

УДК 681.31:323

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ
УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА НА ПОДВИЖНЫХ СЕТКАХ

В.В.Корнеев, М.С.Тарков

В работе [1] рассмотрена параллельная реализация неявных схем расщепления на вычислительных системах с программируемой структурой и показана высокая эффективность используемого метода распараллеливания на примере решения смешанной задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Данная работа ставит своей целью показать возможность эффективного применения этого метода при решении на вычислительных системах с программируемой структурой полученных в [2] уравнений газовой динамики (уравнений Навье-Стокса), описывающих обтекание тел вязким сжимаемым теплопроводным газом. При численном решении таких задач для повышения точности расчетов обычно используются преобразования координат, сгущающие узлы разностной сетки в области больших градиентов. В работе [2] предлагается неявная разностная схема, реализуемая на подвижной разностной сетке.

Исходные уравнения и их аппроксимация

1. В связи с тем, что нашей задачей является распараллеливание вычислений по разностной схеме, предложенной в [2], в этом разделе приводятся сведения, необходимые для понимания работы без обращения к [2].

Полные уравнения газовой динамики для сверхзвукового потока с учетом эффектов вязкости и теплопроводности газа могут быть представлены в векторной форме в виде расщепления по физическим процессам и пространственным переменным:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^4 \Omega_j \bar{f} - BW, \quad (1)$$

где \bar{f} - вектор с компонентами (ρ, u, v, ϵ) , ρ - плотность газа, u, v - проекции вектора скорости на оси координат x, y ; ϵ - внутренняя энергия газа.

Дифференциальные матричные операторы Ω_1 и Ω_2 учитывают члены переноса и вязкие члены в направлении x и y соответственно, а Ω_3 и Ω_4 - члены с давлением в уравнениях движения и члены вида $\text{div } \bar{v}$ в уравнениях неразрывности и энергии по каждому направлению, где \bar{v} - вектор скорости с компонентами u, v . Оставшиеся члены уравнения учтены в BW , где BW - вектор с компонентами $(N_\rho, N_u, N_v, N_\epsilon)$; N_q , $q = \rho, u, v, \epsilon$, являются функциями параметров $p, \rho, u, v, \epsilon, T, \mu, \zeta, \kappa, N_1, N_2, N_3$; а также частных производных первого и второго порядка по пространственным координатам x, y от различных комбинаций указанных параметров. Здесь p - давление, T - температура, μ и ζ - коэффициенты вязкости, κ - коэффициент теплопроводности, N_1, N_2, N_3 - коэффициенты Ляме. Конкретный вид функций N_q , $q = \rho, u, v, \epsilon$, не приводится из-за громоздкости выражений.

Для замыкания системы (I) заданы уравнение состояния

$$p = p(\rho, \epsilon) \quad (2)$$

и законы зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры

$$\mu = \mu(T), \quad \zeta = \zeta(T), \quad \kappa = \kappa(T). \quad (3)$$

2. Для решения системы (I)-(3) расчетная область Q разбивается на ряд подобластей $Q = \sum_{i=1}^J Q_i$ и внутри каждой подобласти используется своя (криволинейная ортогональная) система координат, наиболее приспособленная к границам области или поверхности тела.

Течение (см. рис. I) предполагается симметричным относительно оси $y=0$. На поверхности обтекаемого тела задаются условия $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, где n - внешняя нормаль к поверхности тела, условие охлаждения $T = T_\omega(x, y)$ и условия прилипания $u = v = 0$. Верхняя граница $R_1(x)$ выбирается так, чтобы возмущения телом и ударным переходом не достигали $R_1(x)$. На границе R_2 задаются условия $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ и $\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0$.

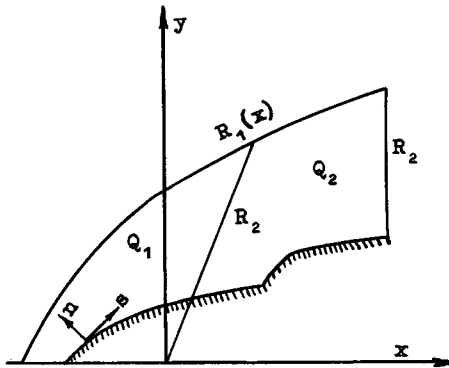


Рис. I

3. Для удобства численного интегрирования расчетная область Q_1 посредством преобразования $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x, y)$ отображается в единичный квадрат $R \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$. Обратное преобразование задается соотношением $x = x(\xi)$, $y = y(\xi, \eta)$. Пространственные производные преобразуются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = z_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + z_1 \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = z_1 \frac{\partial}{\partial \eta},$$

где $z_0(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $z_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, $z(\xi, \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial x}$.

Координата $y(\xi, \eta)$ определяется из решения параболического уравнения со стационарными краевыми условиями

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|^{\beta(t)} + \delta \right) \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y_0, \quad (4)$$

где $q = |u| + |v| + |\rho| + |\epsilon|, \delta \neq 0$, $\beta(t)$ - коэффициент, задающий сгущение координатных линий в направлении η , так что в области больших градиентов функций в направлении η градиенты сетки малы.

Аналогично преобразование $x(\xi)$ находится из стационарного решения уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\delta_1 |K|^{\beta_1} + \epsilon_1 \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (5)$$

со стационарными краевыми условиями $x(0) = 0$, $x(1) = x_0$. Здесь $K(x)$ - продольная кривизна поверхности тела. После нахождения обратного преобразования $x = x(\xi)$, $y = y(\xi, \eta)$ определяются значения коэффициентов преобразования

$$z_0(\xi) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1}, \quad z_1(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^{-1}, \quad z(\xi, \eta) = -z_0 z_1 \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (6)$$

Уравнения (4), (5) решаются на каждом временном шаге.

4. В области $R_H = R \times H$, R - единичный квадрат, $H = [0, T]$, $t \in H$, вводится разностная сетка с постоянными пространственными шагами h_1 и h_2 ($h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2$; N_1, N_2 - число узлов сетки соответственно в направлении ξ, η) и временным шагом τ [2]. В узлах сетки определяется вектор-функция $\bar{r}_h^n = \bar{r}_h(t_n, i h_1, j h_2)$ с компонентами $\rho_h^n, u_h^n, v_h^n, \epsilon_h^n$.

Первые производные по направлениям ξ и η аппроксимируются несимметричными разностными операторами $\Lambda_{p\mp}^k$ с порядком $k = 1, 2$ и симметричными операторами Λ_p второго порядка аппроксимации. Индекс $p = I(2)$ соответствует направлению $\xi(\eta)$. При $p = I$ разностные операторы имеют вид

$$\Lambda_{1\mp}^1 \epsilon_i = \frac{\pm 1}{h_1} (\epsilon_i - \epsilon_{i\mp 1}), \quad (7.1)$$

$$\Lambda_{1\mp}^2 \epsilon_i = \pm \frac{1}{2h_1} (3\epsilon_i - 4\epsilon_{i\mp 1} + \epsilon_{i\mp 2}), \quad (7.2)$$

$$a \Lambda_{1\mp}^k = \frac{a+|a|}{2} \Lambda_{1-}^k + \frac{a-|a|}{2} \Lambda_{1+}^k, \quad (7.3)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} (\Lambda_{1-}^1 + \Lambda_{1+}^1). \quad (7.4)$$

Аналогично вводятся разностные операторы $\Lambda_{2\mp}^k, \Lambda_2$. Вторые производные аппроксимируются симметричными разностными операторами на трехточечном или девятиточечном шаблоне по формулам

$$\Lambda_1 a \Lambda_1 \epsilon_i = \frac{1}{h_1^2} [a_{i+1/2} (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) - a_{i-1/2} (\epsilon_i - \epsilon_{i-1})], \quad (7.5)$$

$$a_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} (a_i + a_{i\pm 1}),$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 b \Lambda_2 \epsilon_{i,j} = & \frac{1}{4h_1 h_2} [b_{i+1,j} (\epsilon_{i+1,j+1} - \epsilon_{i+1,j-1}) - \\ & - b_{i-1,j} (\epsilon_{i-1,j+1} - \epsilon_{i-1,j-1})]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Элементы разностных матричных операторов Ω_{jh}^l , аппроксимирующих дифференциальные операторы Ω_j , $j = 1, 2, 3, 4$, с порядком 1, представляют собой линейные комбинации разностных операторов $\Lambda_{p\mp}^k$ и Λ_p , $p = 1, 2$. Коэффициенты такой комбинации образованы путем выполнения операций умножения или деления над параметрами задачи, заданными в узлах сетки.

Для численного решения системы (I) используется разностная схема расщепления по физическим процессам и пространственным переменным:

$$(E + \tau \alpha_1 \Omega_{1h}^1) \bar{\xi}^{n+1/4} = -\tau B_h^n (W_h^n)^k, \quad (8.1)$$

$$(E + \tau \alpha_2 \Omega_{2h}^1) \bar{\xi}^{n+2/4} = \bar{\xi}^{n+1/4}, \quad (8.2)$$

$$(E + \tau \alpha_3 \Omega_{3h}^1) \bar{\xi}^{n+3/4} = \bar{\xi}^{n+2/4}, \quad (8.3)$$

$$(E + \tau \alpha_4 \Omega_{4h}^1) \bar{\xi}^{n+1} = \bar{\xi}^{n+3/4}, \quad (8.4)$$

$$\bar{I}_h^{n+1} = \bar{I}_h^n + \bar{\xi}^{n+1}. \quad (8.5)$$

Весовые множители α_j выбираются из условия устойчивости разностной схемы (6.1)-(6.5), которая аппроксимирует систему (I) с порядком $O(\tau + h^1)$.

На каждом дробном шаге $n+J/4$, $j = 1, 2, 3, 4$, разностная схема (8.1)-(8.5) реализуется трехточечными ($l = 1$) или пятиточечными ($l = 2$) скалярными прогонками.

5. При переходе к $(n+1)$ -му шагу решения задачи (I)-(3) производится изменение координатной сетки (x, y) путем решения уравнений (4) и (5) с использованием неявной разностной схемы

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \Lambda_2 b \Lambda_2 y_j^{n+1}, \quad (9.1)$$

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = \Lambda_1 a \Lambda_1 x_i^{n+1} \quad (9.2)$$

со стационарными краевыми условиями.

При аппроксимации разностных операторов Λ_1 и Λ_2 на трехточечном шаблоне схема (9.1), (9.2) реализуется трехточечными скалярными прогонками. После получения стационарного решения для (9.1), (9.2) в узлах сетки определяются коэффициенты (6) z_0^n , z^n , z_1^n со вторым порядком аппроксимации

$$\begin{aligned} z_{0ij}^n &= (\Lambda_1^2 x_{1j})^{-1}, z_{1ij}^n = (\Lambda_2^2 y_{1j})^{-1}, \\ z_{ij}^n &= -z_{0i}^n z_{1j}^n \Lambda_1^2 y_j. \end{aligned} \quad (10)$$

Организация вычислений

I. В качестве подсистемы вычислительной системы с программируемой структурой [1], предназначенной для решения задачи, выбираем линейку, состоящую из N_2 элементарных машин (ЭМ), связанных двунаправленными (дуплексными) каналами связи, как показано на рис.2, где каждый канал обозначен стрелкой, указывающей направление передачи данных. Входным и выходным полюсам ЭМ

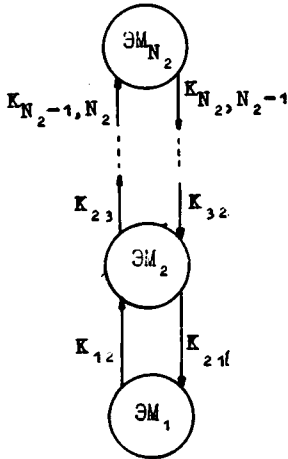


Рис. 2

приписаны метки 1,2. Причем если машины $ЭМ_j$ и $ЭМ_{j+1}$ связаны каналом $K_{j,j+1} = (j_1, j+1_2)$, то эти машины связаны также каналом $K_{j+1,j} = (j+1_2, j_1)$, где $(j_1, j+1_2)$ - канал, присоединенный к 1-му выходному полюсу $ЭМ_j$ и 2-му входному полюсу $ЭМ_{j+1}$. Канал $K_{j,j+1}$ имеет в $ЭМ_j$ очередь $ВХ_j^j$, а в $ЭМ_{j+1}$ входную очередь $ВХ_{j+1}^j$. Функционирование канала $(j_1, j+1_2)$ состоит в том, что он переносит элемент данных из начала очереди $ВХ_j^j$ в конец очереди

$ВХ_{j+1}^j$. Каналы связи могут функционировать одновременно с машинами. Активизация работы канала вызывается присутствием элемента данных в очереди $ВХ_j^j$ и наличием свободного места в очереди $ВХ_{j+1}^j$.

Распределим значения $\bar{r}_{ij} = (\rho_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, \epsilon_{ij}), i=0,1, \dots, N_1+1, j=0,1, \dots, N_2+1$, между машинами $ЭМ_j$ следующим образом. Машины $ЭМ_j, j=2,3, \dots, N_2-1$, содержат строки $\rho_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, \epsilon_{ij}, i=0,1, \dots, N_1+1$, $ЭМ_1$ - строки $\rho_{i0}, u_{i0}, v_{i0}, \epsilon_{i0}, i=0,1, \dots, N_1+1$, и $\rho_{i1}, u_{i1}, v_{i1}, \epsilon_{i1}, i=0,1, \dots, N_1+1$, $ЭМ_{N_2}$ - строки $\rho_{iN_2}, u_{iN_2}, v_{iN_2}, \epsilon_{iN_2}, i=0,1, \dots, N_1+1$, и $\rho_{iN_2}, u_{iN_2}, v_{iN_2}, \epsilon_{iN_2}, i=0,1, \dots, N_1+1$.

Согласно разностной схеме (σ.1)-(8.5) в $ЭМ_j$ для определения на $n+1$ -м шаге компонент $\rho_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}, \epsilon_{ij}^{n+1}$ вектора \bar{r}_{ij}^{n+1} на

k -м дробном шаге, $k=1,2,3,4$, $n+1$ -го шага вычисляются величины $\xi_{\rho_{ij}}^{n+k/4}, \xi_{u_{ij}}^{n+k/4}, \xi_{v_{ij}}^{n+k/4}, \xi_{\epsilon_{ij}}^{n+k/4}$.

Матрицы Ω_{1h}^n и Ω_{2h}^n имеют ненулевые элементы лишь на главной диагонали, поэтому компоненты векторов $\xi^{n+k/4} = (\xi_{\rho}^{n+k/4}, \xi_u^{n+k/4}, \xi_v^{n+k/4}, \xi_{\epsilon}^{n+k/4}), k=1,2$, вычисляются независимо.

Каждая из компонент вектора $\xi^{n+k/4}$ представляет собой двумерный массив, размерности $(N_1+1) \times (N_2+1)$. Например, $\xi_u^{n+k/4} = \{ \xi_{ij}^{n+k/4}, i = 1, 2, \dots, N_1+1, j = 1, 2, \dots, N_2+1 \}$.

Каждая компонента вектора $\xi^{n+1/4} = (\xi_\rho^{n+1/4}, \xi_u^{n+1/4}, \xi_v^{n+1/4}, \xi_\epsilon^{n+1/4})$ определяется путем решения N_2 систем линейных уравнений с $(2l+1)$ -диагональной матрицей при аппроксимации операторов $\Lambda_{1\pm}^1$ и Λ_1^1 на шаблоне из $2l+1$ точек. Эти системы решаются скалярными прогоночками независимо и одновременно, так как все параметры каждой из N_2 систем находятся в одной из N_2 машин специализированной вычислительной системы. Аналогично каждая компонента вектора

$\xi^{n+2/4} = (\xi_\rho^{n+2/4}, \xi_u^{n+2/4}, \xi_v^{n+2/4}, \xi_\epsilon^{n+2/4})$ определяется путем решения N_1 систем. Однако параметры каждой из N_1 систем распределены по машинам $\mathcal{M}_j, j = 1, 2, \dots, N_2$, вычислительной системы. Поэтому решение каждой из этих систем скалярной прогоночкой неизбежно связано с передачей между машинами вычислительной системы прогоночных коэффициентов и других параметров.

2. Рассмотрим решение уравнения (8.2) при аппроксимации операторов $\Lambda_{2\pm}$ и Λ_2 на трехточечном шаблоне.

В качестве примера рассмотрим вычисление компоненты $\xi_u^{n+2/4}$.

Прочие компоненты определяются аналогично. Для компоненты $\xi_u^{n+2/4}$ уравнение (8.2) при $l = 1$ приводится к совокупности N_1 систем \ast вида

$$c_0^n \xi_{1u}^{n+2/4} - b_0^n \xi_{2u}^{n+2/4} = 2h_2^2 \xi_{-1u}^{n+1/4} + a_0^n \xi_{0u}^{n+2/4},$$

$$-a_{j-1}^n \xi_{j-1u}^{n+2/4} + c_{j-1}^n \xi_{ju}^{n+2/4} - b_{j-1}^n \xi_{j+1u}^{n+2/4} = 2h_2^2 \xi_{ju}^{n+1/4}, \quad j=2, \dots, N_2-1, (11)$$

$$-a_{N_2-1}^n \xi_{N_2-1u}^{n+2/4} + c_{N_2-1}^n \xi_{N_2u}^{n+2/4} = 2h_2^2 \xi_{N_2u}^{n+1/4} + b_{N_2-1}^n \xi_{N_2+1u}^{n+2/4}.$$

До начала решения системы (II) в машинах $\mathcal{M}_j, j = 1, 2, \dots, N_2$, производится вычисление коэффициентов $a_{j-1}, c_{j-1}, b_{j-1}$ и правых частей уравнений. Для этого машина $\mathcal{M}_j, j=2, \dots, N_2-1$, должна получить из машин \mathcal{M}_{j-1} и \mathcal{M}_{j+1} значения, входящие в формулы для вычисления коэффициентов $a_{j-1}, c_{j-1}, b_{j-1}$ и правых частей. Так

\ast Индекс $i \in \{1, 2, \dots, N_1\}$ в коэффициентах и неизвестных системы (II) опущен.

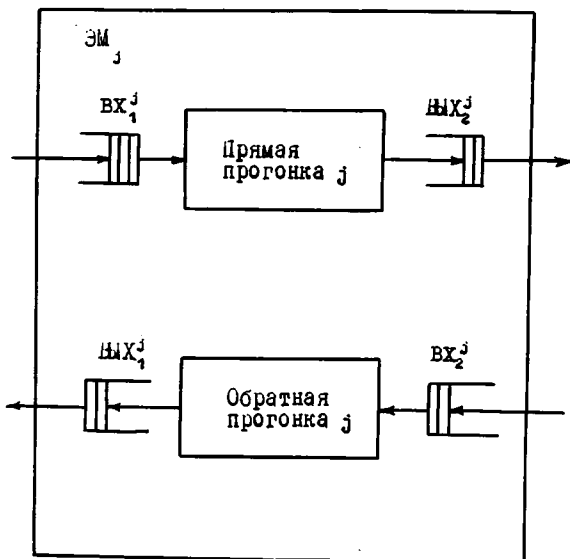


Рис. 3

как каналы связи могут работать одновременно с элементарными машинами системы, вычисления коэффициентов могут быть совмещены во времени с межмашинными передачами данных.

В ЭМ₁ выполняется программа ПРЯМАЯ ПРОГОНКА₁, а в ЭМ_j, $j = 2, 3, \dots, N_2$, программы ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j и ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_j (см. рис.3).

Программы ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j и ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_j вы-

полняются в ЭМ_j совместно протекающими процессами [3] p [ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j] и r [ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_j] соответственно. Условием выполнения процесса p [ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j] является выражение $ВХ_1^j > 0 \wedge ВХ_2^j = 0$, обозначающее наличие элементов данных в очереди $ВХ_1^j$ и отсутствие таковых в очереди $ВХ_2^j$. При наличии данных в очереди $ВХ_2^j$ процесс p [ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j] переходит в состояние ожидания и запускается процесс r [ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_j], выполнение которого приостанавливается при невыполнении условия $ВХ_1^j > 0$.

Проверка условия $ВХ_1^j > 0 \wedge ВХ_2^j = 0$ ($ВХ_2^j > 0$) производится перед каждой попыткой выборки элемента данных из очереди $ВХ_1^j$ ($ВХ_2^j$).

Программа ПРЯМАЯ ПРОГОНКА₁ вычисляет и помещает в очередь $ВХ_2^1$ элементы p_{1k1} , $1 = 1, 2, \dots, L_1$, последовательности P_{1k} , $k = 1, 2, \dots, N_1$. Программа ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j, $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$, выбирает из очереди $ВХ_1^j$ элементы p_{ik1} , $1 = 1, 2, \dots, L_i$, последовательности P_{ik} (прогнозные коэффициенты), $i \leq j - 1$, где i зависит от вида

алгоритма прогонки. Используя принятые элементы r_{ik1} , программа ПРЯМАЯ ПРОГОНКА_j вычисляет и помещает в очередь Вых₂^j элементы P_{jk1} , $l=1, 2, \dots, L_j$, $L_j = |P_{jk}|$, последовательности P_{jk} . Элементы последовательности P_{ik} также могут быть переданы в очередь Вых₁^j.

Пусть $Y_k = \{y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{N_2k}\}$ - решение k-й системы уравнений, $k = 1, 2, \dots, N_1$. Программа ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_{N₂} вычисляет и помещает в очередь Вых₁^{N₂} значения y_{1N_2k} , $1 \leq N_2 - 1, k=1, 2, \dots, N_1$.

Программа ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА_j выбирает из очереди Вых₂^j значение y_{1j+1k} , $1_{j+1} \leq j+1$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, вычисляет y_{1jk} , $1_j \leq j$, и помещает y_{1jk} в очередь Вых₁^j.

Если бы надо было решить только одну систему уравнений, вышеописанная схема вычислений была бы малоэффективной из-за простоев машин в ожидании данных. Вследствие совмещения во времени решения систем для многих значений k , $k = 1, 2, \dots, N_1$, простои машин существенно сокращаются.

Сразу после вычисления в ЭМ_j элементов последовательности P_{jk} начинается вычисление элементов последовательности $P_{j,k+1}$, $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$. Вычисление элементов последовательности $P_{j+1,k}$ в ЭМ_{j+1} может быть совмещено во времени с вычислением в ЭМ_j элементов последовательностей P_{jk} и $P_{j,k+1}$, поскольку эти элементы по мере их вычисления передаются в ЭМ_{j+1} через канал $K_{j,j+1}$. Аналогичное совмещение возникает при выполнении обратного хода прогонки для многих систем уравнений. Кроме того, за счет переключения с выполнения прямого хода прогонки на выполнение обратного хода прогонки удается совместить прямой ход прогонки для одной системы с обратным ходом для другой. В результате простои ЭМ_j, $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$, в ожидании прогоночных коэффициентов из ЭМ_{j-1} частично или полностью компенсируются выполнением обратного хода прогонки.

При выполнении немонотонных прогонок на j-м шаге прямого хода прогонки, $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, в j-й строке матрицы коэффициентов решаемой системы уравнений производится выбор главного элемента. От этого выбора зависят формулы для вычисления прогоночных коэффициентов. В связи с этим при конвейерной организации немонотонной прогонки вместе с прогоночными коэффициентами из ЭМ_j в ЭМ_{j+1}, $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, необходимо передавать специальный параметр δ_{jk} , $k=1, 2, \dots, N_1$, в зависимости от значения которого в

\mathcal{M}_{j+1} выбираются формулы для выполнения очередного шага прогонки. Если при выполнении j -го шага трехточечной прогонки, $j=1, 2, \dots, N_2$, в матрице коэффициентов k -й системы уравнений переставляются первый и второй столбцы, то $\delta_{jk} = 1$. Если же столбцы не меняются местами, то $\delta_{jk} = 0$.

На обратном ходе прогонки в \mathcal{M}_j , $j = N_2, N_2 - 1, \dots, 2$, при $\delta_{jk} = 0$ вычисляется $y_{m_j k}$, $m_j \leq j-1$, по формуле

$$y_{m_j k} = \alpha_{jk} y_{jk} + \beta_{jk},$$

а при $\delta_{jk} = 1$ вычисляется y_{jk} по формуле

$$y_{jk} = \alpha_{jk} y_{m_j k} + \beta_{jk}.$$

В любом случае из \mathcal{M}_j в \mathcal{M}_{j+1} передается значение $y_{m_j k}$.

Если при выполнении j -го шага прямого хода немонотонной прогонки для k -й системы пятиточечных уравнений в матрице коэффициентов не меняется порядок столбцов, то $\delta_{jk} = 0$; если переставляются первый и второй столбцы, то $\delta_{jk} = 1$, если же переставляются первый и третий столбцы, то $\delta_{jk} = 2$. На обратном ходе прогонки параметр δ_{jk} используется подобно тому, как он использовался при выполнении немонотонной прогонки для системы трехточечных уравнений. Последовательность, передаваемая из \mathcal{M}_j в \mathcal{M}_{j-1} , $j = N_2, \dots, 2$, при этом имеет вид

$$Y_{N_2 k} = \gamma_{N_2 k}, Y_{jk} = \{y_{m_j k}, y_{n_j k}\}, m_j \leq j-1, n_j \leq j-2, j = N_2, N_2 - 1, \dots, 3,$$

$$Y_{2k} = \{y_{1k}\}.$$

Формулы для вычисления элементов последовательностей P_{jk} , $j = 1, 2, \dots, N_2$, прогоночных коэффициентов и последовательностей Y_{jk} , $j = N_2, N_2 - 1, \dots, 2$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, за исключением параметров δ_{jk} , приведены в работе [4]. Здесь мы отметим лишь, что для вычисления каждого элемента указанных последовательностей, кроме δ_{jk} , требуется выполнить определенное число операций умножения и деления.

3. На третьем дробном шаге система разностных уравнений (8.3) решается в следующем порядке: исключая $\xi_\rho^{n+3/4}$, $\xi_v^{n+3/4}$, $\xi_c^{n+3/4}$ из уравнения для $\xi_u^{n+3/4}$, получаем $(2l+1)$ -точечное разностное уравнение относительно $\xi_u^{n+3/4}$. Это уравнение решается как совокуп -

ность из N_2 систем уравнений, причем j -я система, $j=1, 2, \dots, N_2$, решается в машине \mathcal{M}_j , т.е. N_2 систем решаются параллельно. После этого по известному $\xi_u^{n+3/4} = \{\xi_{1j_u}^{n+3/4}, i=1, 2, \dots, N_1, j=1, 2, \dots, \dots, N_2\}$ определяем $\xi_\rho^{n+3/4}, \xi_v^{n+3/4}, \xi_\epsilon^{n+3/4}$. Для каждого из неизвестных $\xi_\rho^{n+3/4}, \xi_v^{n+3/4}, \xi_\epsilon^{n+3/4}$ параметры j -й системы, $j=1, 2, \dots, \dots, N_2$, сосредоточены в \mathcal{M}_j , в силу чего эта система решается независимо от других систем.

На четвертом дробном шаге система (8.4) разностных уравнений решается аналогично (8.3): исключив $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ из уравнения для ξ_v^{n+1} , получим разностное уравнение относительно ξ_v^{n+1} . Наконец, найдя вектор ξ^{n+1} , определяем вектор f^{n+1} из уравнения (8.5).

После исключения $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ уравнение для ξ_v^{n+1} представляет собой совокупность из N_1 систем, каждая из которых имеет $(2l+1)$ -диагональную матрицу коэффициентов размерности N_2 . Параметры каждой из этих систем распределены по машинам $\mathcal{M}_j, j=1, 2, \dots, \dots, N_2$, так же, как и для систем, которые решаются на втором дробном шаге. Поэтому данная совокупность систем решается скалярными прогонками, которые эффективно выполняются описанным выше конвейерным параллельным способом. Уравнения для $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ подобны уравнениям для $\xi_\rho^{n+3/4}, \xi_v^{n+3/4}, \xi_\epsilon^{n+3/4}$ и представляют собой явные выражения величин $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ через величины $\xi_\rho^{n+3/4}, \xi_u^{n+3/4}, \xi_\epsilon^{n+3/4}, \xi_u^{n+1}$ и их производные по координате η . Не приводя конкретных выражений для вычисления $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ укажем лишь, что для вычисления, например, $\xi_\rho^{n+1} = \{\xi_{1j\rho}^{n+1}, i=1, 2, \dots, N_1, j=1, 2, \dots, N_2\}$ требуется для каждого значения i осуществить передачу в \mathcal{M}_j необходимых для вычисления параметров из \mathcal{M}_{j-1} и $\mathcal{M}_{j+1}, j=2, 3, \dots, N_2-1$. Передача этих параметров для любого значения $i=2, 3, \dots, N_1$ может быть совмещена во времени с вычислением $\xi_{i-1, j\rho}^{n+1}$, т.е. вычисления массивов $\xi_\rho^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_\epsilon^{n+1}$ могут быть эффективно распараллелены. То же самое справедливо и для вычисления производных, входящих в выражение для W в уравнении (I). В частности, это справедливо для вычисления смешанных производных по формуле (7.6).

Изменение координатной сетки сводится: к решению N_1 систем уравнений относительно $y^{n+1} = \{y_{1j}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2\}$ согласно (9.1), что аналогично второму дробному шагу (8.2); к решению N_2 систем относительно $x^{n+1} = \{x_{1j}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2\}$ согласно (9.2), что аналогично первому дробному шагу (8.1); к вычислениям коэффициентов $z_0^n = \{z_{0ij}^n\}$, $z_1^n = \{z_{1ij}^n\}$, $z^n = \{z_{ij}^n\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$, которые сводятся к вычислению производных второго порядка.

Таким образом, в предлагаемой специализированной вычислительной системе используется параллельная независимая работа машин при выполнении прогонок и вычисления производных по одному направлению и параллельная конвейерная работа машин при прогонках и вычисления производных по другому направлению.

Оценка эффективности параллельного решения задачи

Для оценки эффективности параллельного решения задачи применим показатель T_1/T_N , где T_1 - время решения задачи на одной машине (суммарное время выполнения операций, необходимых для решения задачи), T_N - время решения задачи на N машинах (с учетом времени простоев). Поскольку вычисление строк $\{z_{1j}^{n+1/4}, i = 1, 2, \dots, N\}$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, $n = 0, 1, \dots$, происходит во всех ЭМ_j независимо, то для первого дробного шага решения задачи коэффициент ускорения $T_1^{(1)}/T_{N_2}^{(1)} = N_2$. То же самое справедливо для третьего

дробного шага, а также для вычисления x^{n+1} при изменении координатной сетки, т.е.

$$\frac{T_1^{(3)}}{T_{N_2}^{(3)}} = \frac{T_{1x}}{T_{N_2x}} = N_2.$$

Определим коэффициент ускорения $T_1^{(2)}/T_{N_2}^{(2)}$ второго дробного шага решения задачи. При оценке величин $T_1^{(2)}$ и $T_{N_2}^{(2)}$ будем полагать, что время t_d выполнения операции деления равно сумме времен умножения t_y и сложения t_c . Назовем время $t_d = t_y + t_c$ временем выполнения операции $t_{оп}$. Время передачи данного по каналу связи обозначим через $t_{пер}$. Времена выполнения операций выборки элемента данных из очереди, занесения элемента данных в очередь, а также времена выполнения операций сравнения величин и присвоения

будем считать пренебрежимо малыми по сравнению со временем $t_{оп}$ выполнения операции деления. Время $t_{N_2}^{(2)}$ будем оценивать с учетом соотношений $N_1 \geq N_2$, при произвольном отношении $t_{пер}/t_{оп}$. Время $T_{N_2}^{(2)}$ складывается из величин T_3, T_p, T_0 . Время T_3 от начала вычислений в машине $ЭМ_1$ до начала вычислений в машине $ЭМ_{N_2}$ назовем временем запуска конвейера. Время T_p работы машины $ЭМ_j$, $j = j_0, j_0+1, \dots, N_2-1$, с учетом времени простоев будем называть временем работы конвейера. Здесь $j_0 = 2, 3, 5$ в зависимости от вида прогонки: монотонная для трехточечных уравнений, немонотонная для трехточечных и монотонная для пятиточечных уравнений, немонотонная для пятиточечных уравнений. Время T_0 от окончания работы машины $ЭМ_{N_2}$ до окончания прогонки назовем временем остановки конвейера. Величины T_3 и T_0 определяются непосредственно из временной диаграммы прогонки. На такой диаграмме каждому устройству (элементарной машине или каналу связи) соответствует временная ось, на которой жирной линией выделены интервалы занятости устройства, а стрелками указаны передачи данных между устройствами. Предполагается, что выработанное в $ЭМ_j$ данное мгновенно передается из $ЭМ_j$ в канал $K_{j,j+1}$ и по происшествии времени $t_{пер}$ передачи мгновенно передается из $K_{j,j+1}$ в машину $ЭМ_{j+1}$. Время работы T_p работы конвейера, как известно, равно времени работы наиболее медленного сегмента этого конвейера. Так как в нашем конвейере имеются устройства двух типов (элементарные машины и каналы связи), то естественно предположить, что время работы конвейера

$$T_p = \max(x, \tau)N_1, \quad (12)$$

где x - суммарное время выполнения операций умножения и деления, затрачиваемое элементарной машиной на решение каждой из N_1 систем уравнений, τ - время работы канала связи при решении каждой из систем уравнений.

Формула (12) означает, что при непрерывной работе каналов связи простаивают машины (случай $\tau > x$), и, наоборот (случай $\tau < x$), при непрерывной работе машин простаивают каналы связи.

Применение формулы (12) осложняется тем фактом, что интервалы времени между моментами поступления данных из машины в канал связи, вообще говоря, неодинаковы, поскольку на вычисление различных данных тратится разное количество операций умножения и деления. Следовательно, возможны ситуации, когда при выполнении про-

гонки и машины, и каналы связи работают с простоями (см. фрагмент временной диаграммы на рис. 4).

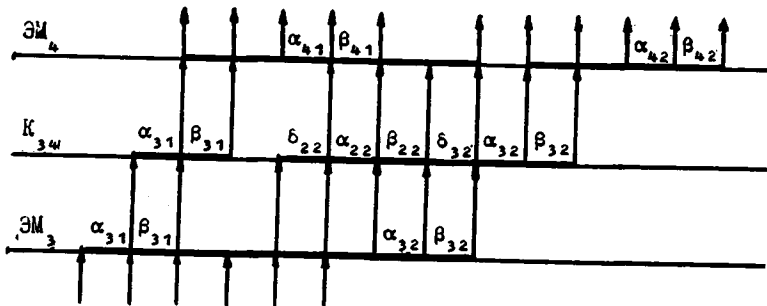


Рис. 4

При этом формула (12) неверна и требуется проанализировать влияние структуры алгоритма прогонки на времена простоя машин и каналов связи, т.е. в конечном счете на величину времени T_p .

Анализ, проведенный с помощью временных диаграмм, показал, что формула (12) справедлива для алгоритмов монотонной прогонки. В то же время для алгоритмов немонотонной прогонки справедлива следующая формула:

$$T_p \approx \max(x, \bar{\tau}) \cdot N_2 + \max(x, \tau) \cdot (N_1 - N_2), \quad (13)$$

где $\bar{\tau} = \tau_1 - \delta x_1 + \delta x_2^{(0)}$, τ_1 - время работы канала связи с учетом времени простоя при решении 1-й системы уравнений; δx_1 - время простоя ЭМ при решении 1-й системы уравнений; $\delta x_2^{(0)}$ - время простоя при решении 2-й системы уравнений, вычисленное при условии, что к моменту начала прогонки для 2-й системы ЭМ не занята вычислениями.

С учетом формул (12), (13) получены формулы для ускорения $T_1^{(2)}/T_{N_2}^{(2)}$ при конвейерной реализации алгоритма прогонки для монотонной и немонотонной прогонок при решении $N_1 \geq N_2$ систем трехточечных и пятиточечных уравнений на "линейке" из N_2 машин при

произвольном значении $\theta = \frac{\tau_{пер}}{\tau_{оп}} \geq 0$.

а) Монотонная прогонка для трехточечных уравнений:

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} = \frac{5N_1 N_2}{(3 + 2\theta)N_2 + \max(5, 2\theta)N_1} \quad (14)$$

б) Монотонная прогонка для пятиточечных уравнений;

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} = \frac{11 N_1 N_2}{[2\max(1, \theta) + \max(2, \theta) + 1 + 2\theta]N_2 + \max(11, 6\theta)N_1}. \quad (15)$$

в) Немонотонная прогонка для трехточечных уравнений:

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} = \begin{cases} \frac{7N_1N_2}{(4+2\theta)N_2+7N_1}, & 0 \leq \theta \leq 1, \\ \frac{7N_1N_2}{(7\theta-1)N_2+7N_1}, & 1 \leq \theta \leq \frac{7}{6}, \\ \frac{7N_1N_2}{(6+\theta)N_2+6\theta N_1}, & \frac{7}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{4}, \\ \frac{7N_1N_2}{(1+5\theta)N_2+6\theta N_1}, & \theta \geq \frac{5}{4}. \end{cases} \quad (16)$$

г) Немонотонная прогонка для пятиточечных уравнений:

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} = \begin{cases} \frac{17N_1N_2}{(5+2\theta)N_2+17N_1}, & 0 \leq \theta \leq \frac{12}{13}, \\ \frac{17N_1N_2}{(15\theta-7)N_2+17N_1}, & \frac{12}{13} \leq \theta \leq 1, \\ \frac{17N_1N_2}{(17\theta-9)N_2+17N_1}, & 1 \leq \theta \leq \frac{17}{16}, \\ \frac{17N_1N_2}{(8+\theta)N_2+16\theta N_1}, & \frac{17}{16} \leq \theta \leq \frac{7}{5}, \\ \frac{17N_1N_2}{(1+6\theta)N_2+16\theta N_1}, & \theta \geq \frac{7}{5}. \end{cases} \quad (17)$$

Из формул (14)–(17) следует, что при заданном отношении $N_1/N_2 \geq 1$ ускорение можно представить в виде

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} = k(\theta)N_2,$$

где величина $0 < k(\theta) \leq 1$, зависящая от отношения $\theta = \frac{t_{\text{пер}}}{t_{\text{оп}}}$, представляет собой коэффициент использования процессора, характеризующий эффективность распараллеливания. На рис.5 приведены зависимости

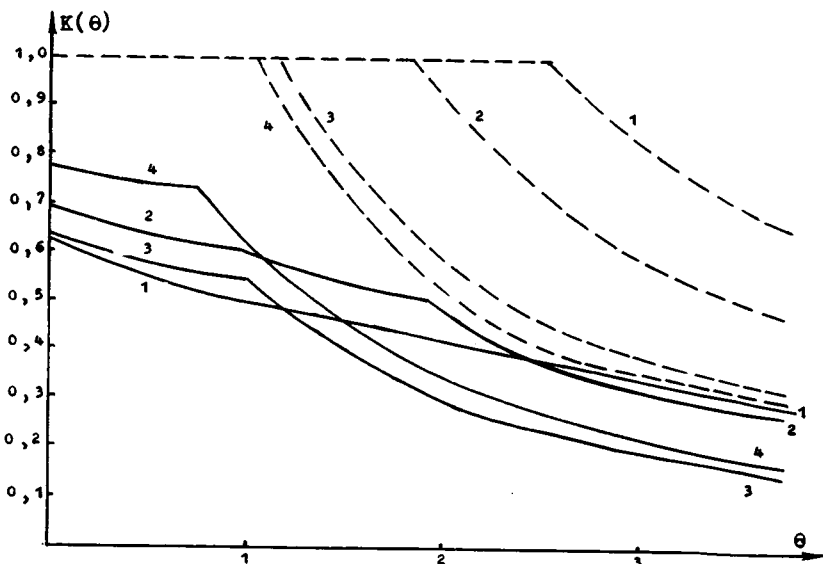


Рис. 5

сти $k(\theta)$ при $N_1 = N_2$ (линии —) и при $N_1 \gg N_2$ (линии - -). При этом линии 1 соответствуют $k(\theta)$ для трехточечной монотонной прогонки; линии 2 - для пятиточечной монотонной прогонки, линии 3 - для трехточечной немонотонной прогонки и, наконец, линии 4 - для пятиточечной немонотонной прогонки. Из анализа рис. 5 видно, что при $0 \leq \theta \leq 1$ и $N_1 \geq N_2$ ускорение счета для второго дробного шага

$$\frac{T_1^{(2)}}{T_{N_2}^{(2)}} \geq 0.5 N_2.$$

Полученная оценка ускорения счета свидетельствует о высокой эффективности распараллеливания, достигаемой при конвейерной параллельной организации выполнения прогонки. Поскольку выполнение четвертого дробного шага и выполнение вычислений u^{n+1} при изменении ко-

ординатной сетки подобны выполнению второго дробного шага, то при $0 \leq \theta \leq 1$ и $N_1 \geq N_2$

$$\frac{T_1^{(*)}}{T_{N_2}^{(*)}} > 0.5 N_2,$$

$$\frac{T_{1y}}{T_{N_2}y} > 0.5 N_2.$$

Вычисление производных по направлению ξ происходит во всех $ЭМ_j$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, независимо, т.е. выполняется в N_2 раз быстрее, чем на одной машине. При вычислении производных по направлению η машина $ЭМ_j$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N_1$ получает данные из машин $ЭМ_{j-1}$ и $ЭМ_{j+1}$, $j = 2, 3, \dots, N_2-1$. Из формул (7.1)-(7.6) для разностных операторов следует, что при $0 \leq \theta \leq 1$ вычисление производной в $ЭМ_j$ при некотором $i_0 \in \{1, 2, \dots, N_1-1\}$ может быть выполнено одновременно с передачей в $ЭМ_j$ из $ЭМ_{j-1}$ и $ЭМ_j$ данных, необходимых для вычисления производной по η при $i = i_0 + 1$. И в этом случае при $N_1 \gg 1$ имеет место ускорение вычислений в N_2 раз. Аналогичный вывод справедлив для ускорения при вычислении смешанных производных по ξ , η , входящих в выражение для W в уравнении (1).

Из сказанного следует, что при $0 \leq \theta \leq 1$ коэффициент ускорения при вычислении коэффициентов преобразования координатной сетки $z_0^n = \{z_{0ij}^n\}$, $z_1^n = \{z_{1ij}^n\}$, $z^n = \{z_{ij}^n\}$ равен N_2 . Оценим результирующий коэффициент ускорения преобразования координатной сетки:

$$\frac{T_{1g}}{T_{N_2}g} = \frac{T_{1x} + T_{1y} + T_{1z_0} + T_{1z_1} + T_{1z}}{T_{N_2}x + T_{N_2}y + T_{N_2}z_0 + T_{N_2}z_1 + T_{N_2}z}$$

при условии, что уравнения для x и y решаются трехточечными монотонными прогонками. Используя формулы для трехточечной монотонной прогонки, формулы для z_0 , z_1 , z , а также оценки

$$\frac{T_{1x}}{T_{N_2}x} = N_2, \frac{T_{1y}}{T_{N_2}y} > 0.5 N_2, T_{1x} = T_{1y} = 5 t_{оп} N_2 N_1,$$

$$\frac{T_{1z_0}}{T_{N_2}z_0} = \frac{T_{1z_1}}{T_{N_2}z_1} = \frac{T_{1z}}{T_{N_2}z} = N_2, T_{1z_0} = T_{1z_1} = 2 t_{оп} N_2 N_1, T_{1z} = 4 t_{оп} N_2 N_1,$$

получаем при $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{T_{1\theta}}{T_{N_2\theta}} > \frac{18}{23} N_2 \approx 0.78 N_2.$$

Таким образом, преобразование координатной сетки эффективно распараллеливается. Полученные оценки ускорения этапов решения уравнения (I) свидетельствуют об эффективном распараллеливании его решения. Поскольку в работе [2] не приведена полная формула для W , то мы не можем получить нижнюю оценку результирующего коэффициента ускорения решения уравнения (I). Однако поскольку основную часть вычислений составляют вычисления производных и эти вычисления ускоряются в N_2 раз, то можно утверждать, что результирующее ускорение равно $k(\theta)N_2$, при $k(\theta)$, близком к 1 при $0 \leq \theta \leq 1$. Основанием для такого утверждения является оценка

$$\frac{T_1}{T_{N_2}} \geq 0.75 N_2,$$

полученная в работе [1] для подобной задачи.

Коэффициент $k(\theta)$ характеризует относительную долю времени решения задачи, в течение которой процессор ЭМ занят вычислениями (не простаивает). Эта доля тем больше, чем больше число арифметических операций, выполнение которых вызвано получением в ЭМ данного, переданного из соседней ЭМ по каналу связи. Если в каждую ЭМ подсистемы мы будем помещать не одну строку массива данных, как сделано выше, а несколько, то возрастает число арифметических операций, выполняемых в ЭМ без простоя. Так, например, при конвейерной параллельной организации выполнения прогонок каждая ЭМ_j по получении прогоночных коэффициентов из ЭМ_{j-1} будет без простоя вычислять коэффициенты не для одного, а для нескольких уравнений системы, т.е. эффективность использования процессора повысится.

З а к л ю ч е н и е

Использование вычислительных систем с программируемой структурой для решения уравнений вязкого газа методом расщепления на подвижных сетках позволяет получить ускорение, пропорциональное числу элементарных машин, занятых решением задачи, при коэффициенте пропорциональности, близком к единице. Эффективность предложенного метода распараллеливания позволяет рассматривать его как ос-

нову для разработки параллельного спецпроцессора для решения уравнений газовой динамики методом расщепления.

Л и т е р а т у р а

1. КОРНЕЕВ В.В., ТАРКОВ М.С. Организация параллельных вычислений при решении задач механики сплошной среды с использованием неявных схем расщепления. - В кн.: Комплексы программ математической физики: Материалы УШ Всесоюз. семинара по комплексам программ математической физики (сентябрь 1983). Новосибирск, 1984.

2. КОВЕНЯ В.М., ЯНЕНКО Н.Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа. - ЖВМ и МФ, 1979, т.19, № 1, с. 174-188.

3. КОРНЕЕВ В.В., МОНАХОВ О.Г., ТАРКОВ М.С. Ядро операционной системы ЭМ вычислительной системы с программируемой структурой. - В кн.: Однородные вычислительные системы (Вычислительные системы, вып. 90). Новосибирск, 1981, с. 22-42.

4. САМАРСКИЙ А.А., НИКОЛАЕВ Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 580 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 июля 1984 года