

УДК 519.677

ПОСТРОЕНИЕ СКЕЛЕТА И ЭКВИДИСТАНТ ДЛЯ ПЛОСКОГО КОНТУРА

В.К.Королев

I. Постановка задачи. Примеры

Рассматривается процесс распространения волн (например, сейсмических, акустических и т.п.) внутри плоской области G (рис. I), ограниченной контуром ω , состоящим из прямолинейных отрезков и дуг окружностей. Эти отрезки и дуги могут быть свободными и экранированными: каждая точка свободной границы является источником

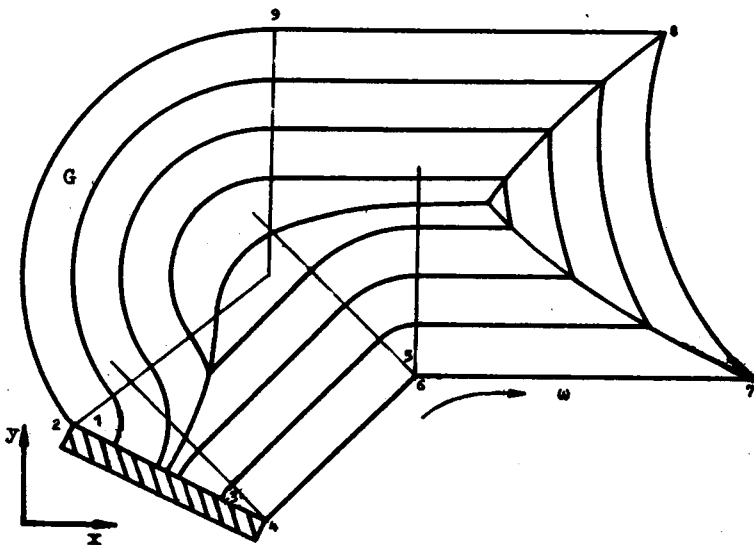


Рис. I

сферической волны в момент времени $t=0$, экранированные участки контура волн не порождают. Среда предполагается однородной, скорость распространения волн W - постоянной.

Ставится задача о построении картины волнового процесса, т.е. об описании движения огибающей волн (фронта или эквидистанты) в зависимости от времени t .

Аналогичная (несколько более простая) задача возникает в машиностроении при обработке плоских деталей на станках с ЧПУ [1]. Здесь аналогом волнового фронта выступает срезаемый эквидистантно слой материала.

Поставленная задача связана с решением уравнения эйконала

$$(\Omega'_x)^2 + (\Omega'_y)^2 = \frac{1}{W^2}, \quad (1)$$

где функция $t = \Omega(x, y)$ называется характеристической (или характеристикой) для волнового уравнения и определяется в пространстве x, y, t характеристическую поверхность [2].

На рис.2 и 3 изображены характеристические поверхности Ω для двух простых случаев.

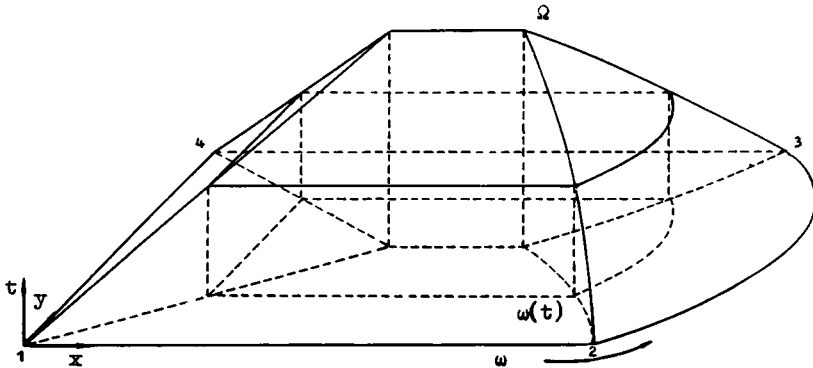


Рис. 2

Если фронт порождается отрезком (например, 1-2 на рис.2), то характеристикой служит плоскость, проходящая через этот отрезок и наклоненная к плоскости xy под углом γ , $\text{ctg} \gamma = W$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + \Delta W t, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}.$$

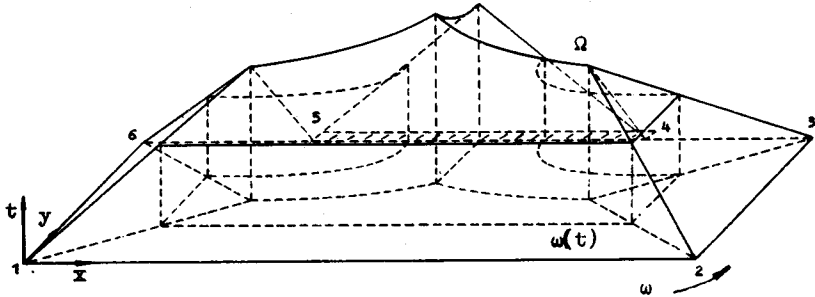


Рис. 3.

Для экранированного отрезка (например, 4-5 на рис.3) характеристическая плоскость вертикальна ($W=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$).

Если фронт порождает дуга окружности (выпуклая или вогнутая), то характеристической поверхностью служит конус

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (R \mp Wt)^2, \quad (3)$$

где x_0, y_0 - координаты центра окружности, а R - ее радиус; $R > 0$ для выпуклой дуги и $R \leq 0$ - для вогнутой. (На рис.2 конус с дугой 2-3 - выпуклый; на рис.3 точки 4 и 5 - точечные источники* волн - являются вершинами вогнутых конусов.)

Простой проверкой можно убедиться в том, что функции $t = \Omega(x, y)$, найденные из соотношений (2) и (3), удовлетворяют уравнению (1).

* Второй из возможных случаев точечного источника - вершина вогнутого угла (точка 6 на рис.1).

Характеристическая поверхность состоит из бихарактеристик, проекции которых на плоскость $xу$ являются лучами, т.е. прямолинейными ортогональными траекториями семейства фронтов. Каждая из бихарактеристик составляет со своим лучом угол γ .

Характеристические поверхности, построенные для отдельных элементов контура, пересекаются по ребрам, проекции которых на плоскость $xу$ составляют скелет контура. Другими словами, скелет представляет собой объединение всех линий пересечения фронтов от отдельных элементов. (В машиностроении скелет контура определяется как геометрическое место точек центров окружностей, вписанных в контур и касающихся его по крайней мере в двух различных точках [1].)

Если известна характеристическая поверхность, то любая из эквидистант $w(t_k)$ (рис.2,3) может быть получена проекцией на плоскость $xу$ линии пересечения плоскости $t=t_k$ с этой поверхностью. На практике эквидистанты чаще всего строят путем смещения на величину Wt внутрь контура некоторой сетки его граничных точек. При этом возникают петли, анализ и удаление которых составляют основную сложность таких алгоритмов. Знание скелета позволяет упростить алгоритм построения эквидистант.

2. Параметризация исходного контура. Построение скелета

При обсуждении возможных подходов к решению сформулированной выше задачи С.К.Годуновым было предложено использовать некоторую параметризацию лучей, исходящих из точек заданного контура. Выбор той или иной параметризации может диктоваться разными соображениями, например, единообразием описания разнотипных элементов, простотой алгоритма для решения некоторой частной задачи и т.п.

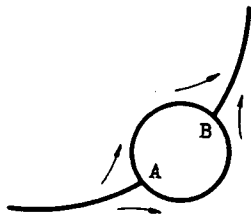


Рис.4

Мы применим простейшую (естественную) параметризацию, поставив в соответствие лучу, исходящему из какой-либо точки отрезка, длину l , отсчитываемую вдоль отрезка, а лучу, исходящему из точечного источника, - полярный угол ϕ . Для дуги эти два параметра связаны однозначно и пересчитываются один в другой. Таким образом, для отрезка угол ϕ фиксирован, для точеч-

ного источника отсутствует длина. Можно считать отрезок распрямившейся дугой, а точечный источник - вогнутой дугой, стянутой в точку. При обходе контура (например, против часовой стрелки) угол φ для выпуклой дуги увеличивается, для вогнутой уменьшается. Поскольку дуга определяется неоднозначно координатами ее концов и центра (рис. 4), то будем приписывать знаки ее радиусу: "плюс" - для выпуклой дуги, "минус" - для вогнутой.

Если x, y - координаты текущей точки дуги, x_0, y_0 - координаты ее центра, а φ - угол с осью x внутренней (по отношению к контуру) нормали в точке (x, y) , то очевидно, что

$$\cos \varphi = \frac{x_0 - x}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{y_0 - y}{R}, \quad (4)$$

где
$$R = \pm \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

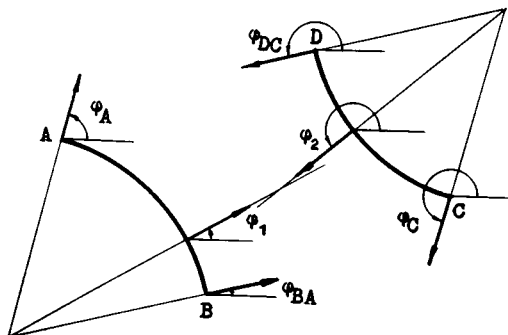


Рис. 5

Рассмотрим пару дуг \overline{AB} и \overline{CD} (рис. 5). В соответствии с выбранным направлением обхода контура будем обозначать через φ_A угол нормали в точке A справа, а через φ_{BA} - в точке B слева. Аналогично - φ_C и φ_{DC} для дуги \overline{CD} .

Соотношения (4)

представляют собой параметрические уравнения дуги. Записав их, например, относительно точки B: $x_B = x_0 - R \cos \varphi_{BA}$, $y_B = y_0 - R \sin \varphi_{BA}$, исключим координаты центра:

$$x = x_B - R(\cos \varphi - \cos \varphi_{BA}) = x_B + 2R \sin \frac{\varphi - \varphi_{BA}}{2} \sin \frac{\varphi + \varphi_{BA}}{2},$$

$$y = y_B - R(\sin \varphi - \sin \varphi_{BA}) = y_B - 2R \sin \frac{\varphi - \varphi_{BA}}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi_{BA}}{2}.$$

Угол нормали к дуге связан с ее длиной соотношением: $R\Delta\varphi = R(\varphi'' - \varphi') = l'' - l' = \Delta l$. Для выпуклой дуги $\Delta\varphi > 0$ и $R > 0$, для

вогнутой - $\Delta\varphi < 0$ и $R < 0$, так что в обоих случаях длина дуги увеличивается при обходе ее в положительном направлении.

Так как, по предположению, фронт волны от дуги $\overset{\frown}{AB}$ распространяется внутрь со скоростью $W = \text{const}$, то уравнения фронта можно записать в виде:

$$\xi_1 = x_B + U \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_{BA}}{2} + Wt \cos \varphi_1, \quad (5)$$

$$\eta_1 = y_B - U \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_{BA}}{2} + Wt \sin \varphi_1.$$

Здесь ξ_1, η_1 - координаты текущей точки фронта, φ_1 - угол текущей нормали,

$$U = 2R_1 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_{BA}}{2}. \quad (5')$$

Частный случай для отрезка получается при распрямлении дуги $\overset{\frown}{AB}$ в точке В: $R_1 \rightarrow \infty$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_{BA}$. При этом $U \rightarrow l_1 - l_B \leq 0$, где l_1 - текущая длина (параметр) отрезка \overline{AB} , l_B - длина в точке В.

Для точечного источника имеем $R_1 = 0$ и $U = 0$.

Сделаем одно замечание. Если записать уравнения фронта для дуги в виде:

$$\xi_1 = x_0 + (Wt - R_1) \cos \varphi_1,$$

$$\eta_1 = y_0 + (Wt - R_1) \sin \varphi_1$$

и вычислить расстояние от фронта до центра дуги:

$$D = \sqrt{(\xi_1 - x_0)^2 + (\eta_1 - y_0)^2} = |Wt - R_1| = \begin{cases} R_1 - Wt & \text{для выпуклой дуги,} \\ Wt - R_1 & \text{для вогнутой дуги,} \end{cases}$$

то становится ясно, что для выпуклой дуги $D \geq 0$ лишь до тех пор, пока $R_1 \geq Wt$, т.е. пока фронт не достигнет центра, а для вогнутой такого ограничения нет.

Для фронта, порожденного дугой $\overset{\frown}{CD}$, уравнения имеют вид:

$$\xi_2 = x_C + V \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_C}{2} + Wt \cos \varphi_2, \quad (6)$$

$$\eta_2 = y_C - V \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_C}{2} + Wt \sin \varphi_2.$$

Здесь ξ_2, η_2 - координаты текущей точки фронта, φ_2 - угол текущей нормали,

$$V = 2R_2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_C}{2}. \quad (6')$$

При распрямлении дуги $\overset{\smile}{CD}$ в точке С имеем: $R_2 \rightarrow \infty$, $\varphi_2 \rightarrow \varphi_C$. При этом $V_2 \rightarrow l_2 - l_C \geq 0$, где l_2 - текущая длина (параметр) отрезка \overline{CD} , l_C - длина в точке С.

Для частного случая дуги - точечного источника - имеем: $R_2 = 0$, т.е. $V = 0$.

Будем теперь строить ветвь скелета, соответствующую взаимно-действию фронтов, порожденных дугами \overline{AB} и $\overset{\smile}{CD}$. Для этого положим $\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 = \eta_2$. Получим два соотношения:

$$-2\omega t \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = (x_C - x_B) - U \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_{BA}}{2} + V \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_C}{2}, \quad (7)$$

$$2\omega t \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = (y_C - y_B) + U \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_{BA}}{2} - V \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_C}{2}.$$

Умножая первое на $\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, второе - на $\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ и складывая, исключим ωt :

$$(x_C - x_B) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + (y_C - y_B) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + U \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_{BA}}{2} - V \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим поочередно следующие случаи: 1) первым из рассматриваемых элементов является а) отрезок, б) дуга; 2) вторым - а) отрезок, б) дуга. Случай угла, очевидно, отдельного рассмотрения не требует.

Случай 1,а. Независимый параметр - длина отрезка: $U = l_1 - l_B$.

При этом $\varphi_1 = \varphi_{BA}$.

Случай 1,б. Независимый параметр - угол φ_1 нормали. Переменная U вычисляется по формуле (5').

Случай 2,а. Уравнение (8) определяет величину V :

$$l_2 - l_C = V = \frac{(x_C - x_B) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + (y_C - y_B) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - U \sin \frac{\varphi_{BA} - \varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2}}. \quad (9)$$

Случай 2,б. Распишем соотношение (8) подробнее, заменив ψ через φ_2 согласно (6'). Получим тригонометрическое уравнение для угла $\frac{\varphi_2}{2}$:

$$P(\varphi_1) \sin \frac{\varphi_2}{2} - Q(\varphi_1) \cos \frac{\varphi_2}{2} = 0, \quad (10)$$

где

$$P(\varphi_1) = -(x_C - x_B) \sin \frac{\varphi_1}{2} + (y_C - y_B) \cos \frac{\varphi_1}{2} + U \cos \frac{\varphi_{BA}}{2} - 2R_2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2} \cos \frac{\varphi_C}{2},$$

$$Q(\varphi_1) = -(x_C - x_B) \cos \frac{\varphi_1}{2} - (y_C - y_B) \sin \frac{\varphi_1}{2} + U \sin \frac{\varphi_{BA}}{2} - 2R_2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2} \sin \frac{\varphi_C}{2}.$$

В качестве независимого аргумента в этом уравнении фигурирует либо l_1 , либо φ_1 (случай I,а или I,б).

При решении уравнения (10) требуется учитывать граничные условия для угла φ_2 (см. табл. I).

Нам остается вычислить величину wt . Для этого умножим уравнения (7) соответственно на $-\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ и $\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ и сложим. Находим:

$$wt = \frac{-(x_C - x_B) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + (y_C - y_B) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + U \cos \frac{\varphi_{BA} - \varphi_2}{2} - V \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}, \quad (11)$$

Итак, можно сформулировать алгоритм построения линии пересечения двух фронтов (ветви скелета) для пары активных элементов.

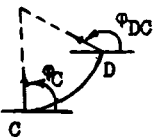
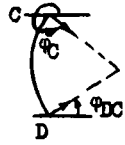
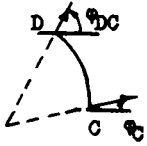
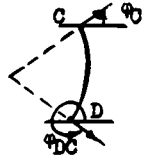
1. Параметр первого из элементов пары (l_1 или φ_1) перебираем с заданным шагом в заданных пределах.

2. Для каждого из этих значений из уравнения (9) или (10) определяем соответствующее значение параметра l_2 или φ_2 второго из элементов пары.

3. По формуле (11) вычисляем значение wt .

4. По формулам (5) находим координаты ξ_1, η_1 точки, лежащей на искомой ветви скелета.

Для построения всего скелета заданного контура при каждом фиксированном значении первого параметра (l_1 или φ_1) мы переби-

Дуга	Обычный случай	Особый случай (переход через 2π)
Выпуклая	 $\varphi_C \leq \varphi_2 \leq \varphi_{DC}$	 $\varphi_C \leq \varphi_2 \leq 2\pi \text{ или } 0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_{DC}$
Вогнутая	 $\varphi_{DC} \leq \varphi_2 \leq \varphi_C$	 $\varphi_{DC} \leq \varphi_2 \leq 2\pi \text{ или } 0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_C$

раем все остальные элементы контура, выполняем шаги 2,3 и отыскиваем $\min Wt$ по всем вторым элементам. При этом скелет оказывается

пройденным дважды, что будет существенно использовано в дальнейшем.

Промиллюстрируем полученные соотношения несколькими примерами.

1. Пара соседних отрезков (рис.6). Точки В и С совпадают: $x_C =$

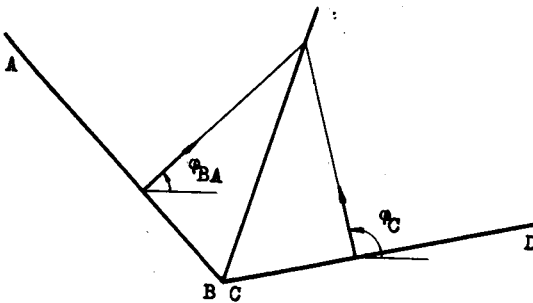


Рис.6

$= x_B$, $y_C = y_B$ Кроме того, $\varphi_1 = \varphi_{BA}$, $\varphi_2 = \varphi_C$. Из формулы (9) следует: $v = -U$ (геометрически это очевидно). Далее, из (II) получаем: $wt = U \operatorname{ctg} \frac{\varphi_{BA} - \varphi_C}{2}$. Из уравнений (5) находим:

$$\xi_1 = x_B + U \frac{\cos \frac{\varphi_{BA} + \varphi_C}{2}}{\sin \frac{\varphi_{BA} - \varphi_C}{2}}, \quad \eta_1 = y_B - U \frac{\sin \frac{\varphi_{BA} + \varphi_C}{2}}{\sin \frac{\varphi_{BA} - \varphi_C}{2}}.$$

Отсюда имеем:

$$\eta_1 - y_B = \operatorname{tg} \frac{\varphi_{BA} + \varphi_C}{2} (\xi_1 - x_B) - \text{уравнение биссектрисы угла B.}$$

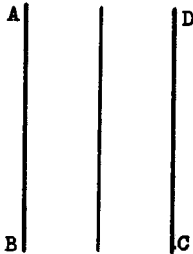


Рис. 7

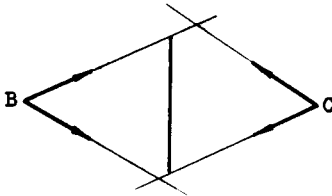


Рис. 8

2. Параллельные отрезки: $\varphi_C = \varphi_{BA} + \pi$. Пусть, например, $\varphi_{BA} = 0$, $\varphi_C = \pi$ и $y_B = y_C$ (см. рис. 7). Аналогично предыдущему имеем: $v = -U$. Из (II)

$wt = \frac{x_C - x_B}{2}$. Подставляя в (5), находим $\xi_1 = \frac{x_B + x_C}{2}$, $\eta_1 = y_B - U$ - уравнения отрезка, проходящего посередине между заданными отрезками. На этой линии ("пленке") фронты "схлопываются".

3. Два точечных источника (рис. 8). Положим $y_B = y_C$. Так как $R_1 = R_2 = 0$, то из уравнения (8) находим:

$$\operatorname{cos} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0, \text{ т.е. } \varphi_2 = \pi - \varphi_1.$$

Далее вычисляем $wt = \frac{x_C - x_B}{2 \operatorname{cos} \frac{\varphi_1}{2}}$ и получаем:

$$\xi_1 = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad \eta_1 = y_B + \frac{x_C - x_B}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Таким образом, линия пересечения

фронтов проходит аналогично предыдущей, но состоит из точек разных фронтов.

3. Взаимодействие фронта с экраном

Мы будем рассматривать только прямолинейные экранированные элементы, предполагая, что все криволинейные экраны аппроксимированы хордами. Кроме того, мы исключим из рассмотрения явление "дифракции", т.е. огибания фронтом вогнутого экрана. Этот случай является патологией для практических ситуаций: считается, что всегда исходный контур можно разбить на ряд независимых подконтуров так, что "дифракции" не будет.

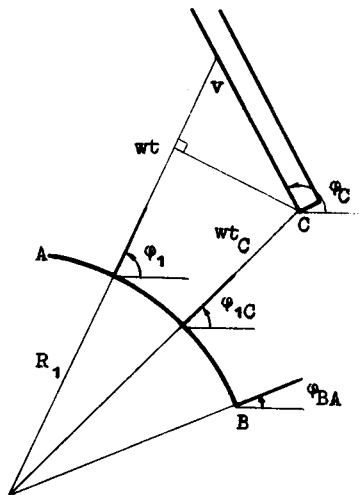


Рис. 9

(рис.9). Частные случаи для отрезка и угла будут следовать из общего.

Параметрические уравнения фронта от дуги здесь удобнее иметь в более простом (исходном) виде:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_B + R_1 \cos \varphi_{BA} + (wt - R_1) \cos \varphi_1, \\ \eta_1 &= y_B + R_1 \sin \varphi_{BA} + (wt - R_1) \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для текущей точки на экране уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x_C + V \cos \varphi_C, \\ \eta_2 &= y_C + V \sin \varphi_C. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем различать два случая:

1) экран "не виден" с данного элемента, т.е. любой исходящий из него луч "протыкает" экран с его внешней стороны;

2) экран "виден" с данного элемента, т.е. обращен к нему своей внутренней стороной.

Первый случай не требует отдельного рассмотрения, поскольку представляет собой частный случай точечного источника: угол в начале или конце экрана образуется самим экранным отрезком и нормалью в этой точке к соседнему элементу.

Итак, рассмотрим общий случай взаимодействия дуги \overline{AB} с прямолинейным "видимым" экраном \overline{CD}

Здесь $V = l_2 - l_C$ - параметр (длина) экрана, φ_C - угол направляющего вектора вдоль экрана.

Подставляя координаты точки С в уравнения (12), получаем соотношения:

$$\begin{aligned} x_C &= x_B + R_1 \cos \varphi_{BA} + (Wt_C - R_1) \cos \varphi_{1C}, \\ y_C &= y_B + R_1 \sin \varphi_{BA} + (Wt_C - R_1) \sin \varphi_{1C}, \end{aligned} \quad (14)$$

связывающие величины Wt_C и φ_{1C} . Отсюда, аналогично тому, как это сделано в §2, сначала исключая Wt_C , получаем тригонометрическое уравнение относительно φ_{1C} :

$$(x_C - x_B - R_1 \cos \varphi_{BA}) \sin \varphi_{1C} - (y_C - y_B - R_1 \sin \varphi_{BA}) \cos \varphi_{1C} = 0, \quad (15)$$

а затем находим выражение для Wt_C :

$$Wt_C = R_1(1 - \cos(\varphi_{1C} - \varphi_{BA})) + (x_C - x_B) \cos \varphi_{1C} + (y_C - y_B) \sin \varphi_{1C}.$$

Приравняем $\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 = \eta_2$, заменяя x_C и y_C их выражениями (14). После некоторых преобразований получим 2 соотношения:

$$V \sin(\varphi_C - \varphi_1) = (R_1 - Wt_C) \sin(\varphi_{1C} - \varphi_1),$$

$$Wt_C \sin(\varphi_C - \varphi_{1C}) - 2R_1 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_{1C}}{2} \cos(\varphi_C - \frac{\varphi_1 + \varphi_{1C}}{2}) \\ Wt = \frac{\sin(\varphi_C - \varphi_1)}{\sin(\varphi_C - \varphi_{1C})}.$$

Первое из них связывает независимый параметр φ_1 и зависимый V (эту связь можно установить и геометрически, рассматривая соответствующие треугольники, см. рис. 9). Второе соотношение позволяет вычислить величину Wt .

Итак, все необходимые формулы для рассматриваемого случая получены. Алгоритм вычисления координат точек, лежащих на скелетной линии (в данном случае совпадающей с экраном), остается в общих чертах прежним.

При $R_1 = 0$ полученные формулы описывают взаимодействие с экраном фронта волны от точечного источника.

Для случая взаимодействия с экраном фронта от прямолинейного отрезка формулы упрощаются в результате предельного перехода при $R_1 \rightarrow \infty$ и $\varphi_{1C} \rightarrow \varphi_{BA}$. Например, уравнение (15) для вычисления φ_{1C} переходит в соотношение, определяющее U_C :

$$l_C - l_B = U_C = (x_C - x_B) \sin \varphi_{BA} - (y_C - y_B) \cos \varphi_{BA}.$$

Отметим, что в случае с экраном величина Wt в окончательные формулы не входит, а нужна лишь для нахождения $\min Wt$ по вторым элементам, определяющего (при фиксированном первом элементе) точку на скелетной линии. Отсюда становится понятным, для чего нужны все выведенные в настоящем параграфе формулы и почему нельзя ограничиться лишь уравнением собственно экрана.

В табл. 2 и 3 дана сводка всех основных формул, используемых в алгоритме построения скелета.

На рис. I приведен типичный пример контура, содержащего выпуклую и вогнутую дуги, экран и вогнутый угол. Изображенный на рисунке скелет построен с помощью программы, реализующей изложенный выше алгоритм.

4. Построение эквидистант

После того, как определен скелет контура, не составляет большого труда построить эквидистанты.

Обратимся снова к рис. 2 и 3. Характеристическая поверхность Ω имеет "пирамидальный" вид. Для любого из элементов контура соответствующая грань характеристики пересекается плоскостью $t = \text{const}$ ($0 \leq t \leq t_1$) по линии, имеющей концевые точки на ребрах. Проекция этой линии на плоскость xu и есть эквидистанта. При $t = t_1$ эти две концевые точки либо сливаются в одну, либо переходят в целый отрезок (или дугу) - случай "пленки". При дальнейшем увеличении t данный элемент уже не участвует в рассмотрении.

Для получения эквидистант от отрезка достаточно знать координаты ее концов; эквидистанта от дуги определяется координатами центра дуги, значением ее текущего радиуса и величинами углов концевых нормалей.

При вычислении декартовых координат точек скелета запоминаются их параметрические координаты U_j (или ϕ_j) и Wt_j . Теперь становится оправданным двойное вычисление скелета: для каждого элемента контура мы имеем свою "крышу". Изменяя j , будем перебирать точки на скелетной линии до тех пор, пока не окажется $Wt_j \leq Wt \leq Wt_{j+1}$. Значение параметра U_c (или ϕ_c), соответствующее точке пересечения эквидистанты со скелетом, определим при помощи линейной интерполяции (см. рис. 10). Для отрезка эта интерполяция точная, для дуги - приближенная; ее точность увеличивается при загущении сетки точек. Формулы для вычисления U_c и ϕ_c имеют вид:

Т а б л и ц а 2

К дуге (углу)	К отрезку
$U = \begin{cases} 1, -1_B - \text{ для отрезка,} \\ 2R_1 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_{BA}}{2} - \text{ для дуги} \end{cases}$	
$P(\varphi_1) \sin \frac{\varphi_2}{2} - Q(\varphi_1) \cos \frac{\varphi_2}{2} = 0,$ $P(\varphi_1) = -(x_C - x_B) \sin \frac{\varphi_1}{2} + (y_C - y_B) \cos \frac{\varphi_1}{2} + U \cos \frac{\varphi_{BA} - 2R_2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2} \cos \frac{\varphi_C}{2},$ $Q(\varphi_1) = -(x_C - x_B) \cos \frac{\varphi_1}{2} - (y_C - y_B) \sin \frac{\varphi_1}{2} + U \sin \frac{\varphi_{BA} - 2R_2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2} \sin \frac{\varphi_C}{2}$	
$V = 2R_2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_C}{2}$	$V = \frac{(x_C - x_B) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + (y_C - y_B) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - U \sin \frac{\varphi_{BA} - \varphi_C}{2}}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2}}$

К Дуге (углу)	К отрезку
$- (x_0 - x_B) \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + (y_0 - y_B) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + U \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_B}{2} - V \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_C}{2}$	$Wt = \frac{2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}$
$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x_B + U \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_B}{2} + Wt \cos \varphi_1, \\ \eta = y_B - U \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_B}{2} + Wt \sin \varphi_1 \end{array} \right.$	

Т а б л и ц а 3

К экрану		От отрезка	
От дуги (угла)		От отрезка	
$(x_C - x_B - R_1 \cos \varphi_{BA}) \sin \varphi_{1C} - (y_C - y_B - R_1 \sin \varphi_{BA}) \cos \varphi_{1C} = 0$		$U_C = (x_C - x_B) \sin \varphi_{BA} - (y_C - y_B) \cos \varphi_{BA}$	
$Wt_C = (x_C - x_B) \cos \varphi_{1C} + (y_C - y_B) \sin \varphi_{1C} + R_1 (1 - \cos(\varphi_{1C} - \varphi_{BA}))$		$Wt_C = (x_C - x_B) \cos \varphi_{BA} + (y_C - y_B) \sin \varphi_{BA}$	
$V = (R_1 - Wt_C) \frac{\sin(\varphi_{1C} - \varphi_1)}{\sin(\varphi_C - \varphi_1)}$		$V = - \frac{U - U_C}{\sin(\varphi_C - \varphi_{BA})}$	
$Wt_C \sin(\varphi_C - \varphi_{1C}) - 2R_1 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_{1C}}{2} \cos(\varphi_C - \frac{\varphi_1 + \varphi_{1C}}{2})$		$Wt = Wt_C + V \cos(\varphi_C - \varphi_{BA})$	
$Wt = \frac{\sin(\varphi_C - \varphi_1)}{\sin(\varphi_C - \varphi_1)}$			
$\begin{cases} \xi = x_C + V \cos \varphi_C, \\ \eta = y_C + V \sin \varphi_C \end{cases}$			

$$U_t = U_{j+1} + (U_j - U_{j+1}) \frac{Wt - Wt_{j+1}}{Wt_j - Wt_{j+1}},$$

$$\varphi_t = \varphi_{j+1} + (\varphi_j - \varphi_{j+1}) \frac{Wt - Wt_{j+1}}{Wt_j - Wt_{j+1}} \cdot \frac{R - Wt_j}{R - Wt}.$$

Эти формулы позволяют охватить и тот частный случай, когда два соседних элемента соединяются под одним и тем же углом (например, точка 9 на рис. I). В этом случае часть "крыши" становится "стенкой".

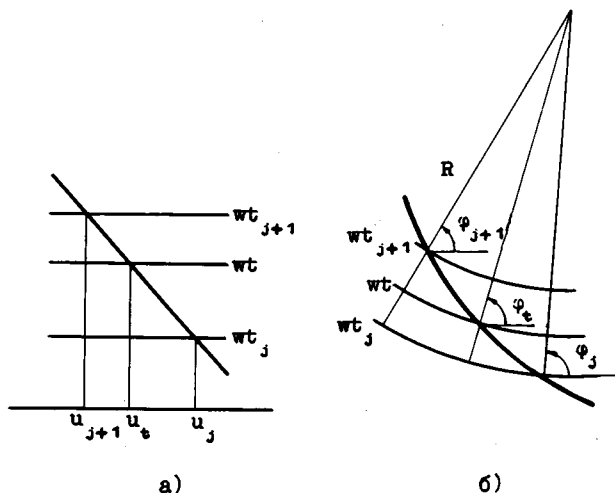


Рис. 10

На рис. I показаны некоторые из эквидистант, просчитанные по программе.

Л и т е р а т у р а

1. ПЕТРОВ А.И. и др. Автоматизированное проектирование технологии обработки материалов. -Ижевск: Удмуртия, 1978. - 194 с.
2. ЛЕВИН В.И., ГРОСБЕРГ Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. -М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951.- 575 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 мая 1985 года