ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 114

УДК 510.25:519.68

ДЕНОТАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА ЯЗЫКА Σ-ВЫРАЖЕНИЙ

В.Ю.Сазонов, Д.И.Свириденко

Введение

Настоящая статья содержит описание денотационной семантики введенного Ю.Л.Ершовым языка Σ-выражений [1].

Язык Σ-выражений - это язык предикатов конечных типов (можно также сказать - "предикатных функционалов") с синтаксическими операторами аппликации, абстракции, наименьшей неподвижной точки, а также с логическими связками $\wedge, \vee$, $\forall x \in t$, $\exists x$, применяемыми к Σ-выражениям (булевского типа B). Подразумевается, что подкванторные переменные x пробегают по объектам исходного типа o, образующим "стандартную" модель $\mathbb{A}$ ($=\mathbb{A}_0$) для слабой теории множеств KPU с "праэлементами" (т.е. $\mathbb{A}$ - допустимое множество [2,3]). Например, в качестве $\mathbb{A}$ можно взять "наименьшую" такую модель HF(U) - все наследственно конечные множества над множеством "праэлементов" U, т.е. конечные множества праэлементов, конечные множества праэлементов и уже построенных множеств и т.д.

Естественно, что для задания семантики языка, нужно определить для каждого "предикатного" типа τ, т.е. типа вида $(\tau_1,\ldots$ $\ldots,\tau_n \to B)$, $n \geq 0$, множество $\mathbb{A}_\tau$ "предикатов" этого типа. Ю.Л.Ершов сделал это на основе обобщения теории нумераций на случай допустимых множеств (см. [4]). В настоящей работе предлагается в качестве $\mathbb{A}_\tau$ рассматривать частично упорядоченные множества соответствующих "непрерывных предикатных функционалов" аналогично тому, как это делается для задания денотационной семантики λ-исчисления [5] и языков программирования высокого уровня [6]. Это, в частности, позволяет в обычной манере дать семантику оператора неподвижной точки. Правда, наличие в языке Σ-выражений ограниченного квантора всеобщности $\forall x \in t$ привносит в общем случае некоторые технические трудности. Это связано с естественным требованием, чтобы "непрерывность" предикатных функционалов сохранялась при навешивании на них квантора $\forall x \in t$, что, по существу, сводится к выполнению принципа объединения

$$\forall x \in a \exists y \subseteq P Q(x,y) \to \exists b \subseteq P \; \forall x \in a \; \exists y \subseteq b Q(x,y)$$

для соответствующих предикатов P и Q, определенных уже только на $\mathbb{A}$ (x, y, a, b пробегают $\mathbb{A}$). Однако этот принцип может не выполняться для всех P и Q (кроме, например, случая $\mathbb{A} = HF(U)$). Поэтому в определяемой нами в §2 башне $\mathcal{A} = (\mathbb{A}_\tau)_{\tau \in T}$ всех "непрерывных предикатных функционалов" конечных типов термин "все" обязан некоторым образом соотноситься с исходной моделью $\mathbb{A}$. Во всех прочих отношениях, как и обычно при построении денотационных моделей, определение будет даваться "внешним" по отношению к $\mathbb{A}$ образом. Тем не менее его в некотором смысле можно провести "внутри" $\mathbb{A}$, поскольку структура областей $\mathbb{A}_\tau$ аналогична структуре полных f-пространств [7]. Заметим, что идея релятивизации теории f-пространств к произвольному допустимому множеству $\mathbb{A}$ неоднократно высказывалась Ю.Л.Ершовым при прочтении им спецкурсов в Новосибирском государственном университете.

Построенная в данной работе семантика оказалась хорошо согласованной с исчислением, приводимым в [I]. Более того, она позволила сформулировать дополнительные правила вывода, а также высветить другие особенности языка Σ-выражений, как языка семантического программирования.

§I. Язык Σ-выражений

Фактически мы будем строить семантику некоторого подъязыка L^Σ языка Σ-выражений конечных типов [I]. Из аксиом и правил исчисления, приведенных в [I], следует, что он имеет, по существу, ту же выразительную силу, хотя возможно и менее удобен на практике.

Множество типов T языка L^Σ определяется индуктивно следующим образом:

I) $o \in T$, $B \in T$ (o – тип объектов; B – тип истинностных значений или, как еще говорят, булевский тип);

2) если $\tau, \sigma \in T$ и $\sigma \neq o$, то выражение $(\tau \to \sigma)$ принадлежит T (тип $\tau \to \sigma$) интуитивно может рассматриваться как тип функций, преобразующих объекты типа τ в объекты типа σ);

3) других типов нет.

Определим также множество <u>предикатных типов</u> PT как $T \setminus \{o\}$.

Очевидно, каждый предикатный тип $\tau \in PT$ однозначно представим в виде

$$\tau = (\tau_1 \to (\tau_2 \to \ldots(\tau_n \to B)\ldots)), \qquad (1)$$

где $\tau_i \in T$, $i = 1,\ldots,n$. (Если $\tau = B$, то $n = o$.) Используя это обстоятельство, соотнесем каждому типу $\tau \in T$ величину $h(\tau)$, называемую в дальнейшем <u>глубиной</u> типа τ, определяемую так:

I) $h(o) = 0$, $h(B) = 1$;

2) $h(\tau) = 1 + \sup\{h(\tau_i) \mid 1 \le i \le n\}$, если τ имеет вид (I). Заметим, что если $\tau = (o \to \sigma)$, то $h(\tau) = h(\sigma)$. Далее тип τ вида $(\tau_1 \to \to (\tau_2 \to \ldots(\tau_n \to \sigma)\ldots))$ будем часто обозначать как $(\tau_1,\ldots,\tau_n \to \sigma)$, или просто $(\ldots \to \sigma)$.

Мы будем предполагать фиксированной некоторую (односортную) <u>сигнатуру</u> $\langle =, \in, \ldots \rangle$, т.е. список предикатных и функциональных символов. <u>Говоря о теории множеств KPU, будем считать, что ее аксиомы и схемы аксиом записаны именно в этой сигнатуре.</u> Заметим, что обычно интересуются интерпретацией сигнатурных символов, отличных от $=$ и $\in$, только на праэлементах универсума KPU, хотя такое самоограничение не обязательно.

Определим теперь индуктивно класс <u>Σ-выражений</u> языка L^Σ (сигнатуры $\langle =, \in, \ldots \rangle$), однозначно сопоставляя каждому Σ-выражению его тип. Полагаем:

I) для каждого $\tau \in T$ имеется бесконечное множество переменных, которые объявляются Σ-выражениями типа τ;

2) обычные термы сигнатуры $\langle =, \in, \ldots \rangle$ объявляются Σ-выражениями типа o;

3) если P - сигнатурная предикатная константа (например, $=$, $\in$) местности n, $t_1,\ldots,t_n$ - Σ-выражении типа o, то слова $P(t_1,\ldots,t_n)$ и $\neg P(t_1,\ldots,t_n)$, а также константы $\perp_B$ (ложь) и $\top_B$ (истина) объявляются Σ-выражениями типа B;

4) если Φ и Ψ - Σ-выражения типа B, x - переменная типа o, t - терм типа o, не содержащий переменной x, то $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $\forall x \in t \Phi$, $\exists x \in t \Phi$ и $\exists x \Phi$ также являются Σ-выражениями типа B.

Σ-выражения типа B, в которых участвуют только приведенные до сих пор конструкции, назовем <u>Σ^+-формулами</u>. Класс Σ^+-формул эквивалентен по выразительной силе классу Σ-формул с положительными вхождениями предикатных переменных [2].

5) Если Φ - Σ-выражение типа $(\tau \to \sigma)$, Ψ - Σ-выражение типа τ, то $\Phi(\Psi)$ - Σ-выражение типа σ. Данное выражение можно инту-

итивно воспринимать как результат применения "функции" Φ к "аргументу" Ψ. Вместо $\Phi(\Psi_1)\ldots(\Psi_n)$ будем также писать $\Phi(\Psi_1,\ldots,\Psi_n)$.

6) Если R – переменная типа $\tau\in T$, Φ – Σ-выражение типа $\sigma\in PT$, то $[R;\Phi]$ – Σ-выражение типа $(\tau\to\sigma)$. Интуитивно $[R;\Phi]$ обозначает "функцию", которая возникает при рассмотрении зависимости Φ от переменной R. Вместо $[R_1;\ldots[R_n;\Phi]\ldots]$ будем также писать $[\bar R;\Phi]$, где $\bar R = R_1,\ldots,R_n$.

7) Если R – переменная типа $\tau\in PT$, Φ – Σ-выражение этого же типа, то $\langle R\rangle\Phi$ – Σ-выражение типа τ. Это выражение интуитивно можно воспринимать как "наименьшую неподвижную точку" функции, определяемой Φ, если последнее рассматривать как "функцию" от R.

8) Других Σ-выражений нет.

Вхождение переменной x или R в Σ-выражение называется __связанным__, если оно является частью вхождения выражений вида $\exists x\,\Phi$, $\forall x\in t\,\Phi$ или $\exists x\in t\,\Phi$, или соответственно вида $[R;\Phi]$, или $\langle R\rangle\,\Phi$. Заметим, что переменные, входящие в t для выражений вида $\exists x\in t\,\Phi$ и $\forall x\in t\,\Phi$, являются свободными переменными этих выражений.

Если L^{Σ} сравнивать с языком из [I], то видно, что в нем отсутствуют такие конструкции, как $\Phi\vee\Psi$, $\Phi\wedge\Psi$, $\exists x\,\Phi$, $\forall x\in y\,\Phi$, $\exists x\in y\,\Phi$, $[\Phi;x]\,\Psi$, где Φ и Ψ – Σ-выражения разных типов $\tau_1,\tau_2\in PT$ (возможно, более глубоких, чем B). Причина их отсутствия в L^{Σ} в том, что эти конструкции являются производными в том смысле, что они определяются через конструкции менее глубоких типов и, в частности, через соответствующие конструкции типа B. Поэтому для семантики языка Σ-выражений они не существенны. Заметим также, что и L^{Σ} можно было бы определить несколько иначе, разрешив, скажем, навешивать знак $\neg$ на Σ^{+}-формулы, у которых нет вхождений предикатных переменных и все кванторы ограниченные. И вновь это не нарушило бы выразительной силы языка Σ-выражений.

§2. Башня $\mathcal{A}$ предикатных функционалов конечных типов

При построении семантики L^{Σ} мы будем придерживаться следующей стратегии. Прежде всего фиксируется некий "мир" множеств $\mathbb{A}$ (точнее, модель KPU нашей сигнатуры $\langle =, \in,\ldots\rangle$), служащий нам базисом наших построений. Затем выстраивается "башня" $\mathcal{A} = (\mathbb{A}_{\tau})_{\tau\in T}$, где каждому $\tau\in T$ соотносится некоторое частично упорядоченное множество "предикатных функционалов" $\mathbb{A}_{\tau}$, и показывается, что эта "башня" является моделью языка L^{Σ}. Заметим, что, используя определенные свойства и структуру областей A_τ, $\tau \in T$, башня $\mathscr{A}$ может быть "погружена" в $\mathbb{A}$. Кстати, именно процедура погружения позволяет построить семантику выражения $\langle R \rangle \Phi$. В настоящем параграфе со - держится только определение башни $\mathscr{A}$

Итак, пусть $\mathbb{A}$ - модель теории KPU в языке нашей сигнатуры $\langle =, \in, \ldots \rangle$ и $\mathbb{P}$ - некоторый класс предикатов на $\mathbb{A}$. Обозначим через $\Sigma_n^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ класс n-местных предикатов на $\mathbb{A}$, задаваемых Σ^+-формулами с фиксированными в $\mathbb{P}$ предикатными переменными (входящими, напомним, положительно, на что и указывает "+") и с фиксиро - ванными в $\mathbb{A}$ предметными переменными, кроме выделенных n предметных переменных. Положим $\Sigma^+(\mathbb{P}, \mathbb{A}) \rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ и $\Sigma(\mathbb{A}) \rightleftharpoons \Sigma^+(\emptyset, \mathbb{A})$. Мы будем употреблять также обозначение $\mathrm{\Sigma}(\mathbb{A})$ (<u>сигма бледным шрифтом</u>), если в соответствующих Σ^+-формулах не участ - вуют параметры из $\mathbb{A}$.

Будем говорить, что $\mathbb{P}$ удовлетворяет <u>принципу Σ^+-объединения</u>, если для любых двух предикатов $P \in \Sigma_1^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ и $Q \in \Sigma_2^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ выполняется

$$\forall x \in a\, \exists y \subseteq P\, Q(x,y) \to \exists b \subseteq P\, \forall x \in a\, \exists y \subseteq b\, Q(x,y),$$

где x, y, a, b пробегают $\mathbb{A}$. Примерами такого $\mathbb{P}$ могут служить пу - стой класс предикатов (для любого $\mathbb{A}$; это вытекает из принципа коллекции KPU) и произвольный класс предикатов, если $\mathbb{A} = HF(U)$. Мы оставляем открытым вопрос о том, всегда ли можно представить класс $\Sigma^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ в виде $\Sigma(\widetilde{\mathbb{A}})$, где $\widetilde{\mathbb{A}}$ получается из исходной мо - дели ее расширением новыми функциями и предикатами так, что $\widetilde{\mathbb{A}} \models KPU$ (в расширенной сигнатуре).

Наша цель - определить башню областей $\mathscr{A} = (\langle A_\tau, \subseteq_\tau \rangle)_{\tau \in T}$, где $\subseteq_\tau$ - частичный порядок на области $\mathbb{A}_\tau$. Элементы области $\mathbb{A}_\tau$ будут называться <u>предикатными функционалами</u> (или просто <u>$\mathscr{A}$-пре - дикатами</u>) типа τ. Определение будет вестись индукцией по глуби - не типа τ. Полагаем:

а) $\mathbb{A}_0 \rightleftharpoons A$, $\subseteq_0 \rightleftharpoons =_{\mathbb{A}}$;

б) $\mathbb{A}_B \rightleftharpoons \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (или в других символах $\mathbb{A}_B \rightleftharpoons \{0,1\}$), $\emptyset \subseteq_B \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \not\subseteq_B \emptyset$;

в) $\mathbb{A}_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n} \to B)} \rightleftharpoons \Sigma_n^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$, $\subseteq_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n} \to B)} \rightleftharpoons \subseteq$, $n \geq 1$.

Далее везде предполагается, что <u>класс $\mathbb{P}$ удовлетворяет принципу Σ^+-объединения</u>.

В дальнейшем, для упрощения записи, с любыми выражениями Φ, Ψ, принимающими значения в $\mathbb{A}_B$, мы будем часто обращаться, как с формулами. Например, будем писать $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \to \Psi$, $\exists i \in \mathbb{A}\, \Phi(i)$, $\forall i \in \mathbb{A} \Phi(i)$, $\forall i \in a \Phi$ $(a \in \mathbb{A})$ и т.п., считая, что эти выражения обозначают соответствующие им элементы $\mathbb{A}_B$, определяемые естественным образом.

Предположим теперь, что для каждого типа τ глубины $h(\tau) \leq 1$, $1 \geq 1$, пара $\langle \mathbb{A}_\tau, \sqsubseteq \rangle$ уже определена. Пусть для построенных областей $\mathbb{A}_\tau$ уже доказана справедливость следующих двух условий (ρ) и $(\sqcup)$.

(ρ) Класс $\mathcal{A}$-предикатов $\cup\{\mathbb{A}_\tau | \tau \in T,\ h(\tau) \leq 1\}$ замкнут относительно добавления фиктивных аргументов, а также фиксации или перестановки аргументов.

Это условие позволяет определить на построенных областях общую операцию аппликации $\langle g, x_1, \ldots, x_n \rangle \mapsto g(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что $g \in \mathbb{A}_{(\tau_1, \ldots, \tau_n \to \sigma)}$, $x_i \in \mathbb{A}_{\tau_i}$, $i = 1, \ldots, n$ (где $h((\tau_1, \ldots, \tau_n \to \sigma))$, $h(\tau_i) \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$), полагая $g(\bar{x})(\bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y})$.

В дальнейшем пару (α, K), где

$$\alpha \in A_{(\underbrace{o, \ldots, o}_{n} \to \tau)}, \quad K \in \mathbb{A}_{(\underbrace{o, \ldots, o}_{n} \to B)},$$

будем называть $\mathcal{A}$-семейством типа τ размерности n; α также будет называться $\mathcal{A}$-семейством.

$(\sqcup)$ Для любого одномерного семейства (α, K) типа τ глубины ≤ 1 в $\mathbb{A}_\tau$ существует его точная верхняя грань

$$\bigsqcup_K \alpha = \bigsqcup_{j \in K} \alpha(j).$$

Поскольку $(\bigsqcup_K \alpha)(\bar{x}) = \exists j \in K\ \alpha(j, \bar{x})$, то условие $(\sqcup)$ является, по существу, предположением о замкнутости класса $\mathcal{A}$-предикатов относительно навешивания кванторов вида $\exists j \in K$, где $K \in \mathbb{A}_{(o \to B)}$.

Пусть τ - произвольный тип глубины $1+1$, имеющий (для простоты) вид $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \underbrace{o, \ldots, o}_{k} \to B)$, где $\tau_1, \ldots, \tau_n \in PT$, $n > 0$, $k \geq 0$.

Полагаем, что $\mathbb{A}_\tau$ состоит из всех функций (предикатов)

$$f: \mathbb{A}_{\tau_1} \times \ldots \times \mathbb{A}_{\tau_n} \times \mathbb{A}_0^k \to \mathbb{A}_B,$$

удовлетворяющих приводимым ниже требованиям (Σ), (m) и (c).

(Σ) Если $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – семейства типов $\tau_1,\dots,\tau_n$ соответственно, то предикат

$$P_f(\bar{I}_1,\dots,\bar{I}_n,\bar{J}) \rightleftharpoons f(\alpha_1(\bar{I}_1),\dots,\alpha_n(\bar{I}_n),\bar{J})$$

лежит в $\Sigma^+(\mathbb{P},\mathbb{A})$.

(m) Предикат f является <u>монотонным</u>, т.е. если $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{A}_{\tau_1} x \dots x \mathbb{A}_{\tau_n} x \mathbb{A}_0^k$ и $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ (здесь $\subseteq$ – частичный порядок, определяемый естественным образом по $\sqsubseteq_{\tau_i}$, $i=1,\dots,n$, на декартовом произведении областей), то $f(\bar{x}) \sqsubseteq_B f(\bar{y})$ (т.е. $f(\bar{x}) \to f(\bar{y})$).

(c) Предикат f непрерывен по каждому аргументу предикатного типа, т.е. для произвольного одномерного семейства (α,K) верна импликация

$$f(\dots,\bigcup_K \alpha,\dots) \to \exists q \in \mathbb{A}\,(q \subseteq K \wedge f(\dots,\bigcup_{i\in q}\alpha(i),\dots)).$$

Частичный порядок $\sqsubseteq_\tau$ на $\mathbb{A}_\tau$ определяется соотношением

$$f \sqsubseteq_\tau g \rightleftharpoons \forall \bar{y} \in \mathbb{A}_{\tau_1} x \dots x\, \mathbb{A}_{\tau_n} \; x\, \mathbb{A}_0^k(f(\bar{y}) \sqsubseteq_B g(\bar{y})).$$

На этом определение начального сегмента башни $\mathcal{A}$ (предикатов типов глубины $\leq l+1$) закончено. Башню можно достраивать неограниченно "высоко", поскольку наши предположения (ρ) и ($\bigcup$) сохраняются в данном случае и для типов глубины $l+1$. Покажем это.

То, что свойство (ρ) имеет место, очевидно. Для доказательства свойства ($\bigcup$) покажем, что $\exists j \in K\; \alpha(j,\bar{x})$ как предикат от $\bar{x}$, является $\mathcal{A}$-предикатом. Требование (Σ) для него выполняется в силу замкнутости $\Sigma^+(\mathbb{P},\mathbb{A})$ при навешивании квантора $\exists$. Монотонность такого предиката очевидна. Покажем теперь его непрерывность. Если $\beta \in \mathbb{A}_{(o\to\tau_s)}$, $P \in \mathbb{A}_{(o\to B)}$ и выполняется

$$\exists j \in K\; \alpha(j,\dots,\bigcup_{i\in P}\beta(i),\dots),$$

то в силу непрерывности α имеет место

$$\exists j \in K\; \exists q \subseteq P\; \alpha(j,\dots,\bigcup_{i\in q}\beta(i),\dots),$$

что эквивалентно

$$\exists q \subseteq P\; \exists j \in K\; \alpha(j,\dots,\bigcup_{i\in q}\beta(i),\dots),$$

что и доказывает свойство (c) для предиката $\exists j \in K(\alpha(j,\bar{x}))$ $(=(\bigcup_K \alpha)(\bar{x}))$. Тем самым завершено и доказательство свойства ($\bigcup$) для типов глубины $l+1$.

§3. Свойства башни $\mathcal{A}$

В данном параграфе речь будет идти о тех свойствах башни $\mathcal{A}$-предикатов, которые позволяют рассматривать ее как модель подъязыка $L_1^\Sigma \subseteq L^\Sigma$, где L_1^Σ отличается от L^Σ тем, что в нем отсутствует синтаксическая конструкция $\langle R \rangle \Phi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Класс $\mathcal{A}$-предикатов замкнут относительно следующих операций:

а) "склеивания" переменных $(f(\ldots x\ldots \ldots x\ldots))$;

б) конъюнкции, дизъюнкции, навешивания квантора существования (свойство $(\sqcup)$ из §2);

в) подстановки Σ^+-функций (т.е. функций из $A^n \to A$, у которых графики лежат в $\Sigma^+(P, A)$);

г) навешивания ограниченных кванторов всеобщности $\forall x \in t(\bar{y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого (как и многих последующих) утверждения заключается в проверке выполнимости свойств (Σ), (m) и (c) для вновь определяемых предикатов. То, что в нашем случае для всех новых предикатов выполняется требование (Σ), следует из определения класса $\Sigma^+(P, A)$. Столь же легко проверяется монотонность. Покажем выполнимость свойства (c), скажем, для предиката $\forall i \in a f(\ldots i\ldots)$ (именно в этом случае используется постулированный в §2 принцип Σ^+-объединения для класса P). Пусть имеет место

$$\forall i \in a\, f(\ldots, i, \ldots, \bigsqcup_Q \beta, \ldots).$$

Из непрерывности f вытекает справедливость

$$\forall i \in a\, \exists q \subseteq Q\, f(\ldots, i, \ldots, \bigsqcup_{k \in q} \beta(k), \ldots). \tag{2}$$

Здесь нам понадобится следующая

ЛЕММА I. Если $\beta(k)$ – $\mathcal{A}$-семейство, то и $\beta'(q) \rightleftharpoons \bigsqcup_{k\in q} \beta(k)$ также является $\mathcal{A}$-семейством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из того, что выражение $\bigsqcup_{k\in q} \beta(k)$ записывается через $\beta, \wedge$ и $\exists$.

В силу леммы I выражение $f(\ldots)$ из (2) является предикатом из $\Sigma^+(P, A)$ по i и q. Поэтому можно применить принцип Σ^+-объе -

динения:

$$\exists q_0 \subseteq Q\, \forall i \in a\, \exists q \subseteq q_0\ f(\ldots, i, \ldots \bigcup_{k \in q} \beta(k), \ldots).$$

Используя монотонность f, получаем

$$\exists q_0 \subseteq Q\, \forall i \in a\ f(\ldots, i, \ldots \bigcup_{k \in q_0} \beta(k), \ldots).$$

Тем самым предложение I доказано.

Следующая лемма утверждает, что свойства монотонности и непрерывности предикатных функционалов, сформулированные ранее на "уровне" булевого типа B, могут быть "подняты" на любой уровень.

ЛЕММА 2. Каждый $\mathcal{A}$-предикат f типа $(\ldots \to \tau)$ является монотонным и непрерывным (относительно типа τ) в следующем смысле:

$$\bar{x} \subseteq \bar{y} \to f(x) \subseteq_\tau f(y),$$

$$f(\ldots, \bigcup_Q \alpha, \ldots) = \bigcup_{\substack{q \subseteq Q \\ q \in \mathbf{A}}} f(\ldots, \bigcup_{i \in q} \alpha(i), \ldots).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно очевидно и предоставляется читателю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Клас $\mathcal{A}$-предикатов замкнут относительно операции композиции $f(g(\bar{x}), \bar{y})$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если в $g(\bar{x})$ вместо аргументов из набора $\bar{x}$ подставить семейства соответствующих типов, то полученная конструкция также является семейством (относительно аргументов типа o). Отсюда вытекает справедливость свойства (Σ) для композиции. Монотонность и непрерывность $f(g(\bar{x}), \bar{y})$ следуют из леммы 2 (с использованием предложения I "a", позволяющего считать, что все переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$ различны).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого предикатного типа τ существует $\mathcal{A}$-предикат I_τ типа $(\tau \to \tau)$ такой, что для каждого $\mathcal{A}$-предиката f типа τ

$$I_\tau(f) = f. \qquad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to B)$, $n \geq 0$. Полагаем $I_\tau(f, \bar{x}) \rightleftharpoons f(\bar{x})$. То, что I_τ удовлетворяет равенству (3), очевидно. Покажем, теперь, что I_τ - $\mathcal{A}$-предикат. Пусть $(\alpha, \mathbf{K})$ - семей -

ство типа τ и (β_i, K_i) - семейства типов τ_i, $i=1,\dots,n$. Тогда (Σ)-свойство вытекает из того, что

$$I_\tau(\alpha(\bar{I}),\beta_1(\bar{I}_1),\dots,\beta_n(\bar{I}_n)) = \alpha(\bar{I})(\beta_1(\bar{i}_1),\dots,\beta_n(\bar{i}_n)) =$$
$$= \alpha(\bar{I},\beta_1(\bar{I}_1),\dots,\beta_n(\bar{I}_n)).$$

Монотонность I_τ следует из того, что если $f \subseteq g$ и $\bar{x} \subseteq \bar{y}$, то $f(\bar{x}) \subseteq_B f(\bar{y}) \subseteq_B g(\bar{y})$.

Непрерывность I_τ достаточно показать по первому аргументу f. Пусть (α, K) - семейство типа τ. Тогда

$$I_\tau(\bigcup_K \alpha, \bar{x}) = (\bigcup_K \alpha)(\bar{x}) = \exists i \in K\ \alpha(i, \bar{x}).$$

Полагая $q = \{i\}$, равенство можно продолжить

$$\exists q \subseteq K\ \exists i \in q\ \alpha(i, \bar{x}) = \exists q \subseteq K\ I_\tau(\bigcup_q \alpha, \bar{x}),$$

что и требовалось доказать.

Определим предикат $\underline{Apply}_{\tau,\sigma}$ - оператор <u>аппликации</u> (применения функции к аргументу), полагая $\underline{Apply}_{\tau,\sigma} = I_{(\tau\to\sigma)}$.

Тогда для $f \in \mathbb{A}_{(\tau\to\sigma)}$, $x \in \mathbb{A}_\tau$ имеем

$$\underline{Apply}_{\tau,\sigma}(f, x) = f(x).$$

Используя оператор аппликации, можно образовывать <u>аппликативные выражения</u>, состоящие из применений операции $\underline{Apply}$, рассматриваемой как двухместная функция, т.е. термы, состоящие только из этой операции. Из предложений 2 и 3 вытекает следующая

ТЕОРЕМА I (о комбинаторной полноте $\mathcal{A}$). Любое аппликативное выражение типа B как функция от своих аргументов является $\mathcal{A}$-предикатом.

По этой теореме, принимая во внимание предложение I, можно считать башню $\mathcal{A}$ моделью языка L_1^Σ, о чем шла речь в начале параграфа (подробности см. в §5).

§4. Структура областей $\mathbb{A}_\tau$

Цель данного параграфа - выяснить структуру областей $\mathbb{A}_\tau$, $\tau \in T$, как частично упорядоченных множеств. Мы покажем, что структура $\mathbb{A}_\tau$, $\tau \in PT$, - это в некотором роде структура полных f_0-пространств (см. [7]). Точный смысл этого станет понятным из нижеследующего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $a \in \mathbb{A}_\tau$, $\tau \in PT$, называется <u>$\mathbb{A}$-конечным</u>, если для каждого одномерного семейства (α, K) типа τ верна импликация

$$a \sqsubseteq_\tau \bigsqcup_K \alpha \Rightarrow \exists q \in \mathbb{A}[\, q \subseteq K \wedge a \sqsubseteq_\tau \bigsqcup_{i \in q} \alpha(i)].$$

Из этого определения следует, что в $\mathbb{A}_B$ все элементы $\mathbb{A}$-конечны. Для произвольного $\tau \in PT$ $\mathbb{A}$-конечным в $\mathbb{A}_\tau$ будет наименьший элемент $\bot_\tau$, который для каждого $\bar{x} \in \mathbb{A}_{\tau_1} x \ldots x \mathbb{A}_{\tau_n}$ определяется как $\bot_\tau(\bar{x}) = \Theta$ (подразумевается, что $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to B)$). Аналогично в $\mathbb{A}_\tau$ существует и наибольший элемент $\top_\tau$, но он не является $\mathbb{A}$-конечным (если $\tau \neq B$).

Будем говорить, что одномерное семейство (α, K) <u>направленное</u>, если для каждого $q \in \mathbb{A}$ такого, что $q \subseteq K$, найдется элемент $j \in K$ такой, что $\bigsqcup_{i \in q} \alpha(i) \sqsubseteq \alpha(j)$.

ЛЕММА 3. Элемент $a \in \mathbb{A}_\tau$, $\tau \in PT$, является $\mathbb{A}$-конечным тогда и только тогда, когда для каждого одномерного направленного семейства (α', K') типа τ имеет место

$$a \sqsubseteq \bigsqcup_{K'} \alpha' \Rightarrow \exists q \in K'(a \sqsubseteq \alpha'(q')) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай "только тогда" очевиден. Докажем обратное утверждение. Пусть (α, K) - произвольное семейство типа τ и $a \sqsubseteq \bigsqcup_K \alpha$. Очевидно, $\bigsqcup_K \alpha = \bigsqcup_{q \subseteq K} (\bigsqcup_{i \in q} \alpha(i))$. На основании леммы I определим $\mathcal{A}$-семейство (α', K'), положив

$$\alpha'(q) \rightleftharpoons \bigsqcup_{i \in q} \alpha(i), \quad K' = \{q \in \mathbb{A} \mid q \subseteq K\}.$$

Поскольку оно, как нетрудно видеть, направленное и $a \sqsubseteq \bigsqcup_{K'} \alpha'$, то для некоторого $q \in K'$ имеем $a \sqsubseteq \alpha'(q) = \bigsqcup_{i \in q} \alpha(i)$, причем $q \subseteq K$. Лемма доказана.

Определим для каждого типа $\tau \in T$ индукцией по структуре τ функцию

$$\underline{\mathrm{fin}}_\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_\tau ,$$

одновременно доказывая, что предикат $|\cdot|_\tau$ типа $(\tau \to (o \to B))$, "погружающий" $\mathbb{A}_\tau$ в $\mathbb{A}_{(o \to B)}$ и задаваемый соотношением

$$|f|_\tau(i) \rightleftharpoons \underline{fin}_\tau(i) \sqsubseteq_\tau f \ , \tag{4}$$

является элементом $A_{(\tau,o\to B)}$ и что для $\tau \in PT$ $fin_\tau \in A_{(o\to\tau)}$.

Для $\tau = o$ полагаем $\underline{fin}_o(i) \rightleftharpoons i$. В этом случае предикат $\underline{fin}_o(i) \sqsubseteq j$ есть $i=j$ и, следовательно, принадлежит $A_{(o,o\to B)}$. Если $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n \to B)$, $n \ge 0$, то полагаем

$$\underline{fin}_{(\tau_1,\dots,\tau_n\to B)}(i)(\bar{x}) \rightleftharpoons \exists\langle j_1,\dots,j_n\rangle \in i\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \underline{fin}_{\tau_k}(j_k) \sqsubseteq x_k\right), \tag{5}$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают стандартную кодировку кортежей в A и $\bar{x} = x_1,\dots,x_n$. Заметим, что для $\tau = (\bar{o}\to B)$ (5) превращается в эквивалентность $\underline{fin}_{(\bar{o}\to B)}(i)(\bar{x}) \leftrightarrow \langle \bar{x} \rangle \in i$, а для $\tau = B$ – в эквивалентность $\underline{fin}_B(i) \leftrightarrow \langle\,\rangle \in i$ ($\langle\,\rangle$ – код пустого кортежа).

По предположению индукции о предикатах $|\cdot|_{\tau_k}$, т.е. $\underline{fin}_{\tau_k}(j_k) \sqsubseteq_{\tau_k} x_k$, равенство (5) действительно определяет $fin_\tau \in A_{(o\to\tau)}$. Принадлежность предиката (4) области $A_{(\tau,o\to B)}$ очевидно следует из эквивалентности

$$\underline{fin}_{(\tau_1,\dots,\tau_n\to B)}(i) \sqsubseteq f \leftrightarrow \forall\langle j_1,\dots,j_n\rangle \in i\, f(\underline{fin}_{\tau_1}(j_1),\dots$$
$$\dots, \underline{fin}_{\tau_n}(j_n)), \tag{6}$$

которая доказывается с использованием определения $\sqsubseteq_\tau$, (5) и монотонности f. Итак, наше определение fin_τ и $|\cdot|_\tau$ корректно.

Из определения (5) легко выводятся следующие свойства fin_τ и $|\cdot|_\tau$ для $\tau \in PT$:

а) $i \subseteq j \to \underline{fin}_\tau(i) \sqsubseteq_\tau \underline{fin}_\tau(j)$;

б) $\bigsqcup_{i\in q} \underline{fin}_\tau(i) = \underline{fin}_\tau(\cup q)$ $(q \in A)$;

в) $q \subseteq |f|_\tau \leftrightarrow \cup q \in |f|_\tau$ $(q \in A)$;

г) $(\underline{fin}_\tau, |f|_\tau)$ – направленное A-семейство типа τ ($f \in A_\tau$).

ТЕОРЕМА 2. Для всех $\tau \in T$ и $f \in A_\tau$

$$f = \bigsqcup_{i\in|f|_\tau} \underline{fin}_\tau(i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет вестись индукцией по глубине типа τ. Если $\tau = o$, то равенство следует из того, что $|f|_o = \{f\}$. Столь же очевидно это равенство и для $\tau = B$. Пусть $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n \to B)$, $n \ge 0$, и предположим, что для $\tau_1,\dots,\tau_n$ теорема справедлива. Нужно по –

казать, что если $\bar{x} \in A_{\tau_1} \times \ldots \times A_{\tau_n}$, то из истинности $f(\bar{x})$ следует, что для некоторого $i \in |f|_\tau$ истинно $\underline{fin}_\tau(i, \bar{x})$ (обратная импликация очевидна). В силу предположения индукции, непрерывности f[ж)] и того, что $(\underline{fin}_{\tau_k}, |x_k|)$, $k = 1, \ldots, n$, - направленные семейства, существуют $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{A}$ такие, что для любого $k=1,\ldots,n$ имеет место $\underline{fin}_{\tau_k}(j_k) \subseteq x_k$ и $f(\underline{fin}_{\tau_1}(j_1), \ldots, \underline{fin}_{\tau_n}(j_n))$. Положим $i = \{\langle j_1, \ldots, j_n \rangle\}$. Тогда, очевидно, имеет место $\underline{fin}_\tau(i, \bar{x})$, причем, на основании (6), $\underline{fin}_\tau(i) \subseteq f$, т.е. $i \in |f|_\tau$, что и требовалось доказать.

Для $\tau \in PT$ обозначим через $\mathbb{A}_\tau^{\underline{fin}}$ множество всех $\mathbb{A}$-конечных элементов из $\mathbb{A}_\tau$. Положим также $\mathbb{A}_0^{\underline{fin}} \rightleftharpoons \mathbb{A}_0$.

ТЕОРЕМА 3. Для каждого $\tau \in T$

$$A_\tau^{\underline{fin}} = \{\underline{fin}_\tau(i) \mid i \in \mathbb{A}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для типов o и B теорема очевидна

$$(\mathbb{A}_0^{\underline{fin}} = \mathbb{A}_0, \quad \mathbb{A}_B^{\underline{fin}} = \mathbb{A}_B).$$

Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to B) \in PT$ и $a \in \mathbb{A}_\tau^{\underline{fin}}$. По теореме 2, $a = \bigcup_{i \in |a|} \underline{fin}_\tau(i)$. Так как $(\underline{fin}_\tau, |a|)$ - направленное семейство, то, согласно лемме 3, существует элемент $i \in \mathbb{A}$ такой, что $i \in |a|_\tau$ (т.е. $\underline{fin}_\tau(i) \subseteq a$) и $a \subseteq \underline{fin}_\tau(i)$. Следовательно, $\underline{fin}_\tau(i) = a$.

Покажем теперь, что $\underline{fin}_\tau(i) \in \mathbb{A}_\tau^{\underline{fin}}$ для каждого $i \in \mathbb{A}$. Пусть $\underline{fin}_\tau(i) \subseteq \bigcup_Q \alpha$. В силу эквивалентности (6) имеет место

$$\forall \langle j_1, \ldots, j_n \rangle \in i (\bigcup_Q \alpha)(\underline{fin}_{\tau_1}(j_1), \ldots, \underline{fin}_{\tau_n}(j_n)),$$

т.е.

$$\forall \langle j_1, \ldots, j_n \rangle \in i \, \exists k \in Q \; \alpha(k, \underline{fin}_{\tau_1}(j_1), \ldots, \underline{fin}_{\tau_n}(j_n)).$$

Отсюда по принципу объединения следует

$$\exists q \subseteq Q \forall \langle j_1, \ldots, j_n \rangle \in i \, \exists k \in q \alpha(k, \underline{fin}_{\tau_1}(j_1), \ldots, \underline{fin}_{\tau_n}(j_n)).$$

Вновь используя (6), получаем, что для некоторого $q \subseteq Q$ $\underline{fin}_\tau(i) \subseteq \bigcup_{k \in q} \alpha(k)$. Теорема доказана.

ж) Заметим, что именно в этом месте впервые, по существу, используется наличие K (в нашем случае $|x_k|$ в определении непрерывности предикатных функционалов (см. требование (c) из §2).

Для любого $\tau \in PT$ определим $\mathcal{A}$-предикат $[\cdot]^{\tau} \in \mathbb{A}_{((o\to B)\to\tau)}$ следующим образом:

$$[\,P\,]^{\tau} = \bigsqcup_{i \in P} \underline{\mathrm{fin}}_{\tau}(i).$$

Из теоремы 2 вытекает важное тождество

$$[\,|\,f\,|_{\tau}\,]^{\tau} = f.$$

Заметим, что если операции взять в обратном порядке,то можно лишь утверждать, что $P \subseteq |\,[P]^{\tau}|_{\tau} = \{\, i \in \mathbb{A} \mid \exists q \in \mathbb{A}\,(q \subseteq P \wedge \underline{\mathrm{fin}}_{\tau}(i) \sqsubseteq_{\tau} \sqsubseteq_{\tau} \underline{\mathrm{fin}}_{\tau}(\cup q))\}$.

Первое тождество позволяет нам доказать следующее обобщение теоремы Ганди [2].

ТЕОРЕМА 4 (о неподвижной точке). Если $\mathbb{A}$-допустимое множество (т.е. модель KPU специального вида[ж)]), то для каждого $\tau \in PT$ и $f \in \mathbb{A}_{(\tau\to\tau)}$ неравенство $f(x) \sqsubseteq x$ имеет в $\mathbb{A}_{\tau}$ наименьшее решение $x \gtrsim f_{\infty}$ (обращающее его в равенство).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим неравенство $x \sqsupseteq f(x)$ на неравенство $P \supseteq |f([P]^{\tau})|_{\tau}$. Если P - его наименьшее решение, то

$$[P]^{\tau} \sqsupseteq [\,|f([P]^{\tau})\,|_{\tau}\,]^{\tau} = f([P]^{\tau}).$$

Из $x \sqsupseteq f(x)$ получаем $|x|_{\tau} \supseteq |f(x)\,|_{\tau} = |f([\,|x|_{\tau}]^{\tau})\,|_{\tau}$,откуда $P \subseteq |x|_{\tau}$ и $[P]^{\tau} \sqsubseteq_{\tau} [\,|x|_{\tau}\,]^{\tau} = x$, т.е. $[P]^{\tau}$ есть искомое наименьшее решение f_{∞}.

Итак, достаточно доказать теорему 4 для случая, когда $\tau = (o\to B)$. А это следует из теоремы Ганди для $(\mathbb{A}, \mathbb{P})$ (с позитивными предикатными параметрами; ср. [2]), если показать, что предикат $f(x,i)$ выразим $\Sigma^{+}(\mathbb{P}, \mathbb{A})$ - формулой с (положительной) предикатной переменной x типа $(o\to B)$.

Последнее, в свою очередь, вытекает из равенства

$$f = \bigsqcup_{j \in |f|} \underline{\mathrm{fin}}_{((o\to B)\to(o\to B))}(j)$$

ж) Заметим, что до сих пор модель $\mathbb{A}$ была произвольной моделью KPU. Более того, мы нигде не опирались на схему фундирования KPU. Требование допустимости $\mathbb{A}$ - это, по существу, требование выполнимости на $\mathbb{A}$ некоторого усиления аксиомы фундирования (см. [2,3]).

или $f(x,i) = \exists j[\underline{fin}_{((o\to B)\to(o\to B))}(j,x,i)\wedge Q(j)]$,где $Q(j) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons j \in |f|$ и, следовательно, $Q \in \Sigma^+(\mathbb{P}, \mathbb{A})$. Заметим, что предикат $\underline{fin}\ldots(j,x,i)$ очевидно выразим Σ^+-формулой (без параметров из $\mathbb{P}$ и $\mathbb{A}$ и даже без неограниченного квантора существования). Теорема доказана.

Можно также показать, что наименьшая неподвижная точка f_∞ имеет вид $\bigcup\{f_\alpha | \alpha$ – ординал$\}$, где двухместная функция $\langle f, \alpha\rangle \to f_\alpha$ определяется как (единственная) неподвижная точка $f_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} f(f_\beta)$.

Далее, можно показать, что оператор Y_τ, дающий по любому $\mathcal{A}$-предикату $f \in \mathbb{A}_{(\tau\to\tau)}$ его наименьшую неподвижную точку $f_\infty \in \mathbb{A}_\tau$,сам лежит в $\mathbb{A}_{((\tau\to\tau)\to\tau)}$ и находится как наименьшая неподвижная точка некоторого $\mathcal{A}$-предиката.

§5. Семантика и выразительная сила L^Σ в $\mathcal{A}$

В этом и следующем параграфах предполагается, что $\mathbb{A}$ – допустимое множество. Для каждого Σ-выражения Φ типа $\tau \in T$ и функции

$$\rho: \bigcup_{\sigma\in T} \underline{Var}_\sigma \to \bigcup_{\sigma\in T} \mathbb{A}_\sigma,$$

сопоставляющей переменным всех типов значения в соответствующих областях,определим индукцией по сложности Φ значение $[\![\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho \in \mathbb{A}_\tau$ этого выражения относительно ρ :

$$[\![x]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = \rho(x);$$
$$[\![R]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = \rho(R);$$
$$[\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = f^{\mathbb{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}_\rho,\ldots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}_\rho);$$
$$[\![P(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = P^{\mathbb{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}_\rho,\ldots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}_\rho);$$
$$[\![\neg P(t_1,\ldots,t_n)]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \leftrightarrow P^{\mathbb{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}_\rho,\ldots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}_\rho) = 0;$$
$$[\![\Phi\wedge\Psi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \leftrightarrow [\![\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \text{ и } [\![\Psi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1;$$
$$[\![\Phi\vee\Psi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \leftrightarrow [\![\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \text{ или } [\![\Psi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1;$$
$$[\![\exists x\,\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \leftrightarrow \text{для некоторого } a \in \mathbb{A}\ [\![\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho[x\leftarrow a]} = 1;$$
$$[\![\forall x\in t\,\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_\rho = 1 \leftrightarrow \text{для всех } a\in\mathbb{A} \text{ если } \mathbb{A}\models a\in t, \text{ то } [\![\Phi]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho[x\leftarrow a]} = 1;$$

$$[\![\Phi(\Psi)]\!]_\rho^{\mathcal{A}} = [\![\Phi]\!]_\rho^{\mathcal{A}} ([\![\Psi]\!]_\rho^{\mathcal{A}});$$

$$[\![[x;\ \Phi]]\!]_\rho^{\mathcal{A}}(a, a_1, \ldots, a_n) = [\![\Phi]\!]_{\rho[x \leftarrow a]}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n);$$

$$[\![[R;\ \Phi]]\!]_\rho^{\mathcal{A}}(a, a_1, \ldots, a_n) = [\![\Phi]\!]_{\rho[R \leftarrow a]}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n);$$

$$[\![\langle R \rangle\ \Phi]\!]_\rho^{\mathcal{A}} = Y([\![[R;\ \Phi]]\!]_\rho^{\mathcal{A}}) .$$

Здесь f, P - сигнатурные символы, x - переменная типа o и R - переменная предикатного типа. В пункте, определяющем $[\![[R;\ \Phi]]\!]$, мы опираемся на теорему о комбинаторной полноте башни $\mathcal{A}$ и на тот факт, что выражение $[\![\Phi]\!]_{\rho[R \leftarrow a]}(a_1, \ldots, a_n)$ (типа B), как предикат от $a, a_1, \ldots, a_n$ принадлежит башне $\mathcal{A}$. Поэтому для каждого выражения Φ, определяя его семантику, надо одновременно по индукции доказывать, что предикат $[\![\Phi]\!]_\rho(a_1, \ldots, a_n)$ от $a_1, \ldots, a_n$ и от той конечной части ρ, от которой он фактически зависит, принадлежит башне $\mathcal{A}$. А это, в свою очередь, сводится к установленным ранее свойствам замкнутости класса $\mathcal{A}$-предикатов.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5 (о выразительной силе L^Σ). Если Σ-выражение Φ типа τ не содержит свободных переменных, то, $|[\![\Phi]\!]|_\tau \in \Sigma(\mathbf{A})$. Обратно, если $Q \in \Sigma(\mathbf{A})$, то предикат $[Q]^\tau \in \mathbf{A}_\tau$ имеет вид $[\![\Phi]\!]$ для некоторого такого Σ-выражения Φ.

СЛЕДСТВИЕ. Предикаты, задаваемые Σ-выражениями типа $(o, \ldots, o \to B)$ без свободных переменных (даже с участием подвыражений высоких типов), составляют в точности класс $\Sigma(\mathbf{A})$.

§6. Аксиомы и правила исчисления Σ-выражений

Перечислим несколько выполняющихся в $\mathcal{A}$ (в смысле семантики предыдущего параграфа) аксиом и правил вывода, записываемых с использованием Σ-выражений. Так, сюда относятся все аксиомы и правила исчисления, приведенные в [I]. Кроме того, имеет место экстенсиональность:

$$\frac{\Phi(R) \subseteq \Psi(R)}{\Phi \subseteq \Psi} \quad \text{и} \quad \frac{\Phi(x) \subseteq \Psi(x)}{\Phi \subseteq \Psi},$$

где R и x – предикатная и предметная переменные, не входящие свободно в заключение соответствующего правила (короче, R и x – новые переменные). Отметим две аксиомы, эквивалентные этим правилам,

$[R;\ \Phi(R)] = \Phi$ и $[x;\ \Phi(x)] = \Phi$ (R и x не входят в Φ)

и следствия

$$[R; \bigcup_{i\in K} \Phi(i)] = \bigcup_{i\in K} [R;\Phi(i)] \quad \text{и} \quad [x; \bigcup_{i\in K} \Phi(i)] = \bigcup_{i\in K} [x;\Phi(i)].$$

где K имеет тип $(o \to B)$, $\bigcup_{i\in K} \Phi(i) \rightleftharpoons [-;\ \exists i \in K\Phi(i,-)]$ и тире обозначает список новых переменных таких, что $\Phi(i,-)$ имеет тип B. Фактически $\bigcup_i \Phi(i) = \exists i\,\Phi(i)$ в обозначениях [I].

Отметим также <u>аксиому непрерывности</u>

$$\Phi(\bigcup_{i\in K} \Psi(i)) = \bigcup_{q\subseteq K} \Phi(\bigcup_{i\in q} \Psi(i)),$$

где q – новая предметная переменная, и <u>аксиому объединения</u>

$$\forall x \in t\, \exists y \subseteq \Psi\Phi \to \exists b \subseteq \Psi\, \forall x \in t\, \exists y \subseteq b\Phi.$$

где Σ-выражение Φ имеет тип B, b – новая предметная переменная, а ограниченные кванторы вида $\exists y \subseteq \Psi$, где Ψ – Σ-выражение типа $(o\to B)$ и y – переменная типа o, понимаются как $\exists y[\forall z\in y\Psi(z)\wedge\ldots]$.

Отсюда можно вывести <u>принцип коллекции</u> (выборки, см. [2,3]) для Σ-выражений типа B и <u>аналог принципа рефлексии</u> $\Phi = \bigcup_v \Phi^{(v)}$, где $\Phi^{(v)}$ есть результат замены в произвольном Σ-выражении Φ всех неограниченных кванторов $\exists x$ на $\exists x \in v$.

Наконец, приведем <u>правило индукции по неподвижной точке</u>, например, в следующей форме:

$$\frac{\forall x\in y\,\mathfrak{A}[\tilde{R}(x)] \to \mathfrak{A}[\bigcup_{x\in y} \Phi(\tilde{R}(x))]}{\mathfrak{A}[\langle Q\rangle\Phi(Q)]}.$$

Здесь формула $\mathfrak{A}[Q]$ от переменной Q предикатного типа принадлежит замыканию класса формул вида $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$ (где Ψ_1 и Ψ_2 есть Σ-выражения), относительно операций: I) конъюнкции, 2) дизъюнкции с формулами любого осмысленного в $\mathbb{A}$ языка, в котором участвуют свободные переменные только типа o, и 3) навешивания кванторов всеобщности по типу o. Можно считать, что $\tilde{R}$ – предикатная переменная. Но мы получим более сильное правило, если потребуем, чтобы x и y

пробегали ординалы (в $\mathbb{A}$), и обеспечим монотонность $\widetilde{R}(x)$ по x, положив $\widetilde{R}(x) \rightleftharpoons \bigcup_{y \in x} R(y)$, где R – уже действительно переменная предикатного типа.

Заключение

В связи с построенной семантикой возникают проблемы, представляющие, с точки зрения авторов, определенный интерес. Некоторые из них уже формулировались по ходу изложения. Другие будут сформулированы сейчас.

Отметим прежде всего необходимость выяснить детальную связь введенных в данной статье предикатных функционалов с Σ-предикатами конечных типов Ю.Л.Ершова [4]. По-видимому, обе модели совпадают при $\mathbb{P} = \emptyset$, а при переходе от одних $\mathbb{P}$ к другим имеет место согласованность $\mathbb{A}_\tau(\mathbb{P})$.

Другая проблема состоит в том, чтобы обобщить приведенные построения на случай произвольных типов, разрешая произведения типов, а также типы вроде $(o \to o)$, $((o \to o) \to o)$ и т.п. При этом в последнем случае, естественно, придется частично пожертвовать теоремой о неподвижной точке.

И, наконец, интересно описать бестиповый язык Σ-выражений, его семантику и соответствующее исчисление. В определенном смысле данный бестиповый язык семантического программирования по своему уровню соответствовал бы, скажем, такому языку функционального программирования, как ЛИСП или язык Бэкуса.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Язык Σ-выражений.-Настоящий сборник, с. 3-10.

2. BARWISE J. Admissible sets and structures.- Berlin:Springer-Verlag, 1975.- 393 S.

3. МАККАИ М. Допустимые множества и бесконечная логика.-В кн.: Справочная книга по математической логике, ч.I. М., 1982, с. 235-288.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-предикаты конечных типов. -Алгебра и логика, 1985, т.24, №5, с.499-536.

5. БАРЕНДРЕГТ Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. -М.: Мир, 1985. - 606 с.

6. SCOTT D., STRACHEY C. Towards a mathematical semantics for computer languages.- In: Proc.Symp.on Computers and Automata, Polytechnic Institute of Brooklin.V.21. 1971, p.19-46.

7. ЕРШОВ Ю.Л. Вычислимые функционалы конечных типов. -Алгебра и логика. 1972, т.11, №4, с.367-437.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 февраля 1986 года

Примечания при корректуре:

1. Σ^+-формулы следует определять (в §1 на стр. 18) как Σ-выражения типа B, в которых участвуют предикатные переменные только типов $(0,\ldots,0 \to B)$ и не участвуют конструкции $[R;\Phi]$ и $\langle R\rangle\Phi$.

2. Как и ожидалось, вопрос, приведенный на стр. 20, решается отрицательно, а вопрос о совпадении при $P=\emptyset$ модели $\{A_\tau\}$ с моделью Ю.Л.Ершова из [4] - положительно. Это показано в статье Ю.Л.Ершова "Σ-допустимые множества" (см. стр. 35-39). В ней же приведено доказательство обобщенной теоремы Ганди (в допустимом множестве A с классом предикатов P, удовлетворяющим принципу Σ^+-объединения), к которой была сведена теорема 4. Другое доказательство, полученное независимо первым автором, основано на построении некоторого бестипового варианта исчисления Σ-выражений и является обобщением доказательства известной теоремы Д.Парка о семантике оператора неподвижной точки в λ-исчислении.