

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ
КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

О. В. Климова

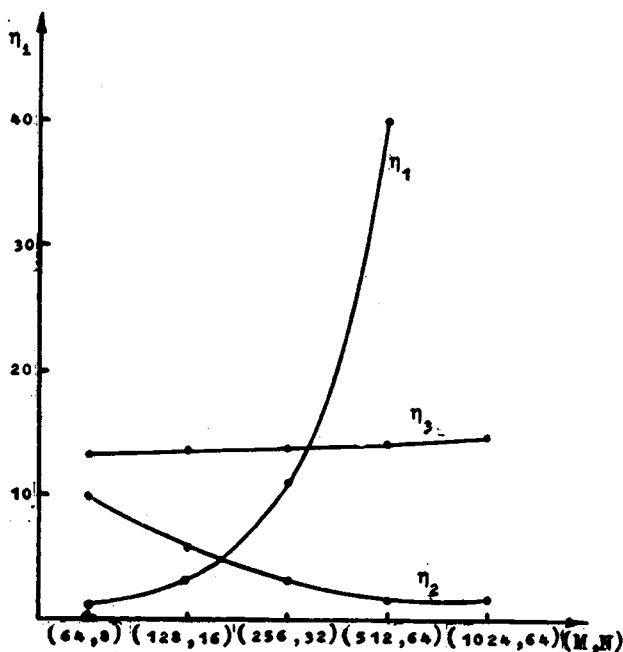
1. Создание программируемых многопроцессорных систем позволяет повысить эффективность решения широкого круга задач цифровой обработки сигналов за счет проведения параллельных вычислений. Следовательно, актуальной становится задача создания параллельных алгоритмов решения конкретных задач цифровой обработки сигналов, характеризующихся параллелизмом множества объектов, параллелизмом независимых ветвей и параллелизмом смежных операций [1]. Параллельный принцип организации вычислительного процесса особенно необходим при обработке двумерных сигналов, когда число умножений в алгоритмах вычисления двумерных функций свертки и корреляции растет пропорционально произведению квадратов $M^2 \times N^2$ размерностей $M \times M$ и $N \times N$ обрабатываемых последовательностей. С другой стороны, проблема повышения быстродействия указанных задач решается путем поиска алгоритмов, учитывающих свойства процесса цифровой обработки дискретных сигналов на ЦМ. Этому требованию отвечают разработанные в последнее время теоретико-числовые алгоритмы, в частности числовые преобразования Рейдера, которые, с одной стороны, обладают базисами, инвариантными относительно циклических сдвигов, а с другой — лишены тех недостатков, которые сопровождают реализацию алгоритмов быстрого преобразования Фурье на ЦМ, а именно: 1) операций умножения комплексных чисел, требующих большого объема вычислений; 2) операций округления результатов вычислений, что приводит к ухудшению отношения сигнал/шум; 3) необходимости представления весовых множителей с конечной точностью, что также ухудшает отношение сигнал/шум. Отсутствие указанных недостатков у чис-

ловых преобразованиях Рейдера объясняется тем, что эти преобразования, определенные в конечном поле или кольце с характеристикой, равной t - числу Ферма: $F_t = 2^{2^t} + 1$, используют присущий внутренней структуре ЦМ цифровой ортогональный базис $\lambda_\alpha(t) = e^{j\alpha t} = 2^{j\alpha t}$, что ведет к упрощению машинных алгоритмов вследствие исключения из них операции умножения на комплексные числа, по существу, заменяемых операциями сдвига. Таким образом, за счет использования числовых преобразований Рейдера может быть повышено быстродействие алгоритмов вычисления функций свертки и корреляции одномерных и двумерных цифровых сигналов. Однако непосредственное применение преобразований Рейдера при определении указанных функций последовательностей большой длины не представляется возможным. Следовательно, возникает проблема использования преобразований Рейдера при цифровой обработке последовательностей большой длины [2,3]. Рассмотрение этого вопроса выходит за пределы данной статьи, однако решение проблемы определения одномерных функций свертки и корреляции последовательностей большой длины с помощью числовых преобразований Рейдера существует, и в его рамках применение последнего приводит к существенному выигрышу по сравнению с другими методами; один из вариантов этого решения рассмотрен в [3]. В данной работе предлагается алгоритм вычисления двумерной корреляционной функции с помощью параллельного вычисления ряда одномерных корреляционных функций, определяемых с помощью преобразований Рейдера. Таким образом, открывается возможность использования теоретико-числовых преобразований для определения двумерной корреляционной функции последовательностей произвольной длины. А использование симбиоза принципов соответствия алгоритма вычисления процессу его цифровой обработки на ЦМ, т.е. применения числовых преобразований Рейдера, и параллелизма при проведении вычислений позволяет получить быстродействующий алгоритм определения двумерной корреляционной функции. Действительно, параллелизм позволяет выявить структуру вычислительного процесса, а следовательно, определить архитектуру многопроцессорной вычислительной системы, обеспечивающей его эффективную реализацию. Использование числовых преобразований Рейдера максимально адаптирует этот процесс к его реализации на ЦМ, обеспечивая простоту архитектуры этой многопроцессорной системы.

2. Вычисление аperiodической корреляционной функции

$$R(m, n) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N F_1(j, k) F_2(j-m, k-n) \quad (1)$$

двух числовых массивов размерностью $M \times M$ и $N \times N$, соответственно определяющих функции $F_1(j, k)$ и $F_2(j, k)$, можно проводить с помощью вычисления периодической корреляционной функции размером $M \times M$ (при $N < M$) (для чего массив меньшей размерности наращивается с помощью нулевых значений до массива большей размерности). Значения искомой аperiodической функции будут значения вычисленной периодической функции, содержащиеся на пересечении первых $(m-n+1)$ строк и столбцов. Периодическую корреляцию функций $F_1(j, k)$ и $F_2(j, k)$ можно вычислить с помощью методов спектрального анализа, используя двумерное дискретное преобразование Фурье, реализуемое алгоритмами быстрого преобразования Фурье. Это позволяет ускорить вычисление функции корреляции на ЦМ по сравнению с ее определе-



нием прямым методом умножения непосредственно по формуле (1). На рисунке приведен график зависимости коэффициента ускорения вычислений $R(m, n)$ с помощью быстрого преобразования Фурье относительно метода умножения от размеров $M \times M$ и $N \times N$ функций $F_1(j, k)$ и $F_2(j, k)$. Очевидно, дальнейшего повышения быстродействия определения двумерной корреля-

ционной функции можно достичь за счет использования числового преобразования Рейдера. При этом квантованные значения $F_{KB}(j,k)$ двумерных сигналов, обрабатываемых на ЦМ, рассматриваются как функции, заданные на абелевой группе $H = Z_M \times Z_M$ и принимающие значения в некотором конечном поле или кольце K_{F_t} классов вычетов

по модулю числа Ферма $F_t = 2^{2^t} + 1$. А возможность проведения гармонического анализа над кольцом K_{F_t} классов вычетов по модулю Ферма определяется выполнением соотношения: $Z_M | OF(t)$, $OF(t) = \text{НОД}\{p_1, p_2\}$, если $F_t = p_1 p_2$ - составное - между структурой группы H точек определения сигнала $F_{KB}(j,k)$ и числового поля возможных значений сигнала F_t . Основной процедурой при вычислении $R(m,n)$ с помощью гармонического анализа над кольцом с комплексных чисел и над кольцом K_{F_t} классов вычетов по модулю Ферма является выполнение быстрого преобразования Фурье и быстрых числовых преобразований Рейдера соответственно, так как эффективным способом вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье и аналогично двумерного преобразования Рейдера являются последовательное вычисление одномерных быстрого преобразования Фурье и быстрых числовых преобразований Рейдера соответственно от строк и столбцов обрабатываемых двумерных массивов. Однако при вычислении двумерной корреляционной функции последовательностей большой длины ограничения, связанные с применением теоретико-числовых преобразований [2], не позволяют применять гармонический анализ над кольцом K_{F_t} для определения $R(m,n)$. С другой стороны, высокие характеристики быстродействия преобразований Рейдера и аппаратная простота реализации стимулируют поиск путей их применения для решения более широкого круга задач и, в частности, сформулированной задачи определения двумерной корреляционной функции последовательностей произвольной длины.

3. Двумерная аperiodическая корреляционная функция $R(m,n)$ представляет собой массив размерностью $(M-N+1) \times (M-N+1)$, получаемый в результате цифровой обработки сигналов $F_1(j,k)$ и $F_2(j,k)$ с размерностями $M \times M$ и $N \times N$ соответственно, причем $N < M$. Рассматривая процесс определения $R(m,n)$, можно заметить, что эту функцию нетрудно получить с помощью вычисления $N(M-N+1)$ одномерных аperiodических корреляций между различными сочетаниями строк обрабатываемых массивов. Действительно, обращаясь к формуле (I), получаем:

$$\begin{aligned}
 R(m, n) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N F_1(j, k) F_2(j-m, k-n) = \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N F_1(k) F_2(j, m) (k-n) = \sum_{j=1}^N R_{j, m}(n), \quad (2) \\
 m, n &= 1, \dots, M-N+1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для каждой из m строк, содержащей n значений $R(m, n)$, необходимо вычислить сумму N одномерных n -значных аперiodических $R_{j, m}(n)$ функций, получить которые можно с помощью определения M -значных периодических функций $R_{j, m}(\tau)$, $\tau = 1, \dots, M$. Такая структура вычисления $R(m, n)$ дает возможность использовать аппарат гармонического анализа над кольцом K_{F_3} для параллельного вычисления одномерных аперiodических функций. При этом максимальный уровень параллелизма равен $N(M-N+1)$, тогда быстроедействие получения двумерной корреляционной функции $R(m, n)$ можно оценить временем вычисления одномерной корреляционной функции $R_{j, m}(\tau)$. Причем для определения $R(m, n)$ используются только первые $(M-N+1)$ значений периодических функций $R_{j, m}(\tau)$.

ПРИМЕР 1. Определим двумерную корреляционную функцию $R(m, n)$ числовых массивов (обозначенных A и B) с помощью вычисления $N(M-N+1)$ одномерных периодических функций. При $M = 4$, $N = 2$ $N(M-N+1) = 6$. Зададим параметры числового преобразования Рейдера, которое будем использовать для определения $R_{j, m}(\tau)$, $\tau = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$, $m = 1, \dots, 3$. Для $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$ при $M = 4$ целое 2 имеет порядок 16, поэтому $2^4 = 16$ является ϵ порядка 4, а отрицательный базис определяется функциями $\lambda_{\alpha}(t) = \epsilon^{\alpha t} = 16^{\alpha t}$, $\alpha, t = 0, 1, \dots, 3$. Тогда матрицы прямого

$$S^R(\alpha) = \sum_{t=0}^{M-1} X_{KB}(t) 16^{\alpha t} \pmod{F_3}$$

и обратного

$$X_{KB}(t) = M^{-1} \sum_{\alpha=0}^{M-1} S^R(\alpha) 16^{-\alpha t} \pmod{F_3}$$

преобразований Рейдера в конечном поле с характеристикой F_3 имеют вид:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & -1 & -16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -16 & -1 & 16 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad R^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -16 & -1 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 16 & -1 & -16 \end{vmatrix}$$

соответственно, а $M^{-1} = -64 \pmod{257}$. Выполнение условия $\max_{m,n} R(m,n) \leq (F_s - 1)/2$ обеспечивает возможность применения числового преобразования Рейдера для вычисления одномерных периодических функций $R_{j,m}(\tau)$. Определим массивы A и B:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

вектора строк этих массивов будем обозначать $\{X_{KB_{A_1}}\}$ и $\{X_{KB_{\hat{B}_j}}\}$

соответственно. При вычислении периодических корреляционных функций массив B преобразуем в массив \hat{B} . Теперь, действуя на строки матриц A и B преобразованиями R и R^{-1} , получаем соответствующие им спектры Рейдера, которые обозначим $S_{A_1}^R(\alpha)$ и $S_{B_j}^R(\alpha)$:

Прямое преобразование:

$$\begin{aligned} \{X_{KB_{A_1}}\} &= [0, 1, 2, 1]^T \xrightarrow{R} \{S_{A_1}^R\} = [4, -2, 0, -2]^T, \\ \{X_{KB_{A_2}}\} &= [1, 2, 3, 1]^T \xrightarrow{R} \{S_{A_2}^R\} = [7, 14, 1, -18]^T, \\ \{X_{KB_{A_3}}\} &= [2, 1, 0, 2]^T \xrightarrow{R} \{S_{A_3}^R\} = [5, -14, -1, 18]^T, \\ \{X_{KB_{A_4}}\} &= [3, 0, 1, 3]^T \xrightarrow{R} \{S_{A_4}^R\} = [7, -46, 1, 50]^T, \end{aligned}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned} \{X_{KB_{\hat{B}_1}}\} &= [2, 3, 0, 0]^T \xrightarrow{R^{-1}} \{S_{\hat{B}_1}^{R^{-1}}\} = [5, -46, -1, 50]^T, \\ \{X_{KB_{\hat{B}_2}}\} &= [1, 0, 0, 0]^T \xrightarrow{R^{-1}} \{S_{\hat{B}_2}^{R^{-1}}\} = [1, 1, 1, 1]^T, \end{aligned}$$

где T - знак транспонирования. Далее определяем спектры Рейдера

$S_{j,m}^R(\alpha)$ одномерных периодических корреляционных функций, действуя на которые обратным преобразованием Рейдера R^{-1} , получаем значения $R_{j,m}(n)$.

$$\{S_{1,1}^R\} = \{S_{A_1}^R\} \{S_{B_1}^{R^{-1}}\} = [20, 92, 0, -100]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{1,1}(n) = [3, 8, 7]^T,$$

$$\{S_{2,1}^R\} = \{S_{A_2}^R\} \{S_{B_2}^{R^{-1}}\} = [7, -224, 1, -288]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{2,1}(n) = [1, 2, 3]^T,$$

$$\{S_{1,2}^R\} = \{S_{A_2}^R\} \{S_{B_1}^{R^{-1}}\} = [35, -130, -1, -129]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{1,2}(n) = [8, 13, 9]^T,$$

$$\{S_{2,2}^R\} = \{S_{A_3}^R\} \{S_{B_2}^{R^{-1}}\} = [5, -14, -1, 18]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{2,2}(n) = [2, 1, 0]^T,$$

$$\{S_{1,3}^R\} = \{S_{A_3}^R\} \{S_{B_1}^{R^{-1}}\} = [25, 130, 1, 129]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{1,3}(n) = [7, 2, 6]^T,$$

$$\{S_{2,3}^R\} = \{S_{A_4}^R\} \{S_{B_2}^{R^{-1}}\} = [7, -46, 1, 50]^T \xrightarrow{R^{-1}} R_{2,3}(n) = [3, 0, 1]^T.$$

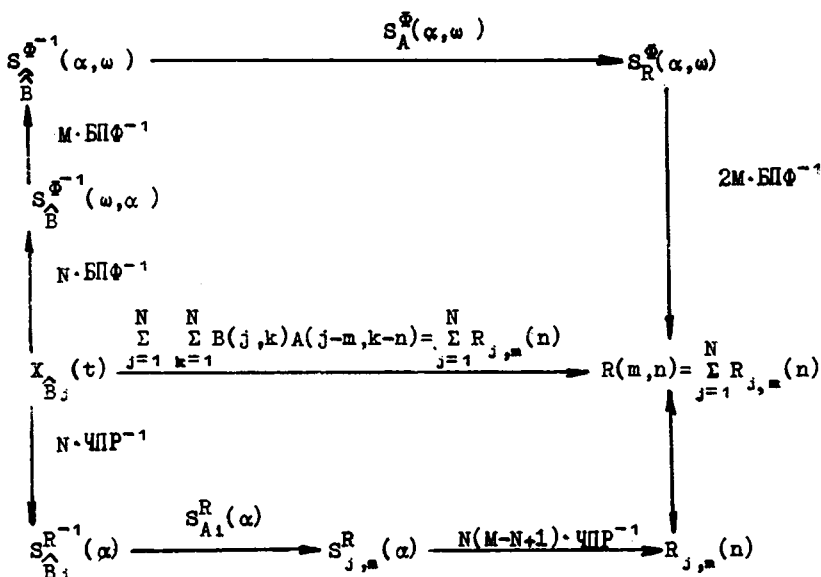
Теперь, используя формулу (2), определяем значения двумерной корреляционной функции $R(m, n)$:

$$R(m, n) = \sum_{j=1}^{N=2} R_{j,m}(n) = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 10 \\ 10 & 14 & 9 \\ 10 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Аналогичный результат может быть получен с помощью вычисления значений $R(m, n)$ методом умножения, согласно (2).

4. Дальнейшие рассуждения будем проводить, пользуясь обозначениями, принятыми в примере I. При определении двумерной корреляционной функции $R(m, n)$ с помощью аппарата гармонического анализа над кольцом S комплексных чисел или над кольцом K_F для решения ряда конкретных задач (таких, как распознавание образов и определение координат одного объекта в области другого по экстремальному значению $R(m, n)$) обычно предполагается, что двумерный спектр Фурье $S_A^{\Phi}(\alpha, \omega)$ массива A , а в нашем случае одномерные спектры Рейдера $S_{A_i}^R$, $i = 1, \dots, M$, строк этого массива известны. Учитывая этот факт, рассмотрим две схемы вычисления $R(m, n)$, представ -

ленные следующей коммутативной диаграммой:



где $t, \alpha, \omega = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \quad m, n = 1, \dots, (M-N+1),$

$\widehat{S}_B^{\Phi^{-1}}(\omega, \alpha)$ - массив спектров Фурье от N строк матрицы \widehat{B} , дополненный нулевыми строками до размерности массива $M \times M$, $\widehat{S}_B^{\Phi^{-1}}(\alpha, \omega)$ -

двумерный спектр Фурье матрицы \widehat{B} , размером $M \times M$, полученной из B с помощью добавления нулевых значений, $S_R^{\Phi}(\alpha, \omega)$ - двумерный спектр Фурье периодической корреляционной функции массивов A и B . По первой схеме мы находим двумерный спектр Фурье $\widehat{S}_B^{\Phi^{-1}}(\alpha, \omega)$ массива \widehat{B} ,

для чего необходимо произвести N обратных быстрых преобразований Фурье строк этого массива - первый этап вычисления, и M обратных быстрых преобразований Фурье от столбцов полученного массива -

второй этап вычисления, при умножении $\widehat{S}_B^{\Phi^{-1}}(\alpha, \omega)$ на спектр Фурье $S_A^{\Phi}(\alpha, \omega)$ массива A получаем двумерный спектр Фурье $S_R^{\Phi}(\alpha, \omega)$ массивов A и B - третий этап вычисления. Действуя на последний обратным двумерным дискретным преобразованием Фурье, с помощью выполнения M быстрых преобразований Фурье над строками массива

$S_R^{\Phi}(\alpha, \omega)$ - четвертый этап вычислений, и M быстрых преобразований Фурье (на диаграмме БФ) над столбцами полученного массива - пятый этап вычислений, находим двумерную периодическую корреляционную функцию массивов A и B , $(M-N+1)(M-N+1)$ значений которой определяют искомую функцию $R(m, n)$. Рассматривая данную схему вычисления двумерной аperiodической корреляционной функции $R(m, n)$ с точки зрения возможности организации параллельных вычислений, можно заметить наличие объектного [I] параллелизма на каждом из указанных этапов проведения вычислений и существование параллелизма смежных операций [I] между 3 и 4 этапами вычисления за счет того, что трудоемкость выполнения M -точечного быстрого преобразования Фурье значительно больше трудоемкости выполнения M операций умножения. Таким образом, максимальный уровень параллелизма вычислений, организованных по первой схеме, относительно выполнения M -точечного быстрого преобразования Фурье и M операций умножения, обеспечивает быстроедействие данной схемы, характеризуемое выполнением: 1) двух обратных быстрых преобразований Фурье, соответствующих 1 и 2 этапам вычисления; 2) M операций умножения; 3) двух обратных быстрых преобразований Фурье, соответствующих 4 и 5 этапам. При этом число процессоров быстрых преобразований Фурье равно M , а число устройств умножения M/t_1 , где t_1 - коэффициент, показывающий, во сколько раз можно сократить число устройств умножения с учетом использования параллелизма смежных операций. Таким образом, аппаратные затраты (с учетом структуры процессора быстрого преобразования Фурье) на реализацию параллельных вычислений по схеме I оказываются значительными. Теперь обратимся ко второй схеме вычисления $R(m, n)$, согласно которой на первом этапе вычисления с помощью N обратных числовых преобразований Рейдера (на диаграмме ЧПР) определяются спектры Рейдера $S_{\hat{B}_j}^{R^{-1}}(\alpha)$ строк массива \hat{B} , далее вычисляются $N(M-N+1)$ спектров Рейдера $S_{j,m}^R(\alpha)$ одномерных периодических корреляционных функций (второй этап вычислений). Действуя на $S_{j,m}^R(\alpha)$ обратным числовым преобразованием Рейдера, получаем одномерные периодические функции $R_{j,m}(n)$, причем используем лишь $(M-N+1)$ их значений, это третий этап вычислений. Последний четвертый этап состоит в суммировании полученных значений $R_{j,m}(n)$, согласно (2). Предложенную схему определения $R(m, n)$ можно реализовать с помощью организации параллельных вычислений, используя: 1) параллелизм независимых вст-

вей [1], наличие которого между 1 и 2 этапами вычислений нетрудно заметить; 2) параллелизм смежных операций между вычислениями 2 и 3, а также 3 и 4 этапов; 3) объектный параллелизм при выполнении второго и третьего этапов вычислений, характеризуемый уровнем параллелизма по числу процессоров числовых преобразований Рейдера $\Pi_{\text{ЧПР}}$ и по числу устройств умножения $\Pi_{\text{УМ}}$. С учетом указанных видов параллелизма получена оценка быстродействия $\text{Tr}_{\text{R}\Pi}^{\text{ЧПР}}$ данного параллельного алгоритма вычисления $R(m, n)$ в эквивалентных сложениях относительно последовательного выполнения M -точечного числового преобразования Рейдера и M операций умножения:

$$\text{Tr}_{\text{R}\Pi} = \left[\frac{N(M-N+1)}{\Pi_{\text{УМ}}} + t_{12} + t_{13} \right] \text{мс}, \quad (3)$$

где C - число операций сложения, производимых за время одного умножения ($C = 3-5$), t_{12} и t_{13} - коэффициенты, показывающие, сколько M -точечных умножений можно выполнить за время одного M -точечного и N -точечного числового преобразования Рейдера соответственно; очевидно, $\Pi_{\text{УМ}} = \Pi_{\text{ТЧП}}/t_{12}$, $\Pi_{\text{ТЧП}}^{\text{max}} = N(M-N+1)$ (ТЧП - теоретико-числовое преобразование). Таким образом, оценка быстродействия предложенного алгоритма при максимальном уровне параллелизма $\Pi_{\text{ТЧП}}^{\text{max}} = N(M-N+1)$ характеризуется временем выполнения M умножений, одного M -точечного и одного N -точечного числовых преобразований Рейдера, т.е. соизмерима с трудоемкостью вычисления одномерной M -точечной корреляционной функции с помощью числового преобразования Рейдера. При этом вычислительная система должна содержать $N(M-N+1)$ процессоров числового преобразования Рейдера и $N(M-N+1)/t_{12}$ устройств умножения. На рисунке приведены зависимости коэффициентов ускорения:

$$\eta_1 = \frac{\text{Tr}_{\text{R}}^{\text{УМ}}}{\text{Tr}_{\text{R}}^{\text{БПФ}}} - \text{вычисления } R(m, n) \text{ с помощью быстрого преобразова-$$

ния Фурье относительно метода умножения; $\text{Tr}_{\text{R}(m, n)}$ - трудоемкости вычисления $R(m, n)$ оценены в эквивалентных сложениях, $C = 3$;

$$\eta_2 = \frac{\text{Tr}_{\text{R}}^{\text{БПФ}}}{\text{Tr}_{\text{R}\Pi}^{\text{ЧПР}}} - \text{вычисления } R(m, n) \text{ с помощью быстрого преобразова-$$

ния Фурье относительно метода определения $R(m, n)$ с помощью числовых преобразований Рейдера, при $\Pi^{UM} = I$;

$$\eta_2 = \frac{T_{PR}^{БПФ}}{T_{PR}^{ЧПР}} - \text{вычисления } R(m, n) \text{ с помощью быстрого преобразова-$$

ния Фурье по схеме I, характеризуемой максимальным уровнем параллелизма, и с помощью числового преобразования Рейдера по схеме 2 (также характеризуемой максимальным уровнем параллелизма $\Pi_{\max}^{ЧП} = N(M-N+1)$) от размерностей (M, N) . Снижение значений коэффициента η_2 при увеличении размерностей (M, N) обусловлено значительным возрастанием общего числа операций (последовательной реализации предложенного параллельного алгоритма вычисления $R(m, n)$ с помощью числового преобразования Рейдера) при увеличении (M, N) . Несмотря на это, даже при минимальном уровне параллелизма $\Pi^{UM} = I$, определенным параллелизмом смежных операций $\Pi^{ЧП} = t_{12}$ и параллелизмом независимых ветвей, характеристика быстродействия второй схемы вычисления $R(m, n)$ выше первой (см. рисунок). При этом следует отметить, что аппаратная реализация процессоров числового преобразования Рейдера отличается простотой, вследствие полного отсутствия операции умножения в алгоритмах числового преобразования Рейдера. Следовательно, число устройств умножения при реализации параллельного алгоритма по второй схеме вычисления $R(m, n)$ определяется уровнем параллелизма Π^{UM} на втором этапе вычисления. Тогда даже при незначительном росте Π^{UM} общий уровень коэффициента η_2 (см. рисунок) заметно повышается, приблизительно в Π^{UM} раз. Таким образом, за счет роста процессоров числового преобразования Рейдера, исключая устройства умножения, можно обеспечить требуемый уровень быстродействия вычисления $R(m, n)$, определяя в (3) Π^{UM} - число устройств умножения. Коэффициент η_2 показывает, что быстродействие, обеспечиваемое алгоритмом вычисления $R(m, n)$ по второй схеме с максимальным уровнем параллелизма, выше быстродействия алгоритма вычисления $R(m, n)$ по первой схеме, также с максимальным уровнем параллелизма. В заключение отметим еще одно достоинство предлагаемого параллельного алгоритма вычисления $R(m, n)$, которое заключается в том, что его реализация с помощью числового преобразования Рейдера лишена существенного недостатка многих параллельных алгоритмов - увеличения ошибок округле-

ния. Действительно, предложенные параллельные алгоритмы [4], в том числе и рассматриваемый в данной статье, как правило, требуют большего количества вычислений [4], чем последовательные, определяющие тот же объект. В связи с этим встает проблема увеличения ошибок округления. Реализация же параллельного алгоритма вычисления $R(m, n)$ с помощью числового преобразования Рейдера полностью исключает ошибки округления.

Л и т е р а т у р а

1. КАРЦЕВ М.А., БРИК В.А. Вычислительные системы и синхронная арифметика. - М.: Радио и связь, 1981. - 359 с.
2. АГАРВАЛ, БАППАС. Теоретико-числовые преобразования для быстрого вычисления цифровой свертки. - ТИИЭР, 1975, № 4, с.6-20.
3. AGARWAL R.C., BURRUS C.S. Fast one-dimensional digital convolution by multi-dimensional techniques. - IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, 1974, v. ASSP-22, N 1, Feb., p.1-10.
4. ФАЛДЕЕВА В.Н., ФАЛДЕЕВ Д.К. Параллельные вычисления в линейной алгебре. - Кибернетика, 1982, № 3, с.18-31, 44.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 октября 1984 г.