) -ассоциаций. Тогда информационным весом строки \tilde{S} по множеству α называется величина

$$P^\alpha(S) = \sum_{a \in \alpha} P_a(S_{j_1} + S_{j_2} + \dots + S_{j_1}). \quad (9)$$

Обоснованием для величин (9) может быть следующая

ТЕОРЕМА 3. Если множество ассоциаций α совпадает с множеством $\delta(T)$ всех тупиковых (D, C) -тестов для таблицы T , то $P^\alpha(\tilde{S}) = P(\tilde{S})$.

Пусть строки \tilde{S}_i таблицы T упорядочены по величинам (9), так что

$$P^\alpha(\tilde{S}_{i_1}) \geq P^\alpha(\tilde{S}_{i_2}) \geq \dots \geq P^\alpha(\tilde{S}_{i_m}), \quad (10)$$

а строка $\tilde{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ подлежит оценке. Пусть $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$ - пороги отнесения по величинам $P^\alpha(\tilde{S})$ к строкам $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_m$ соответственно.

Предлагается такой алгоритм распознавания: если $|P^\alpha(\tilde{S}) - P^\alpha(\tilde{S}_i)| < \epsilon_i$, то \tilde{S} относится к \tilde{S}_i ; если $|P^\alpha(\tilde{S}) - P^\alpha(\tilde{S}_i)| \geq \epsilon_i$ для всех i , то \tilde{S} не относится ни к какой из строк $\tilde{S}_i, i=1, 2, \dots, m$.

Суммируя вышеизложенное, отметим:

I. Согласно теореме I наращивание (D, C) -ассоциаций до тупиковых (D, C) -тестов позволяет не только с возрастающей полнотой удовлетворять условиям пары (D, C) , но и с помощью ассоциаций выявлять полноту (D, C) -допустимости таблицы. Учет числа ассоциативных (D, C) -условий и их отнесением к общему числу условий в пе-

речных Д,С можно характеризовать проявленность закономерностей, содержащихся в таблице исходных данных в неявном виде.

2. По теореме 2 можно получить аналитическую оценку числа тупиковых (Д,С)-тестов (с участием той или иной ассоциации) посредством частных производных для общего числа тупиковых (Д,С)-тестов, как функции от повторяемости столбцов бинарной таблицы.

3. Теорема 3 позволяет полагать, что величина $R^{\alpha}(s)$, формула (3), пригодна для случая, когда α - некоторое множество ассоциаций является промежуточным между множеством отдельных столбцов Т и множеством всех тупиковых (Д,С)-тестов таблицы.

Таким образом, множество (Д,С)-ассоциаций, выявляемое на бинарных таблицах эмпирических данных, играет роль информационных единиц при обнаружении скрытых закономерностей, содержащихся в описаниях объектов.

Авторы признательны Е.Е.Витлеву за полезные замечания, высказанные им в ходе обсуждения работы.

Л и т е р а т у р а

1. ЧЕГИС И.А., ЯБЛОНСКИЙ С.В. Логические способы контроля работы электрических схем.-Труды МИАН им.Стеклова, т.51, М., 1958, с. 207-360.

2. ДМИТРИЕВ А.Н., ЖУРАВШЕВ Ю.И., КРЕНДЕЛЕВ Ф.П. О математических принципах классификации предметов и явлений. -В кн.: Дискретный анализ, вып. 7, Новосибирск, Наука, 1966, с.3-15.

3. СМЕРТИН Е.А. G-тесты в задачах тестового распознавания. -В кн.: Применение математических методов и ЭВМ для решения прогнозных задач нефтяной геологии. Новосибирск, 1973, с. 65-66.

4. ДМИТРИЕВ А.Н. Новые тестовые разработки в задачах прогнозирования рудоносности на примере трапповых интрузий. -В кн.: Математические методы при прогнозе рудоносности. М., Наука, 1977, с. 104-163.

5. СМЕРТИН Е.А. Вопросы теории и алгоритмы на базе построения Д-тестов. -В кн.: Логико-информационные исследования в геологии. Новосибирск, 1977, с. 48-67.

6. ТРОФИМУК А.А., ВЬШЕМИРСКИЙ В.С., ДМИТРИЕВ А.Н. и др. Распознавание образов гигантских нефтяных месторождений. -В кн.: Проблемы нефтегазоносности Сибири. Новосибирск, Наука, 1971, с.34-50.

7. ДМИТРИЕВ А.Н., КРАСАВЧИКОВ В.О. Тестовый подход в решении проблем обработки геологической информации. -В кн.: Логико-информационные исследования в геологии. Новосибирск, 1977, с.3-24.

8. КРАСАВЧИКОВ В.О. Комплекс алгоритмов для программ распознавания по Т-свойствам. -В кн.: Программные комплексы для целевой обработки информации. Новосибирск, 1977, с. 151-162.

9. БУГАЕШ А.Н., ДУДЕНКО Л.Н. Математические методы при прогнозировании месторождений полезных ископаемых. -Л.: Недра, 1976. - 270 с.

10. ДЮКОВА Е.В. Об одном алгоритме построения тупиковых тестов. -Сб. работ по математической кибернетике. Вып.1. М., ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 167-185.

11. ДМИТРИЕВ А.Н., СМЕРТИН Е.А. Связь тестовых параметров бинарных таблиц с повторяемостью столбцов. -В кн.: Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, 1969, с. 104.

12. ДМИТРИЕВ А.Н., СМЕРТИН Е.А. Алгоритм вычисления тестовых параметров бинарных таблиц в задачах распознавания. -В кн.: Алгоритмы и программы решения геологических задач на ЭЦМ, вып. 3, Алма-Ата, 1970, с. 119-133.

13. СЛУЦКАЯ Т.Л. Алгоритмы вычисления информационных весов признаков. -В кн.: Дискретный анализ. Вып. 12, Новосибирск, 1968, с. 75-91.

14. СМЕРТИН Е.А. Представление тестовых параметров и распознавание по ассоциациям столбцов. -В кн.: VI Всесоюзная конференция. Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов. Саратов, 1983, с. 11-14.

15. ДМИТРИЕВ А.Н., СМЕРТИН Е.А. Обнаружение закономерностей (Д,С)-ассоциациями в тестовом подходе. -В кн.: IV Всесоюзный симпозиум по машинному обнаружению закономерностей "МОЗ-4", тезисы докладов, 1983, с. 33.

16. ПЕРЕЯСЛАВСКИЙ В.И. О линейном тестовом алгоритме распознавания образов. -ДАН СССР, т.271, №5, 1983, с.1083-1085.

17. СМЕРТИН Е.А. Д-тестовый подход в анализе эмпирических данных (бинарный случай). -В кн.: Всесоюзная конференция "Теория классификаций и анализ данных", тезисы, ч.П, Новосибирск, 1981, с. 14-16.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 марта 1984 года