

УДК 519.47

ТРАНЗИТИВНО СВОБОДНЫЕ СЕТИ
КАК МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

С.А.Старкова, Л.А.Черкасова

В в е д е н и е

В настоящее время сети Петри один из активно изучаемых формализмов для моделирования асинхронных параллельных систем и процессов, при этом переходы в сети соответствуют событиям в системе, а места — условиям наступления событий. В работах Петри [1,2] предлагается единый сетевой подход как к описанию систем, так и процессов их функционирования. При таком определении процесс задает не единственный временной протокол (т.е. историю реализаций событий), а некоторый класс временных протоколов, обусловленных одним и тем же набором причинно-следственных отношений между действиями и условиями. Типы отношений, связывающих элементы процесса, определяют тип процесса. В [1-4] формализованы понятия параллелизма и ряд других базовых понятий. В работах [6,7] наряду с понятием параллелизма вводится понятие альтернативы, возникающее в тех случаях, когда имеется набор взаимно исключающих реализаций событий. Соответственно понятие процесса (последовательного и параллельного) обобщается до процесса с альтернативами. Для адекватности сетевого представления в [1,6,7] вводятся структурные ограничения (к-, L-, M-плотности). В данной работе выделяется класс транзитивно свободных сетей, который является собственным подклассом известного из литературы класса сетей свободного выбора [5]. Устанавливается, что сети из данного класса M-плотны. Выделен подкласс сетей-систем, процессы функционирования которых описываются транзитивно свободными сетями.

I. Основные понятия и определения

Сеть — это тройка (P, T, F) , где P — множество мест, T — множество переходов, $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ — отношение инцидентности, для которого выполнены следующие условия:

A1. $P \cap T = \emptyset$.

A2. $F \neq \emptyset$.

A3. Если для произвольного $x \in P \cup T$ обозначить через x^* множество $\{y | xFy\}$, а через *x множество $\{y | yFx\}$, то

$$\forall p_1, p_2 \in P: (^*p_1 = ^*p_2) \wedge (p_1^* = p_2^*) \Rightarrow p_1 = p_2.$$

Графическим представлением сети служит двудольный ориентированный граф (в общем случае бесконечный) с двумя типами вершин: вершины-места представлены кружками, вершины-переходы — барьерами. Из вершины x в вершину y ведет дуга, если xFy .

Сеть Петри — это набор $N = (P, T, F, M_0)$, где (P, T, F) — конечная сеть ($P \cup T$ — конечное множество), а $M_0: P \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ — начальная разметка сети, сопоставляющая каждому месту сети некоторое целое неотрицательное число. Разметка изображается помещением соответствующего числа точек (фшек) в место.

При моделировании сетями Петри дискретных параллельных систем, переходы соответствуют (локальным) событиям, происходящим в системе, а места — (локальным) условиям, позволяющим этим событиям осуществляться. Переход t может сработать при разметке M , если $\forall p \in ^*t: M(p) > 0$. В результате срабатывания перехода t при разметке M последняя сменяется разметкой M' по правилу: $\forall p \in P: M'(p) = M(p) - F(p, t) + F(t, p)$, где

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xFy, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем говорить, что разметка M' следует за разметкой M , и обозначать этот факт $M[t]M'$. Разметка M' называется достижимой от разметки M в результате последовательности срабатываний $\tau = t_1, \dots, t_k$, если существует последовательность следующих друг за другом разметок $M[t_1]M_1[t_2] \dots [t_k]M$. Обозначение — $M[\tau]M'$ или $M[>M'$, 'если τ не существенно. Разметка M достижима в сети N , если $M_0[>M$. Обозначим через $R(N)$ множество всех достижимых в сети N разметок.

Место p в сети назовем головным, если $^*p = \emptyset$. Обозначим через $H(N)$ множество всех головных мест в сети N . Языком сети N называется множество $L(N) = \{\tau \in T^* | \exists M \in R(N): M_0[\tau]M\}$.

Введем вспомогательные обозначения:

$D(x)$ - путь в сети, начинающийся элементом x , т.е. конечная или бесконечная последовательность (x_1, x_2, \dots) такая, что $x = x_1$ и $\forall i \geq 1: x_i F x_{i+1}$;

$D(x, y)$ - отрезок пути, начинающийся элементом x и заканчивающийся элементом y ;

$D^{-1}(x)$ - обратный путь в сети, заканчивающийся элементом x , т.е. конечная или бесконечная последовательность (x_1, x_2, \dots) такая, что $x = x_1$ и $\forall i \geq 1: x_i F^{-1} x_{i+1}$, где F^{-1} - обращение отношения F .

2. Определение сетей-процессов

Сеть-процессом назовем набор (P, T, F, M_0) , в котором (P, T, F) - сеть, удовлетворяющая дополнительным условиям:

A4. $\forall x, y \in X = P \cup T: x F^+ y \rightarrow \neg(y F^+ x)$, если $x \neq y$.

A5. $(N(N) \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in X, \forall D^{-1}(x): D^{-1}(x) \text{ конечен})$.

Это ограничение требует, чтобы любая сеть, представляющая процесс, имела непустое множество головных мест и не содержала бы "бесконечных влево" путей.

A6. $\forall t \in T: \neg t \neq \emptyset \wedge \neg t \neq \emptyset$, т.е. любой переход имеет хотя бы одно входное и одно выходное место.

A7. $\forall p \in P$

$$M_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in N(N), \\ 0 & - \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $N = (P, T, F, M_0)$ - сеть, удовлетворяющая условиям A1-A7. Определим отношения \prec , \underline{li} , \underline{al} и \underline{so} на элементах сети N следующим образом: $\forall x, y \in X: x < y \Leftrightarrow (x F^+ y) \wedge (x \neq y)$, т.е. элемент x предшествует элементу y ($x < y$), если существует направленная F -цепь элементов в сети, ведущая от x к y $\forall x, y \in X: x \underline{li} y \Leftrightarrow x < y \vee x = y \vee y < x$. Два элемента x и y находятся в отношении следования ($x \underline{li} y$), если они равны или один из них предшествует другому.

Отношение альтернативности топологически единообразным способом для произвольных элементов сети определить невозможно, в силу различности требований реализации (изменения) условия и дейст-

вия в системе, и соответственно появлению фишки в месте и срабатывания перехода в сети. Условие может реализоваться (измениться), если хотя бы одно непосредственно предшествующее ему действие реализовалось, т.е. место получит фишку, если хотя бы один переход, для которого это место является выходным, сработал. Действие может реализоваться, если все непосредственно предшествующие ему условия реализовались, т.е. переход может сработать, если все его входные места имеют фишки. Для всех $t_1, t_2 \in T$:

$$t_1 \underline{\hat{a}l} t_2 \Leftrightarrow (t_1 \neq t_2) \wedge ((\neg t_1 \cap \neg t_2 \neq \emptyset) \vee (\exists p_1 \in \neg t_1: \forall t'_1 \in \neg p_1: t'_1 \underline{\hat{a}l} t_2) \vee (\exists p_2 \in \neg t_2: \forall t'_2 \in \neg p_2: t_1 \underline{\hat{a}l} t'_2)).$$

Два перехода t_1 и t_2 слабо альтернативны, если они имеют общее входное место или непосредственный предшественник одного из переходов слабо альтернативен другому:

$$\forall p_1, p_2 \in P: p_1 \underline{\hat{a}l} p_2 \Leftrightarrow (p_1 \neq p_2) \wedge (\forall t_1 \in \neg p_1,$$

$$\forall t_2 \in \neg p_2: t_1 \underline{\hat{a}l} t_2)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: t_1 \underline{al} t_2 \Leftrightarrow \neg(t_1 \underline{li} t_2) \wedge (t_1 \underline{\hat{a}l} t_2).$$

Два перехода t_1 и t_2 альтернативны, если 1) они не находятся в отношении зависимости, 2) слабо альтернативны:

$$\forall p_1, p_2 \in P: p_1 \underline{al} p_2 \Leftrightarrow (p_1 \neq p_2) \wedge (\forall t_1 \in \neg p_1,$$

$$\forall t_2 \in \neg p_2: t_1 \underline{al} t_2)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: t_1 \underline{co} t_2 \Leftrightarrow (t_1 = t_2) \vee \neg(t_1 \underline{li} t_2 \vee t_1 \underline{al} t_2).$$

Переходы t_1 и t_2 параллельны, если 1) t_1 равен t_2 или 2) t_1 и t_2 не альтернативны и не находятся в отношении зависимости:

$$\forall p_1, p_2 \in P: p_1 \underline{co} p_2 \Leftrightarrow (p_1 = p_2) \vee \neg(p_1 \underline{li} p_2 \vee p_1 \underline{al} p_2).$$

Место p называется безопасным, если любая разметка $M \in R(N)$: $M(p) \leq 1$; соответственно сеть безопасна, если все ее места безопасны. Для безопасности сетей-процессов накладывается следующее дополнительное требование: $\forall p \in P: (t_1, t_2 \in \neg p \wedge t_1 \neq t_2) \Leftrightarrow t_1 \underline{\hat{a}l} t_2$, т.е. для любого места p его входные переходы должны быть слабо альтернативны.

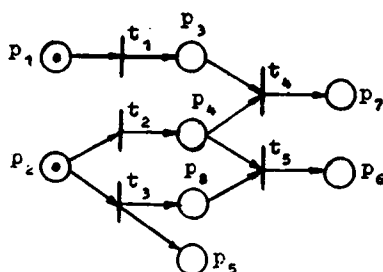


Рис. 1

х со у и $\forall x \notin S \exists y \in S: \neg(x \text{ со } y)$. Таким образом, со-сечение содержит максимальную совокупность "параллельных" друг другу элементов сети.

Например, в сети N на рис.1: $p_1 < p_3$, $t_1 \underline{\text{li}} t_4$, $t_4 \underline{\text{al}} t_5$, $t_5 \underline{\text{al}} t_3$, $p_4 \underline{\text{al}} p_5$, $t_1 \underline{\text{co}} t_2$, $p_1 \underline{\text{co}} p_2$, $\{p_2, t_2, p_4, t_5, p_6\}$ - li-сечение, $\{t_1, t_3\}$ - со-сечение.

3. Транзитивно-свободные сети и их свойства

Сеть $N = (P, T, P)$ называется транзитивно-свободной (или $N \in \text{TFC}$), если

$$\forall t_1, t_2 \in T: t_1 \underline{\text{al}} t_2 \Rightarrow |{}^*t_k| = |t_k^*| = 1, k = 1, 2,$$

$$\forall t \in T: \forall p_1 \in {}^*t, \forall p_2 \in t: \neg(p_1 \underline{\text{al}} p_2).$$

Таким образом, для транзитивно-свободных сетей выполнены условия:

1) у каждого слабоальтернативного перехода имеется ровно одно входное и одно выходное место,

2) входные места любого перехода параллельны.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. В транзитивно-свободных сетях - процессах отношение слабой альтернативности совпадает с отношением альтернативности, т.е. $(t_1 \underline{\text{al}} t_2) \Leftrightarrow (t_1 \underline{\text{al}} t_2) \forall t_1, t_2 \in T$.

Сеть на рис.1 не является транзитивно-свободной, так как $|{}^*t_4| = 2$, $|t_5^*| = 2$, $(p_4 \underline{\text{al}} p_5) \wedge (\{p_4, p_5\} = {}^*t_5)$. Пример транзитивно свободной сети приведен на рис.2.

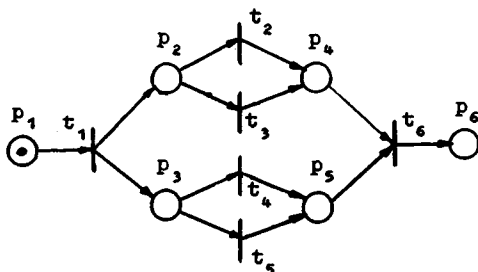


Рис. 2

Заметим, что данное выше определение альтернативности в классе TFC эквивалентно следующему: $\forall x, y \in X: x \underline{al} y \Leftarrow (\exists p \in P, \forall D(p, x), \forall D(p, y): D(p, x) \cap D(p, y) = \{p\}) \wedge (x \neq y)$.

При исследовании свойств сетей-процессов, элементы в которых связаны тремя отношениями \underline{li} , \underline{al} и \underline{co} , выделяются подсети (соответственно 0- и 3-подсети), элементы в которых уже связаны набором двух отношений: \underline{li} , \underline{co} и \underline{li} , \underline{al} соответственно.

Сеть $N' = (P' \ T' \ F')$ называется подсетью сети $N = (P, T, F)$, если $P' \subseteq P, T' \subseteq T, F' \subseteq F \cap (P' \times T' \cup T' \times P')$. Обозначение: $N' \subseteq N$.

Сеть N' называется 0-подсетью сети-процесса N , если

1) $N' \subseteq N$,

2) $\forall p \in P': |p| \leq 1 \wedge |p'| \leq 1$,

3) $\forall t \in T': \{p \in P | p \text{ Ft}\} \subseteq P'$ и $\forall p \in P' \ F'(p, t) = F(p, t)$, т.е. переход t в 0-подсети N' имеет то же самое множество входных мест и все дуги, связывающие его с этими местами, что и в сети N .

0-подсеть N' сети N назовем максимальной, если

1) для любой 0-подсети N'' сети N такой, что N' является 0-подсетью сети N'' , верно, что $N'' \subseteq N'$,

2) $H(N') \subseteq H(N)$.

Сеть N' называется 3-подсетью транзитивно-свободной сети-процесса N , если

1) $N' \subseteq N$,

2) $(t \in T' | |t| = |t'| = 1) \wedge (H(N') = 1)$,

3) а) $\forall p \in P': \{t | t \text{ Fp}\} \subseteq T', \{t | p \text{ Ft}\} \subseteq T'$,

б) $\forall p \in P', \forall t \in T' \ F'(t, p) = F(t, p)$.

3-подсеть N' сети N назовем максимальной, если

1) для любой S -подсети N'' сети N такой, что N' является S -подсетью сети N'' , верно, что $N'' \subseteq N'$,

2) $H(N') \subseteq H(N)$.

Сеть-процесс N называется M -плотной, если результатом пересечения любой максимальной O -подсети сети N' с любой максимальной S -подсетью сети N'' является некоторое (единственное) li-сечение сети N .

Для краткости класс транзитивно-свободных сетей-процессов будем обозначать буквами $TFSP$.

ЛЕММА 1. Пусть $N \in TFSP$, N' - максимальная O -подсеть в N . Тогда $H(N') = H(N)$.

ЛЕММА 2. Пусть $N \in TFSP$, N' - максимальная O -подсеть в N . Тогда любое li-сечение в N' является li-сечением в N .

ЛЕММА 3. Пусть $N \in TFSP$, N' - максимальная O -подсеть в N . Тогда любое li-сечение в N' является li-сечением в N .

ТЕОРЕМА 1. Транзитивно-свободные сети-процессы M -плотны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из лемм 1-3.

Далее необходимо установить связь между сетями Петри как моделями систем и сетями, описывающими процессы их функционирования.

4. Подкласс хорошо структурированных сетей-систем

В предыдущей части статьи рассматривался класс транзитивно-свободных сетей-процессов, и хотелось бы выделить соответствующий ему класс сетей-систем (сети одного класса порождают процессы, представляемые сетями из класса $TFSP$). Понятно соответствие между переходами и местами сети-системы N и порождаемой ею сетью-процессом \tilde{N} : переходу t в сети-системе соответствует множество переходов сети-процесса $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ (возможно бесконечное), каждый из которых представляет разовую реализацию перехода сети-системы t в ходе ее функционирования. При этом переходу t , помеченному символом a в N , соответствуют переходы $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ в \tilde{N} , помеченные тем же символом a .

Пусть \mathcal{A} - некоторый подкласс сетей Петри, содержащий сети с циклами.

Пусть $N = (P, T, F, M_0) \in \mathcal{A}$, $\tilde{N} = (P, T, F, M_0) \in TFSP$. Отображение $\beta: \tilde{N} \rightarrow N$ называется процессом ω .

- 1) $\beta(\tilde{P}) = P \wedge \beta(\tilde{T}) = T$,
- 2) $\forall p \in P: M_0(p) = |\beta^{-1}(p) \cap H(\tilde{N})|$,
- 3) $\forall t \in \tilde{T} \cdot \beta(t) = \beta(\cdot t) \wedge \beta(t \cdot) = \beta(t) \cdot$.

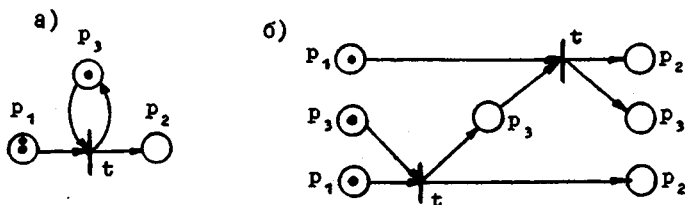


Рис. 3

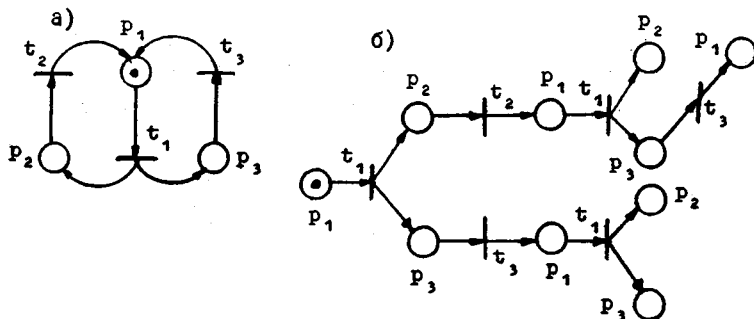


Рис. 4

На рис.3,а и 4,а приведены примеры сетей, соответствующие им сети-процессы изображены на рис. 3,б и 4,б.

Связь между свойствами сети-процесса и сети-системы состоит в следующем:

1. Головные места в сети-процессе - это места, которые в сети-системе имеют ненулевую разметку. Причем если место p в сети-системе имеет n фишек, то в сети-процессе n головных мест, помеченных этим же символом p .

2. Процесс сохраняет отношение инцидентности для каждого перехода, т.е. для процесса $\beta: \tilde{N} \rightarrow N \cdot \beta(t) = \beta(\cdot t)$ и $\beta(t \cdot) = \beta(t) \cdot$ для всех $t \in \tilde{T}$.

Пусть $\beta: \tilde{N} \rightarrow N$ - процесс, S - конечное со-сечение мест в \tilde{N} .
 Определим разметку $m(\beta, S): P \rightarrow N$ сети N , где $N = \{0, 1, \dots\}$:
 $\forall p \in P \ m(\beta, S)(p) = |\beta^{-1}(p) \cap S|$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть \tilde{N} - конечная сеть из класса $TFCSP$, $\beta: \tilde{N} \rightarrow N$ - процесс и пусть S - со-сечение, состоящее из мест в \tilde{N} . Тогда $m(\beta, S) \in R(N)$.

Отношения $\langle, \underline{1}, \underline{a}, \underline{a} \rangle$ и со для сетей-систем определяются аналогично случаю сетей-процессов.

ТЕОРЕМА 3. Класс \mathcal{A} является классом транзитивно-свободных сетей.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N \in \mathcal{A}$, $\{K_i\}_{i \in I}$ - множество всех ее процессов. Свободный язык сети N совпадает с объединением свободных языков всех ее процессов, т.е. справедливо $L(N) = \bigcup_{i \in I} L(K_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из двух частей. В первой части доказывается, что свободный язык произвольного ее процесса K_i содержится в языке сети N , т.е. $L(K_i) \subseteq L(N)$. Во второй части доказательства будет показано, что для произвольного слова $\tau \in L(N)$ существует процесс K_i такой, что $\tau \in L(K_i)$.

1. Фактически, надо показать, что если $\tau \in L(K_i)$, то $\tau \in L(N)$. Докажем это индукцией по длине n слова τ .

Для $n=1$ утверждение очевидно, так как по определению процесса $\forall p \in P: m_0(p) = |\beta^{-1}(p) \cap N(K_i)|$, и любой переход t , который мог сработать первым (т.е. $\cdot t \in N(K_i)$), может сработать и в N .

Предположим, что для $n=k$ утверждение доказано.

Покажем справедливость утверждения для $n = k + 1$. Рассмотрим слово $\tau \in L(K_i)$ длины $k+1$. Пусть $\tau = \omega t$, где ω - слово длины k . Заметим, что любое входное место p перехода t или является головным, или совпадает с выходным местом какого-либо перехода $t_i \in \omega$, т.е. $\forall p \in \cdot t: (p \in N(K_i)) \vee (p \in t_i^+)$, ибо только в этом случае после порождения в процессе K_i слова ω переход t может сработать.

По индукционному предположению $\omega \in L(N)$. Пусть $m_0[\omega] M$ в N . Надо показать, что переход t может сработать в N при разметке M . Поскольку множество входных мест у перехода t в сети N и в

процессе K_1 одно и то же $\beta(t) = \beta(t)$, то можно взять в качестве конечного со-сечения мест S множество, содержащее $\{p_1, \dots, p_n\} = t \subseteq S$, и посмотреть разметку $m(\beta, S) = M$. Получаем, что $\forall \beta(p_i) \quad \forall i=1, n$:

$$m(\beta(p_i)) = m(\beta, S)(\beta(p_i)) = |\beta^{-1}(\beta(p_i)) \cap S| = |p_i \cap S| \geq 1.$$

Следовательно, если в K_1 переход t может сработать после ω , то и в N переход t может сработать при разметке M после ω .

2. Покажем теперь, что для произвольного слова $\tau \in L(N)$ существует процесс K_1 такой, что $\tau \in L(K_1)$. Доказываем это индукцией по длине n слова τ .

Для $n=1$ имеем $\tau=t$. Рассмотрим процесс K_1 , состоящий из следующих элементов: $t \cup t \cup t$. Эта сеть K_1 удовлетворяет всем трем пунктам в определении процесса ($\forall p \in M_0(p) = |\beta^{-1}(p) \cap N(K_1)| \rightarrow \tau \in L(K_1)$).

Предположим, что для $n=k$ утверждение доказано.

Покажем справедливость утверждения для $n=k+1$. Рассмотрим слово $\tau \in L(N)$ длины $k+1$. Пусть $\tau = \omega t$, где ω — слово длины k . Заметим, как и в первой части доказательства, что $\forall p \prec t$: $(p \in N(N)) \vee (p \in t_1)$, где $t_1 \in \omega$. По индукционному предположению существует процесс K_j , в котором порождается слово ω . В K_j рассмотрим подсеть K' , содержащую все переходы из ω (сеть K' является, в некотором смысле, "префиксом" сети K_j). Покажем, что если к сети K' добавить переход t со всеми входными и выходными местами, то полученная сеть K'' будет процессом для N .

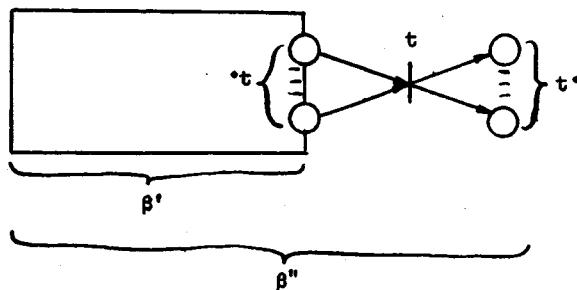


Рис. 5

Имеем: $K'' = K' \cup {}^*t \cup t \cup t^*$. Тогда $\beta'': K'' \rightarrow N$ является процессом для сети N с разметкой M_0 . \Leftarrow

$$1) \beta(P'') = P \wedge \beta(T'') = T,$$

$$2) \forall p \in P: M_0(p) = |\beta^{-1}(p) \cap N(K'')|,$$

$$3) \forall t \in T'': {}^*\beta(t) = \beta({}^*t) \text{ и } \beta(t^*) = \beta(t)^* \text{ (см.рис.5)}.$$

Пункты 1 и 3 для сети K'' очевидны. Надо проверить п.2 для входных мест перехода t . Если $p \in {}^*t \wedge p \in t_1^*$, то для этого места p по индукционному предположению все выполняется. Если $p \notin t_1^*$, то $\beta^{-1}(p) \in N(K'')$ — головное место в процессе. Следовательно, п.2 справедлив для сети K'' . Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. PETRI C.A. Non-sequential processes. — ISF-Report 77.05, St. Augustin: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1971. — 31 S.

2. PETRI C.A. Concurrency as a basis for system thinking. — ISF-Report 78.06, St. Augustin: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1978. — 20 S.

3. BEST E. The relative strength of K-density. — In: Lecture Notes in Computer Science, vol.84, Springer-Verlag, Berlin, 1979, p.261-276.

4. NIELSEN M., PLOTKIN G., WINSKEL G. Petri nets, event structures and domains. — In: Lecture Notes in Computer Science, vol.70, Springer-Verlag, Berlin, 1979, p.266-284.

5. НАСХ М.Н. Analysis of production schemata by Petri nets. — Project MAC, TR-94, 1972. — 119 p.

6. КОТОВ В.Е., ЧЕРКАСОВА Л.А. Некоторые критерии структурированности в классе ациклических сетей. — В кн.: Многопроцессорные вычислительные системы и их математическое обеспечение, Новосибирск, 1982, с. 71-83.

7. ЧЕРКАСОВА Л.А. Структурные ограничения при сетевом описании систем и процессов. — В кн.: Теоретические вопросы параллельного программирования и многопроцессорные ЭВМ, Новосибирск, 1983, с. 151-163.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 сентября 1984 года