АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 103

УДК 519.1

ОЦЕНКА ТРУДОЕМКОСТИ ПОИСКА КЛИК В ГРАФЕ С ИЗВЕСТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ МЕТОДОМ РЕКУРСИВНОГО РАЗБОРА

Ю.Е. Бессонов

К поиску клик (максимальных по включению полных подграфов) в заданном графе сводятся многие практически важные комбинаторные задачи. Графы, возникающие в прикладных задачах, как правило, образуют сравнительно узкие классы, характеризуемые определенными значениями числовых параметров. Поэтому представляет интерес исследование зависимости вычислительной сложности алгоритмов поиска клик от различных параметров графа. В настоящей работе, продолжающей исследования [1], дается асимптотическая оценка трудоемкости класса алгоритмов поиска клик, зависящая от отношения порядка графа к его плотности.

Пусть к обыкновенному графу G применяется операция рекурсивного разбора [1], состоящая в том, что граф последовательно разбивается на множество подграфов: G разбивается на две части - подграф G', порожденный вершиной v с минимальной степенью и ее окружением, и подграф $G'' = G - v$; аналогичное разбиение применяется к обеим частям, к подграфам, полученным из них, и т.д. до тех пор, пока не будут получены полные подграфы (рис.1). Множество полученных подграфов содержит все клики (и, возможно, некоторые подграфы клик) исходного графа.

Данная схема рекурсивного разбора служит основой для построения алгоритмов поиска клик [1]. Поэтому оценка трудоемкости разбора является оценкой трудоемкости алгоритмов поиска клик, построенных по этой схеме.

Для оценки трудоемкости разбора используем модель вычислительного процесса - дерево разбора. Дерево разбора $T(G)$ графа G определяется следующим образом. Корневая вершина $T(G)$ соответст-

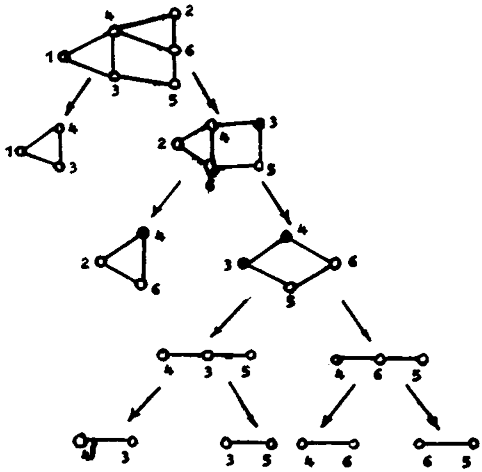

Рис.I

вует графу G; вершины, смежные с корневой, соответствуют графам G' и G'' и т.д.; висячие вершины соответствуют полным графам. Для числа операций $\tau(G)$, требуемых для выполнения разбора графа G, в [2] была получена оценка: $\tau(G) \le c\,p^2(G)\,\eta(G)$, где c – константа, $p(G)$ – порядок графа G, $\eta(G)$ – число вершин дерева разбора.

Пусть G имеет p вершин и плотность m (плотностью называется число вершин в наибольшей клике). В [I] было доказано, что $\eta(G) = O(x_0^p)$, где $x_0 > 0$ – корень уравнения $x^k - x^{k-1} - 1 = 0$, $k = \left[\frac{p}{m}\right]$. Значения $x_0 = x_0(k)$ при различных k приведены в таблице.

Таблица

k	I	2	3	5	I0	I4	50	I00
$x_0(k)$	2	I,62I	I,462	I,325	I,I98	I,I55	I,059	I,054

Для оценки функции $x_0(k)$ сделаем замену $z = x^{-1}$ и придем к уравнению

$$z^k = 1 - z. \qquad (I)$$

Рассмотрим графики функций z^k и $1 - z$. Из рис.2 видно, что уравнение (I) имеет единственный корень $0 < z_0(k) < 1$, который с ростом k стремится к I. Пусть $z_0(k) = 1 - \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \in (0, 1)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. При больших k ввиду малости ε_k имеем: $(1-\varepsilon_k)^k = 1 - k\varepsilon_k + o(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$. Последнее равенство вытекает из (I) и влечет соотношение: $1 + o(\varepsilon_k) = \varepsilon_k + k\cdot\varepsilon_k$, откуда $\varepsilon_k = O(k^{-1})$. Поскольку $\varepsilon_k = 1 - z_0(k) = z_0^k(k) = x_0^{-k}(k)$, то $x_0^k(k) = O(k)$. Следовательно, $\tau(G) = O(p^2 \cdot x_0^p) = O(p^2 \cdot k^{p/k}) = O(p^2 \cdot (\frac{p}{m})^m)$.

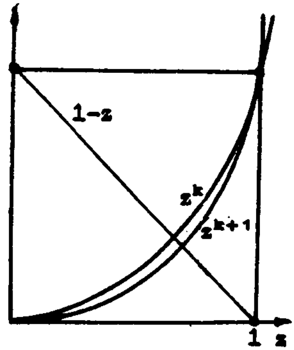

Рис.2

Для сравнения приведем оценку тривиального алгоритма перебора всех подграфов порядка m с последующей проверкой их на полноту: $O(m^2\binom{p}{m}) = O(m^{3/2}\cdot\left(\frac{p}{m}\right)^m\cdot e^m)$. Отметим, что плотность графа может зависеть от его порядка: в худшем случае $m = O(p)$.

Из полученной оценки можно иметь различные следствия, располагая информацией о зависимости плотности графа от его порядка. Например, задачи поиска пересечений, распознавания изоморфизма двух графов и изоморфного вхождения одного графа в другой сводятся к поиску клик в графе соответствий [I], для которого в худшем случае $m = O(\sqrt{p})$. Следовательно, трудоемкость решения этих задач имеет верхнюю оценку $O\left(p^{\frac{\sqrt{p}}{2}+2}\right)$.

Литература

I. БЕССОНОВ Ю.Е., СКОРОБОГАТОВ В.А. Об одном семействе схем рекурсивного разбора графа. -В кн.: Машинные методы обнаружения закономерностей, анализа структур и проектирования (Вычислительные системы, вып. 92). Новосибирск, 1982, с. 3-49.

2. БЕССОНОВ Ю.Е., СКОРОБОГАТОВ В.А. О рекурсивном разборе графов. -В кн.: Алгоритмические основы обработки структурной информации (Вычислительные системы, вып. 85). Новосибирск, 198I, с.3-20.

Поступила в ред.-изд.отд.
II января 1984 года