ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 106

УДК 519.65

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ

Я.Н.Шнейдерман

Известно, что многие обобщения метода интерполяции кубическими сплайнами дефекта I связаны с необходимостью устранения "лишних перегибов", которые могут возникать при приближении функций с большими градиентами и быстро меняющейся кривизной.

Одним из примеров решения этой задачи является введение в формулы для интерполирующей функции некоторых управляющих параметров, варьируя которые можно эффективно управлять формой получаемой кривой. Среди таких функций, представляющих из себя нелокальные сплайны класса C^2, наиболее распространенными являются рациональные сплайны [1,2] и сплайны с натяжением [3].

Однако если в первом случае обобщаются формулы, определяющие интерполирующую функцию (при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, рациональный сплайн $S_R(x)$ задается формулой

$$S_R(x) = A_i t + B_i(1-t) + \frac{C_i t^3}{1+p_i(1-t)} + \frac{D_i(1-t)^3}{1 + q_i t},$$

где $t = (x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1})$; $p_i q_i > -1$ - управляющие параметры), то во втором - минимизируемый функционал (сплайн с натяжением минимизирует

$$\int_{x_0}^{x_N} [f''^2(x) + \sigma(x) f'^2(x)]dx,$$

где $\sigma(x) = \sigma_i^2 = \mathrm{const}$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ - "натяжение"). По своим геометрическим свойствам оба этих класса функций очень похожи:

при увеличении управляющих параметров, определяющих поведение функции, на некотором частичном отрезке, она изменяется от кубического полинома до линейной функции. Влияние этих изменений на остальные частичные отрезки тем слабее, чем дальше они от рассматриваемого. Это наводит на мысль о некоем внутреннем родстве вышеуказанных методов и на возможность получить рациональный сплайн как функцию,минимизирующую некоторый функционал. Решение этой задачи (постановка которой принадлежит В.Л.Мирошниченко) позволило бы также использовать рациональные сплайны для сглаживания.

Из излагаемых далее результатов автора, по-видимому, вытекает невозможность построения достаточно простого функционала для рациональных сплайнов в смысле [I] (во избежание путаницы только эти функции и будем называть рациональными сплайнами, хотя далее строятся сплайны, также состоящие из рациональных функций). Однако удается построить сплайны, очень похожие на рациональные и обладающие экстремальным свойством.

Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения y_i, $i=0,\ldots,N$.

Рассмотрим функционал

$$I(f) = \int_a^b [F(x)f''^2(x) + K(x)f'^2(x)]dx,$$

где $F(x) > 0$, $x \in [a,b]$, $F(x) \in C[a,b]$, $F(x) \in C^2[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\ldots,N$; $K(x) = K_i = \text{const}$, $x \in [x_{i-1},x_i]$, $K_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,N$.

Так же,как в [I],обозначим через $\widetilde{W}_2^2[a,b]$ класс функций из $W_2^2[a,b]$, периодических с периодом $b-a$, и через $\overline{W}_2^2[a,b]$ - класс функций из $W_2^2[a,b]$, имеющих заданные первые производные в точках a и b.

ТЕОРЕМА I. Пусть существует функция $S(x) \in C^2[a,b]$, $S(x) \in C^4[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,N$, удовлетворяющая условиям:

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 0,\ldots,N. \tag{1}$$

$$S''(a) = S''(b) = 0, \tag{2}$$

$$(F(x)S''(x))'' = K_i S''(x), \quad x \in (x_{i-1},x_i), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{3}$$

Тогда $S(x)$ доставляет единственный минимум функционалу $I(f)$ на множестве функций из $W_2^2[a,b]$, удовлетворяющих условию (I). Если в классах функций $\tilde{W}_2^2[a,b]$ или $\bar{W}_2^2[a,b]$ существует функция $S(x)$, удовлетворяющая условиям (I) и (3), то она доставляет единственный минимум $I(f)$ на соответствующем множестве. При этом для справедливости теоремы на классе $\tilde{W}_2^2[a,b]$ следует дополнительно потребовать выполнение условия $F(a) = F(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I аналогично доказательству экстремального свойства кубических сплайнов [I].

Конкретный вид функции (сплайна) $S(x)$, естественно, определяется видом функций $F(x)$, $K(x)$ в функционале $I(f)$. Получим уравнения для построения $S(x)$. Пусть $\{w_{1,i}(x), w_{2,i}(x)\}$ - фундаментальная система решений уравнения $(F(x)\,w(x))'' = K_i w(x)$.

Обозначим

$$h_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0,\dots,N-1;\quad M_i = S''(x_i),\ i = 0,\dots,N;$$

$$u_i(x) = w_{1,i}(x)w_{2,i}(x_i) - w_{1,i}(x_i)w_{2,i}(x),$$

$$v_i(x) = w_{1,i}(x_{i-1})w_{2,i}(x) - w_{1,i}(x)w_{2,i}(x_{i-1}).$$

Тогда при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем $S''(x) = (M_{i-1}u_i(x) + M_i v_i(x))/\ v_i(x_i)$ (предполагается, что все $v_i(x_i)$ отличны от нуля). Так как

$$S'(x_i+0) = \frac{1}{h_i}\left\{y_{i+1}-y_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-\xi)S''(\xi)d\xi\right\},\quad i = 0,\dots,N-1,$$

$$S'(x_i-0) = \frac{1}{h_{i-1}}\left\{y_i-y_{i-1}+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\xi-x_{i-1})S''(\xi)d\xi\right\},\quad i = 1,\dots,N,$$

то из условия гладкости $S(x)$ во внутренних узлах сетки - $S'(x_i+0) = S'(x_i-0)$, $i = 1,\dots,N-1$, получаем

$$\frac{\mu_i M_{i-1}}{h_{i-1}^2 v_i(x_i)}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})u_i(x)dx +$$

$$+ M_i \left\{ \frac{\mu_i}{h_{i-1}^2 v_i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1}) v_i(x) dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_i}{h_i^2 v_{i+1}(x_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x) u_{i+1}(x) dx \right\} +$$

$$+ \frac{\lambda_i M_{i+1}}{h_i^2 v_{i+1}(x_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x) v_{i+1}(x) dx = d_i , \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$,

$$d_i = \frac{1}{h_{i-1}+h_i} \left\{ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right\}.$$

Полученные уравнения для M_i аналогичны соответствующим уравнениям для вторых производных кубического сплайна [I]. Присоединяя к ним уравнения, соответствующие граничным условиям $S'(x_k) = y'_k$, $k=0,N$, или $S''(x_k) = y''_k$, $k = 0,N$, получаем трехдиагональную систему относительно неизвестных M_i, $i = 0,\ldots,N$.

Наиболее удобным с практической точки зрения является такой выбор функции $F(x)$ и констант K_i, чтобы любая нетривиальная линейная комбинация функций $w_{1,i}(x)$ и $w_{2,i}(x)$ имела на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ не более одного нуля. В этом случае искомая функция $S(x)$ (разумеется, если она существует) имеет на каждом отрезке сетки не более одной точки перегиба, причем если знаки M_{i-1} и M_i совпадают, то на этом отрезке перегиба нет. Для существования функции $S(x)$ достаточно обеспечить у полученной трехдиагональной матрицы доминирование главной диагонали. "Управление формой" заключается в подборе $F(x)$ и K_i, позволяющих усилить это доминирование.

Отметим, что частными случаями сплайнов $S(x)$ являются кубические сплайны ($F(x) \equiv 1$, $K_i = 0$, $i = 1,\ldots,N$), сплайны с натяжением ($F(x) \equiv 1$, $K_i = \sigma_i^2$, $i=1,\ldots,N$), сплайны первой степени ($F(x) \equiv 0$. Этот случай, впрочем, не охватывается теоремой I, так как не выполняется условие $F(x) > 0$).

В последующем рассмотрении для простоты ограничимся случаями, когда либо все K_i равны нулю, либо когда все они не равны нулю.

I. $K(x) = 0$, т.е. $K_i = 0$, $i = 1,\dots,N$.

Положим $\varphi(x) = 1/F(x)$. Тогда $w_{1,i}(x)=\varphi(x)$, $w_{2,i}(x)=x\cdot\varphi(x)$, $i = 1,\dots,N$, и система уравнений для M_i приобретает вид:

$$\frac{\mu_i M_{i-1}}{h_{i-1}^3\varphi(x_{i-1})}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(x)(x_i-x)(x-x_{i-1})dx +$$

$$+\frac{M_i}{\varphi(x_i)}\left\{\frac{\mu_i}{h_{i-1}^3}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(x)(x-x_{i-1})^2dx + \frac{\lambda_i}{h_i^3}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)(x_{i+1}-x)^2dx\right\} +$$

$$+\frac{\lambda_i M_{i+1}}{h_i^3\varphi(x_{i+1})}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)(x-x_i)\varphi(x)dx = d_i, \quad i = 1,\dots,N-1.$$

Обозначим через α управляющий параметр (или параметры) и построим семейство функций $\varphi(\alpha;x)$, $x \in [x_{i-1},x_i]$ такое, что:

1) $\varphi(\alpha;x) > 0$ для любых α,x;

2) $\varphi(\alpha_0;x) \equiv 1$ для некоторого α_0;

3) $\varphi(\alpha;x_{i-1}) = \varphi(\alpha;x_i) = 1$ для любого α;

4) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(\alpha;x) = 0$ при $x \in (x_{i-1},x_i)$.

Тогда, как нетрудно видеть, мы получим интерполяционный метод, аналогичный по своим свойствам сплайнам с натяжением и также являющийся обобщением интерполяции кубическими сплайнами, которая соответствует $\alpha=\alpha_0$.

Геометрическая интерпретация рассматриваемых функционалов очевидна. Функция $F(\alpha;x) = 1/\varphi(\alpha;x)$ равна единице в узлах исходной системы точек и стремится к бесконечности между ними при $\alpha\to\infty$. Тогда довольно естественно, что у функции $S(x)$, минимизирующей функционал $I(f)$, вторая производная внутри отрезков разбиения должна стремиться к нулю при $\alpha\to\infty$. Следовательно, $S(x)$ приближается к ломаной, соединяющей узлы интерполяции, а $F(x)$ играет ту же роль, что и натяжение для сплайнов с натяжением.

Разумеется, тот факт, что $S(x)$ стремится к кусочно-линейной функции при $\alpha \to \infty$, должен быть в каждом конкретном случае строго доказан.

Приведем некоторые примеры функций $\varphi(\alpha;\, x)$:

1а) $\varphi(\alpha;x) = h_{i-1}^{-\alpha_i}[(x_i-x)^{\alpha_i} + (x-x_{i-1})^{\alpha_i}]$, $x \in [x_{i-1},x_i]$, $\alpha_i \geq 1$.

Определяющая система уравнений имеет вид

$$\frac{2\mu_i M_{i-1}}{(2+\alpha_i)(3+\alpha_i)} + M_i\left[\frac{\mu_i}{3+\alpha_i}\left(1 + \frac{2}{(1+\alpha_i)(2+\alpha_i)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_i}{3+\alpha_{i+1}}\left(1 + \frac{2}{(1+\alpha_{i+1})(2+\alpha_{i+1})}\right)\right] + \frac{2\lambda_i M_{i+1}}{(2+\alpha_{i+1})(3+\alpha_{i+1})} = d_i\,,$$

$$i = 1,\dots,N-1.$$

Для полноты приведем уравнения, соответствующие граничным условиям типа $S'(x_k) = y_k'$, $k = 0,N$:

$$\frac{M_0}{3+\alpha_1}\left[1 + \frac{2}{(2+\alpha_1)(1+\alpha_1)}\right] + \frac{2M_1}{(2+\alpha_1)(3+\alpha_1)} = \frac{1}{h_0}\left(\frac{y_1-y_0}{h_0} - y_0'\right) = d_0\,,$$

$$\frac{2M_{N-1}}{(2+\alpha_N)(3+\alpha_N)} + \frac{M_N}{\alpha_N+3}\left[1 + \frac{2}{(1+\alpha_N)(2+\alpha_N)}\right] = \frac{1}{h_{N-1}}\left(y_N' - \frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}}\right) = d_N\,.$$

Существование и единственность решения системы очевидны. При целых значениях α_i сплайн $S(x)$ будет кусочно-полиномиальным.

Аналогичные результаты получаются для

$$\varphi(\alpha_i;\beta_i;x) = \beta_i h_{i-1}^{-\alpha_i}|2x-x_{i-1}-x_i|^{\alpha_i} + (1-\beta_i)\,,\quad x \in [x_{i-1},x_i]\,,$$

где $\alpha_i \geq 0$ и $\beta_i \to 1$ при $\alpha_i \to \infty$.

1б) $\varphi(p_i;q_i;x) = \dfrac{t}{[1+p_i(1-t)]^{\gamma}} + \dfrac{1-t}{(1+q_i t)^{\gamma}}$, $x \in [x_{i-1},x_i]$,

где $p_i, q_i > -1$; $\gamma > 0$, $t = (x-x_{i-1})/h_{i-1}$.

Параметр γ следует выбирать таким образом, чтобы аналитическое выражение для $S(x)$ получалось как можно проще. В частности, при целом $\gamma \geq 5$ сплайн $S(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ будет рациональной функцией. Ограничимся случаем $\gamma = 5$. Тогда при

$x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$S(x) = A_i t + B_i(1-t) + \frac{t^2}{(1+q_i t)^3}[(C_i(1-t) + D_i t)(1-t) +$$

$$+ (1+q_i t)(2C_i(1-t) + D_i t) + 3C_i(1+q_i t)^2] +$$

$$+ \frac{(1-t)^2}{[1+p_i(1-t)]^3}[(C_i(1-t) + D_i t)t + (1+p_i(1-t))(C_i(1-t) +$$

$$+ 2D_i t) + 3D_i(1+p_i(1-t))^2].$$

Выпишем определяющие уравнения

$$M_{i-1}\mu_i\left[\frac{1}{(1+p_i)^2} + \frac{1}{(1+q_i)^2}\right] + M_i\left[\mu_i\left(\frac{1}{(1+q_i)^3} + \frac{3}{1+p_i}\right) +\right.$$

$$\left.+\lambda_i\left(\frac{1}{(1+p_{i+1})^3} + \frac{3}{1+q_{i+1}}\right)\right] + M_{i+1}\lambda_i\left[\frac{1}{(1+p_{i+1})^2} + \frac{1}{(1+q_{i+1})^2}\right] = 12d_i,$$

$$i = 1,\ldots,N-1.$$

Для граничных условий вида $S'(x_k) = y'_k$, $k = 0, N$, к этим уравнениям добавляются соотношения

$$M_0\left[\frac{1}{(1+p_1)^3} + \frac{3}{1+q_1}\right] + M_1\left[\frac{1}{(1+p_1)^2} + \frac{1}{(1+q_1)^2}\right] = 12d_0,$$

$$M_{N-1}\left[\frac{1}{(1+p_N)^2} + \frac{1}{(1+q_N)^2}\right] + M_N\left[\frac{1}{(1+q_N)^3} + \frac{1}{1+p_N}\right] = 12d_N.$$

Очевидны существование и единственность решения полученной системы.

Более сложное аналитическое выражение для $S(x)$ по сравнению с рациональными сплайнами является "платой" за наличие экстремального свойства (интересно, что определяющая система уравнений получилась, наоборот, более простой). В остальном полученная функция имеет те же свойства, что и рациональные сплайны. В частности, при $p_k, q_k \to \infty$ $S(x)$ на k-м частичном отрезке стремится к линейной функции (доказывается аналогично доказательству в [I] соответствующего факта для рациональных сплайнов).

Аналогичные результаты получаются для

$$\phi(p_i;q_i;x) = \frac{1}{1-(1+p_i)^{-\gamma}(1+q_i)^{-\gamma}}\left[\frac{1-(1+q_i)^{-\gamma}}{(1+p_i(1-t))^{\gamma}} + \frac{1-(1+p_i)^{-\gamma}}{(1+q_it)^{\gamma}}\right].$$

Здесь при целом $\gamma \geq 4$ сплайн $S(x)$ будет кусочно-рациональной функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если отказаться от условия $F(x_i) = 1$, то можно положить $\phi(x) = \alpha_i[(1+p_i(1-t))^{-4} + (1+q_it)^{-4}]$. (Величины α_i выбираются так, чтобы $F(x)$ была непрерывной в узлах x_i сетки Δ.) Тогда выражение для $S(x)$ получается наиболее простым:

$$S(x) = A_it+B_i(1-t) + \frac{t^2}{(1+p_i(1-t))^2}\cdot\frac{3C_i-C_ip_it/(1+p_i) + D_it}{(1+p_i)^2} +$$

$$+ \frac{t^2}{(1+q_it)^2}(3C_i+2C_iq_it-D_it).$$

2. $K(x) > 0$, т.е. все K_i в (3) положительны.

Положим $\phi_i(x) = w_{2,i}(x)/w_{1,i}(x)$ (ясно, что при вышеуказанных ограничениях на $w_{1,i}(x)$ и $w_{2,i}(x)$ можно считать, что $w_{1,i}(x) > 0$). Тогда для того, чтобы любая линейная комбинация $w_{1,i}(x)$ и $w_{2,i}(x)$ имела не более одного нуля, необходимо и достаточно, чтобы $\phi_i(x)$ была монотонной функцией. Будем считать, что $\phi_i'(x) > 0$.

Тогда при $K_i \neq 0$ из условий

$$(F(x)\cdot w_{1,i}(x))'' = K_i\cdot w_{1,i}(x),$$

$$(F(x)\cdot w_{1,i}(x)\phi_i(x))'' = K_i\cdot w_{1,i}(x)\cdot\phi_i(x)$$

получаем $2(F(x)w_{1,i}(x))'\phi_i'(x) + F(x)w_{1,i}(x)\phi_i''(x) = 0$ и, следовательно, $[F(x)w_{1,i}(x)]^2\phi_i'(x) = c_i = \text{const} > 0$. Так как $w_{1,i}(x)$ и $w_{2,i}(x)$ определены с точностью до постоянного множителя, то можно считать, что $c_i = K_i^2$. Значит,

$$F(x)w_{1,i}(x) = \frac{K_i}{\sqrt{\phi_i'(x)}};\quad w_{1,i}(x) = \frac{(F(x)w_{1,i}(x))''}{K_i} = \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_i'(x)}}\right)''.$$

Таким образом, $w_{1,i}(x)$, $w_{2,i}(x)$ и $F(x)$ выражаются через единственную функцию $\phi_i(x)$ и константу K_i. Поэтому интерполяционные методы данного класса можно строить следующим образом. Зададим функции $\phi_i(x)$, $i = 1,\dots,N$, так, чтобы $w_{1,i}(x)$ были положительны (для этого необходимо и достаточно выполнение условий $3[\theta_i'(x)]^2 > 2\theta_i(x)\theta_i''(x)$, где $\theta_i(x) = \phi_i'(x)$) и найдем $F(x)$ на каждом отрезке разбиения с точностью до множителей K_i. Эти множители выберем так, чтобы $F(x)$ была непрерывна на всем отрезке. Интересно, что все интегралы в (4) берутся явно и в итоге определяющие уравнения записываются в виде:

$$\frac{M_{i-1}}{w_{1i}(x_{i-1})}\left[\frac{1}{h_{i-1}\sqrt{\phi_i'(x_{i-1})}} - \frac{\sqrt{\phi_i'(x_i)}}{\phi_i(x_i) - \phi_i(x_{i-1})}\right] +$$

$$+ M_i\left\{\frac{1}{w_{1i}(x_i)}\left[\frac{\sqrt{\phi_i'(x_i)}}{\phi_i(x_i)-\phi_i(x_{i-1})} - \frac{1}{h_{i-1}\sqrt{\phi_i'(x_i)}} - \frac{\phi_i''(x_i)}{2[\phi_i'(x_i)]^{3/2}}\right] +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{w_{1i+1}(x_i)}\left[\frac{\sqrt{\phi_{i+1}'(x_i)}}{\phi_{i+1}(x_{i+1})-\phi_{i+1}(x_i)} - \frac{1}{h_i\sqrt{\phi_{i+1}'(x_i)}} + \frac{\phi_{i+1}''(x_i)}{2[\phi_{i+1}'(x_i)]^{3/2}}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{M_{i+1}}{w_{1i+1}(x_{i+1})}\left[\frac{1}{h_i\sqrt{\phi_{i+1}'(x_{i+1})}} - \frac{\sqrt{\phi_{i+1}'(x_i)}}{\phi_{i+1}(x_{i+1})-\phi_{i+1}(x_i)}\right] = (h_{i-1}+h_i)d_i .$$

С целью демонстрации возможностей, которые возникают в случае $K(x) > 0$, приведем два примера:

2а) $\phi_i(x) = (x-x_i')^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 1$, $x_i' < x_{i-1}$;

$$w_{1,i}(x) = c_i(x-x_i')^{-(3+\alpha_i)/2}, \quad w_{2,i}(x) = c_i(x-x_i')^{(\alpha_i-3)/2},$$

$$F(x) = \frac{4K_i}{(\alpha_i+1)(\alpha_i-1)}(x-x_i')^2,$$

$$S(x) = A_{1,i} + A_{2,i}x + A_{3,i}(x-x_i')^{(\alpha_i+1)/2} + A_{4,i}(x-x_i')^{(1-\alpha_i)/2}.$$

2б) $$\phi_i(x) = \left(\frac{1+q_i t}{1+p_i(1-t)}\right)^3, \quad p_i^2+q_i^2 \neq 0,\ p_i,q_i > -1;$$

$$w_{1,i}(x) = \frac{c_i}{(1+q_i t)^3}, \qquad w_{2,i}(x) = \frac{c_i}{(1+p_i(1-t))^3};$$

$$F(x) = \frac{K_i}{2(p_i+q_i+p_i q_i)}(1+p_i(1-t))^2(1+q_i t)^2;$$

$$S(x) = A_{1,i}(1-t)+A_{2,i}t + \frac{A_{3,i}}{1+p_i(1-t)} + \frac{A_{4,i}}{1+q_i t},$$

если $p_i \neq 0$, $q_i \neq 0$.

Если $p_i = 0$, $q_i \neq 0$, то $S(x) = A_{1,i}+A_{2,i}t+A_{3,i}t^2+\dfrac{A_{4,i}}{1+q_i t}$.

До сих пор мы изучали интерполяционные сплайны. Однако наличие экстремальных свойств у введенных сплайнов позволяет по аналогии с кубическими сплайнами рассмотреть и задачу сглаживания. Пусть заданы значения y_i, $i=0,\dots,N$. Введем функционал

$$I_1(f) = I(f) + \sum_{i=0}^{N} \rho_i^{-1}(f(x_i)-y_i)^2,$$

где ρ_i – заданные положительные числа.

Будем считать, что условия теоремы I для класса $W_2^2[a,b]$ (соответственно $\tilde{W}_2^2[a,b]$, $\bar{W}_2^2[a,b]$) выполняются при любых y_i, $i = 0,\dots,N$.

ТЕОРЕМА 2. *Если на классе $W_2^2[a,b]$ ($\tilde{W}_2^2[a,b]$, $\bar{W}_2^2[a,b]$) функционал $I_1(f)$ принимает свое минимальное значение, то любая функция, доставляющая этот минимум, удовлетворяет условиям теоремы I* (за исключением условия (I)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего результата для кубических сплайнов [I].

Аналогично [I], нетрудно получить систему линейных уравнений для M_i. При $K(x) = 0$ эта система будет иметь пятидиагональную матрицу. При $F(x_i) = 1$, $i=0,\ldots,N$, матрица этой системы будет положительно определена, откуда следует существование и единственность решения системы и, следовательно, существование и единственность функции, минимизирующей функционал $I_1(f)$.

В практических задачах часто важно, чтобы класс используемых интерполяционных функций был инвариантным относительно операции сложения с полиномами первой степени. С этой точки зрения, на наш взгляд, дальнейшее обобщение полученных результатов путем изменения функционала $I(f)$ вряд ли целесообразно. В частности, функционал должен не зависеть от f, ибо в противном случае множество решений соответствующего уравнения Эйлера может не удовлетворять указанному требованию. По этой же причине не имеет смысла отказываться от условия кусочной постоянности функции $K(x)$. Если же рассмотреть функционал вида

$$\int_a^b [\Phi(x,f'') + K(x)f'^2(x)]dx,$$

где $\Phi(x,f'') \neq F(x)f''^2$, то задачи интерполирования и сглаживания сводятся к системам нелинейных уравнений относительно величин M_i.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruction glatter Kurven und Flächen.-München-Wien: R.Olderdurg Verl.,1973.-134 S.

3. SCHWEIKERT D.G. An interpolation on curve using spline in tension.-J.of Maths and Physics,1966,v.45,N 3,p.312-318.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 мая 1984 года