ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск II4

УДК 519.685

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АКСИОМАХ СПИСОЧНОЙ НАДСТРОЙКИ GES

С.С.Гончаров

В [I] для построения понятия вычислимости в произвольных моделях $\mathfrak{M}$ построена списочная надстройка $S(\mathfrak{M})$ для $\mathfrak{M}$, которая добавлена к $\mathfrak{M}$ в качестве нового сорта вместе с некоторым набором операций и отношений: <u>head</u>, <u>tail</u>, <u>cons</u>, <u>conc</u>, <u>nil</u>, $\subseteq$, $\in$.Для этой надстройки построена аксиоматическая теория GES ,определяющая тот минимум свойств надстройки, который необходим для построения хорошей вычислительной теории над $\mathfrak{M}$, аналогичной обобщенной вычислимости в допустимых множествах,но на более простой и близкой к программированию списочной, а не теоретико-множественной,базе. В настоящей работе проводится некоторый анализ аксиом и основных операций GES с целью выявить наименьший базис, отбросив Σ-определимые операции и доказуемые аксиомы. Мы покажем, что в основе всей аксиоматики теории GES лежат аксиомы индукции по списку и глубине списка. С этой целью рассмотрим подтеорию GES_0 теории GES с тем же самым множеством сортов, что и GES, с операциями: <u>head</u>, <u>tail</u>, <u>cons</u>, отношениями: $\subseteq$, $\in$, константой <u>nil</u> и в языке с ограниченными кванторами.

Аксиомами GES_0 будут следующие:

I. Аксиомы пустого списка: $\neg\delta \in \underline{nil}$, $\underline{nil} \subseteq \alpha$.

2. Аксиома единственности: $\underline{cons}(\alpha,\delta) = \underline{cons}(\alpha',\delta') \Rightarrow (\alpha = \alpha' \,\&\, \delta = \delta')$, где α,α' - переменные типа $\langle\{s\}\rangle$, а δ,δ' - типа $\langle I \cup \{s\}\rangle$.

3. Аксиомы списочных операций:

$\underline{tail}\ \underline{cons}(\alpha,\delta) = \alpha$, $\underline{head}\ \underline{cons}(\alpha,\delta) = \delta$,

$\neg\alpha = \underline{nil} \Rightarrow \underline{cons}\,(\underline{tail}(\alpha), \underline{head}(\alpha)) = \alpha$,

$\underline{tail}\,(\underline{nil}) = \underline{nil}$, $\underline{head}\,(\underline{nil}) = \underline{nil}$,

$\delta \in \alpha \,\&\, \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \delta \in \beta$.

4. Аксиома равнообъемности:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow (\forall \gamma \sqsubseteq \alpha)(\gamma \sqsubseteq \beta \,\&\, (\neg \gamma = \beta \vee \neg \gamma = \alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists \delta \in \alpha)(\underline{\text{cons}}(\gamma,\delta) \sqsubseteq \alpha \,\&\, \underline{\text{cons}}(\gamma,\delta) \sqsubseteq \beta).$$

5. Аксиомы, определяющие $\sqsubseteq$ и $\in$:

$$\alpha \sqsubseteq \underline{\text{cons}}(\gamma,\delta) \Leftrightarrow (\alpha \sqsubseteq \gamma \vee \alpha = \underline{\text{cons}}(\gamma,\delta));$$
$$\delta \in \underline{\text{cons}}(\alpha,\delta') \Leftrightarrow (\delta \in \alpha \vee \delta = \delta').$$

6. Аксиома Σ-индукции:

$$([\Phi]^{x}_{\underline{\text{nil}}} \,\&\, (\forall\alpha)(\forall\delta)([\Phi]^{x}_{\alpha} \Rightarrow [\Phi]^{x}_{\underline{\text{cons}}(\alpha,\delta)})) \Rightarrow \forall\alpha\, [\Phi]^{x}_{\alpha},$$

где Φ – Σ-формула.

7. Аксиома Σ-фундируемости:

$$(\forall\alpha)((\forall\delta\in\alpha)[\Phi]^{x}_{\gamma} \Rightarrow [\Phi]^{x}_{\alpha}) \Rightarrow \forall\alpha\, [\Phi]^{x}_{\alpha},$$

где Φ – Σ-формула.

Во всех этих аксиомах α – переменная типа $\langle\{s\}\rangle$; δ,γ,δ' – переменные типа $\langle I \cup \{s\}\rangle$.

Через GES' обозначим теорию с аксиомами I–7, когда индукция и фундируемость берутся по всем формулам.

Нетрудно видеть, что за исключением несущественных изменений это в точности некоторая часть аксиом GES, исключая аксиомы для conc и аксиомы Δ_0-выделения и Δ_0-выборки.

В работе [I] в аксиомах GES для равнообъемности, фундируемости, определений функций и отношений необходимо внести исправления, переформулировав их в соответствии с этой работой.

Модели с надстройкой из списков в этой обедненной сигнатуре, так же как и в [I], будем обозначать $S(\mathfrak{M})$.

ТЕОРЕМА I. Если H, G – функции в $S(\mathfrak{M}) \models GES_0$ и существуют Σ-формулы $\varphi(\bar{x},y)$, $\psi(\bar{x},y,z,t,v)$ такие, что

$$S(\mathfrak{M}) \models \varphi(\bar{a},b) \Leftrightarrow H(\bar{a}) = b$$

и

$$S(\mathfrak{M}) \models \psi(\bar{a},b,c,d,e) \Leftrightarrow G(\bar{a},b,c,d) = e,$$

тогда существует Σ-формула $\Delta(\bar{x},y,z)$, определяющая функцию F: $F(\bar{a},\alpha) = \delta \Leftrightarrow S(\mathfrak{M}) \models \Delta(\bar{a},\alpha,\delta)$ и такую, что $F(\bar{a},\underline{\text{nil}}) = H(\bar{a})$ и

$$F(\bar{a},\underline{\text{cons}}(\alpha,\delta)) = G(\bar{a},\alpha,\delta,F(\bar{a},\alpha)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим, аналогично [I], понятия списочной функции α на β – $\mathrm{LF}(\alpha,\beta)$ и наследственной функции α на β – $\mathrm{HLF}(\alpha,\beta)$, положив:

$$\begin{aligned}
\mathrm{LF}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons {} & (\forall \gamma\in\alpha)(\mathrm{ORDPAIR}(\gamma)\ \& \\
& \& (\forall \alpha_1\in\gamma)(\forall\alpha_2\in\gamma)(\gamma = \langle \alpha_1,\alpha_2\rangle \Rightarrow \alpha_1\sqsubseteq\beta))\& \\
& \& (\forall \delta\sqsubseteq\beta)(\exists\gamma\in\alpha)(\underline{\mathrm{cons}}(\underline{\mathrm{nil}},\delta) = \underline{\mathrm{tail}}(\gamma))\& \\
& \& (\forall \alpha'\sqsubseteq\alpha)(\forall \alpha''\sqsubseteq\alpha')(\exists\delta'\in\underline{\mathrm{tail}}\ \underline{\mathrm{head}}(\alpha'))\times \\
& \times(\exists \delta''\in\underline{\mathrm{tail}}\ \underline{\mathrm{head}}(\alpha''))((\delta''\sqsubseteq\delta')\& \\
& \& (\alpha'\neq\alpha'' \Leftrightarrow \delta'\neq\delta''))
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathrm{HLF}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons {} & \mathrm{LF}(\alpha,\beta)\ \&\ (\forall\gamma\in\alpha)\times \\
& \times((\underline{\mathrm{head}}\ \underline{\mathrm{tail}}(\gamma) = \underline{\mathrm{nil}} \Rightarrow \underline{\mathrm{head}}(\gamma) = \underline{\mathrm{nil}})\& \\
& \& (\exists\alpha_1\in\gamma)(\exists\alpha_2\in\gamma)(\gamma = \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\ \& \\
& \& (\exists\alpha_1'\sqsubseteq\alpha_1)(\exists a\in\alpha_1)(\alpha_1 = \underline{\mathrm{cons}}(\alpha_1', a) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\langle\alpha_1',\alpha_2\rangle\in\alpha \vee (\exists b\in\alpha_2)(\exists\alpha_2'\sqsubseteq\alpha_2)\times \\
& \times(\underline{\mathrm{cons}}(\alpha_2',b) = \alpha_2\ \&\ \langle\alpha_1',\alpha_2'\rangle\in\alpha)))).
\end{aligned}$$

Здесь использовано сокращение $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ для терма $\underline{\mathrm{cons}}(\underline{\mathrm{cons}}\ldots$ $\ldots(\underline{\mathrm{cons}}(\underline{\mathrm{nil}},\alpha_1),\alpha_2)\ldots,\alpha_n)$ и $\mathrm{ORDPAIR}(\gamma)$ для Δ_0-формулы
$$(\exists\alpha_1\in\gamma)(\exists\alpha_2\in\gamma)(\gamma = \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle).$$

В [I] в определении HLF пропущено условие, нужно исправить в соответствии с этой работой.

Определим теперь Σ-формулу Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar{x},\alpha,z) \leftrightharpoons {} & (\alpha = \underline{\mathrm{nil}} \Rightarrow \varphi(\bar{x},z))\ \& \\
& \& (\neg\alpha = \underline{\mathrm{nil}} \Rightarrow (\exists\gamma)(\mathrm{HLF}(\gamma,\alpha)\ \& \\
& \& (\forall\beta\in\gamma)(\forall\delta_1\in\beta)(\forall\delta_2\in\beta)(\beta = \langle\delta_1,\delta_2\rangle \Rightarrow \\
& \Rightarrow ((\delta_1\neq\underline{\mathrm{nil}}\ \&\ \underline{\mathrm{tail}}(\delta_1) = \underline{\mathrm{nil}}) \Rightarrow \varphi(\bar{x},\delta_2))\& \\
& \& (\underline{\mathrm{tail}}(\delta_1)\neq\underline{\mathrm{nil}} \Rightarrow (\exists\beta'\in\gamma)(\exists\delta_1'\in\beta')\times \\
& \times(\exists\delta_2'\in\beta')(\beta' = \langle\delta_1',\delta_2'\rangle\ \&\ \delta_1' = \underline{\mathrm{tail}}(\delta_1)\ \& \\
& \& \psi(\bar{x},\underline{\mathrm{tail}}\ \underline{\mathrm{tail}}(\delta_1),\underline{\mathrm{head}}\ \underline{\mathrm{tail}}(\delta_1),\delta_2',\delta_2)))\ \&
\end{aligned}$$

$\& (\exists \beta \in \gamma)(\exists \delta \in \beta)(\beta = \langle \alpha, \delta \rangle \&$

$\& \phi(\bar{x}, \underline{tail}(\alpha), \underline{head}(\alpha), \delta, z))$.

Используя аксиому Σ-индукции, легко доказать, что $\mathfrak{s}(\mathfrak{M}) \models (\forall \bar{x})(\forall \alpha)(\exists \delta)\Delta(\bar{x}, \alpha, \delta)$ и $\mathfrak{s}(\mathfrak{M}) \models (\forall x, \alpha, \delta, \delta')(\Delta(\bar{x}, \alpha, \delta) \& \Delta(\bar{x}, \alpha, \delta') \rightarrow \delta = \delta')$.

Отсюда получаем, что Σ-формула Δ выделяет в $\mathfrak{s}(\mathfrak{M})$ график некоторой функции F.

Из определения формулы Δ непосредственно следует, что $F(\bar{a}, \underline{nil}) = H(\bar{a})$, а для произвольного α можно легко, вновь пользуясь индукцией, показать, что

$$F(\bar{a}, \underline{cons}(\alpha, \delta)) = G(\bar{a}, \alpha, \delta, F(\bar{a}, \alpha)).$$

Теорема доказана.

Можно определить Σ-формулу $\Delta(x, y, z)$, определяющую функцию $\underline{conc}(x, y)$ со следующим свойством:

$$\underline{conc}(\alpha, \underline{nil}) = \alpha,$$

$$\underline{conc}(\alpha, \underline{cons}(\beta, \delta)) = \underline{cons}(\underline{conc}(\alpha, \beta), \delta).$$

Σ-индукцией легко можно доказать, что для $\underline{conc}$ выполняются свойства:

$$\underline{cons}(\underline{conc}(\alpha, \beta), \delta) = \underline{conc}(\alpha, \underline{cons}(\beta, \delta)),$$

$$\underline{conc}(\underline{conc}(\alpha, \beta), \gamma) = \underline{conc}(\alpha, \underline{conc}(\beta, \gamma)),$$

$$\underline{conc}(\underline{nil}, \alpha) = \underline{conc}(\alpha, \underline{nil}) = \alpha.$$

Таким образом, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Функция $\underline{conc}$ языка GES Σ-определима в GES_0 и удовлетворяет всем аксиомам GES.

Так как $\underline{conc}$ - функция, то из ее Σ-определимости непосредственно вытекает ее Δ-определимость, а поэтому всякая $\Delta(\Sigma)$-формула с функцией $\underline{conc}$ будет эквивалентна соответственно $\Delta(\Sigma)$-формуле, но уже без функции $\underline{conc}$.

ТЕОРЕМА 2. Аксиомы Δ_0-выделения и Δ_0-выборки из теории GES в языке, обогащенном Δ-определимой функцией $\underline{conc}$, выводимы в теории GES_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно понять, что аксиомы Δ_0-выборки и Δ_0-выделения представляют собой определение по рекурсии списочных функций, строящих соответственно по списку α список из значений, удовлетворяющих формуле Φ, и по списку α подсписок β, получающийся вычеркиванием всех элементов, не удовлетворяющих Ф. Но индукцией по длине списка легко показать, что эти функции всегда существуют и, таким образом, мы заключаем доказательство теоремы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Теория GES является Σ-определимым и консервативным расширением теории GES'.

Эта теорема является непосредственным выводом из следствия, теорем I и 2 и того факта, что GES' – подтеория GES.

Основной вывод этой работы состоит в доказательстве ведущей роли аксиомы индукции в нашей теории обобщенной вычислимости и возможности построить уже на ее основе всю теорию интересующей нас вычислимости Σ-программирования.

Литература

I. BARWISE I. Admissible sets and structures.- Berlin: Springer-Verlag, 1975.- 383 с.

2. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование.-В кн.: Логико-математические проблемы МОЗ (Вычислительные системы, вып. 107). Новосибирск, 1985, с. 3-29.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 января 1986 года