ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 114

УДК 681.3:512.8

ТЕОРИЯ СПИСКОВ И ЕЕ МОДЕЛИ

С.С. Гончаров

Вопрос полной логической спецификации различных программистских конструкций представляет одну из важных проблем теоретического программирования [1-3,5,8], так как служит в качестве основы синтеза и верификации программ с заданными свойствами, а также позволяет точно решать вопрос о правильности трансляции, ее соответствии с первоначально заложенными в языке свойствами и возможностями. Ясно, что,в силу теоремы Гёделя о неполноте, полная спецификация всего языка,содержащего арифметику,невозможна.Тем более важно выделить те фрагменты (или,как иногда пишут,фреймы),в которых такая полная характеризация возможна. Это относится,в частности,к понятиям структурного типа, которые характеризуют структуру организации данных и типы их взаимосвязей [8].

В настоящей работе строится аксиоматическая теория списков над элементами заданного типа, которая представляет обобщение теории списков над конечными множествами атомов из [6]. Мы покажем, что теория списков уже над множеством атомов из двух элементов не является категоричной ни в какой мощности. Таким образом, доказательство полноты теории списков над конечными множествами атомов с более чем двумя атомами, основанное на категоричности этой теории, содержит ошибку [6]. Предложенное в [6] доказательство верно лишь для списков с одним атомом. В настоящей работы мы докажем, что теория списков над элементами типа некоторой полной теории будет полна. Таким образом, теория списков над конечным числом атомов будет полной и для числа атомов больше одного.

Следуя [6,7], будем рассматривать теорию списков в двусортной логике первого порядка. Мы определим два типа объектов: атомы и списки.

Язык будет содержать следующие символы:

1) скобки: (,);

2) логические связки $\to$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$;

3) переменные двух типов – atom: $b, b_0, b_1, \ldots$ и list: x, x_0, $x_1, \ldots$;

4) символ равенства = ;

5) символы кванторов $\forall$, $\exists$;

6) символ константы nil типа list;

7) функциональный символ cons: atom x list $\to$ list.

Мы также допускаем любые символы отношений, функций и констант для элементов типа atom. Обозначим через Σ совокупность этих символов отношений, функций и констант на атомах вместе с указанием их местности.

Понятие терма определяется индуктивно; одновременно по каждому типу β.

1. Любая переменная или константа типа β есть терм типа β.

2. Если t_1 – терм типа atom, а t_2 – терм типа list, то cons (t_1, t_2) – терм типа list.

Если $t_1, \ldots, t_n$ – термы типа atom и f – символ n-местной функции из Σ, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ – терм типа atom.

3. Других термов нет.

Понятие формулы также определяется индуктивно, одновременно по каждому типу β.

1. Если t_1, t_2 – термы одного типа, то $t_1 = t_2$ – формула, а если $t_1, \ldots, t_n$ – термы типа atom и P – n-местный предикатный символ, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ – формула. (Формулы этого вида называются также атомными формулами.)

2. Если A и B – формулы и x – переменная какого-либо типа, то выражения $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \,\&\, B)$, $\neg A$, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ также будут формулами.

3. Других формул нет.

В качестве логических аксиом и правил вывода берутся стандартные логические аксиомы и правила вывода логики первого порядка.

Назовем формулу A формулой типа β, если все переменные и константы, входящие в формулу A, – типа β.

Определим теорию списков LL данной сигнатуры аналогично [6], положив в качестве аксиом следующие формулы:

1. $(A^x_{nil} \wedge (\forall x)(\forall b)\,(A \to A^x_{cons(b,x)})) \to (\forall x)A$, где b не входит связанно в A.

II. $(\forall x)(\forall b)[(\neg(nil=cons(b,x))]$.

III. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall b_1)(\forall b_2)((cons(b_1,x_1)) = cons(b_2, x_2) \Rightarrow (b_1 = b_2 \wedge x_1 = x_2))$, где x, x_1, x_2 - переменные типа list, b, b_1, b_2 - переменные типа atom, а A^x_t обозначает формулу, полученную подстановкой вместо всех свободных вхождений переменной x терма t, причем переменные из терма t не имеют связанных вхождений в формулу A.

Определим формульно частичную функцию head, которая каждому списку, отличному от списка nil, сопоставляет атом и функцию tail из множества списков в множество списков, положив, как и в [6]: $head(x) = b \leftrightharpoons \neg(x=nil) \;\&\; (\exists x_0)(cons(b,x_0) = x)$ и $tail(x) = x_0 \leftrightharpoons x = x_0 = nil \vee (\exists b)(cons(b,x_0) = x)$.

ЛЕММА I [6]. В LL доказуемы формулы:

а) $(\forall x)(\neg(x=nil) \Rightarrow (\exists b)(head(x) = b)$,

б) $(\forall x)(\exists x_0)(tail(x) = x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Теорией типа β назовем любое непротиворечивое множество формул типа β.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если T - непротиворечивая теория атомов, то теория LLT, полученная добавлением к аксиомам LL предложений из T, непротиворечива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T - непротиворечивое множество предложений, то существует одноосновная модель $\mathfrak{M}$ теории T, если мы рассматриваем только односортный фрагмент нашей многосортной логики. Определим теперь двусортную модель $(A, M; nil, cons, \Sigma)$, взяв в качестве сорта atom основное множество модели $\mathfrak{M}$, а отношения, функции и константы из Σ определим так, как они были определены в $\mathfrak{M}$. В качестве A возьмем $L(M)$ - множество всех конечных упорядоченных наборов с элементами из M. Определим значение константы nil равным пустому списку, а операцию cons определим для любого упорядоченного набора $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ и элемента a из M, положив $cons(a, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = \langle a_1, \ldots, a_n, a \rangle$. Аналогично теореме I из [6] можно показать, что полученная модель γ будет удовлетворять всем аксиомам LLT. Следовательно, LLT - непротиворечивая теория.

Пусть T - некоторая непротиворечивая теория атомов и пусть LLT - теория списков над атомами теории T, построенная в предложении I.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если существует модель γ теории LLT, имеющая более одного атома, то существует континуум счетных моделей теории LLT, элементарно эквивалентных γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Левенгейма-Скулема "вниз" [4] существует счетная элементарная подмодель $\gamma_0 \preceq \gamma$. Так как в γ было по крайней мере два атома, то можно найти два атома и в γ_0. Пусть $b_0 \neq b_1$ – два атома из γ_0. Покажем, что наша теория не тотально трансцендентна.

Рассмотрим формулы $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$, положив:

$$\varphi_0(x) \rightleftharpoons \neg\, \mathrm{tail}\ \mathrm{tail}(x) = \mathrm{nil}\ \&$$
$$\&\ \neg \mathrm{head}(x) = \mathrm{head}(\mathrm{tail}(x)).$$

Определим разбиение $\{E_n\}_{n\in N}$ множества N, положив $E_0=\{0\}$, $E_{n+1} = \{2k+1, 2k+2 \mid k \in E_n\}$. Пусть теперь для каждого $n \in E_k$ уже определена формула $\varphi_n(x)$. Определим для $n \in E_{k+1}$ формулы:

$$\varphi_{2n+1}(x) \rightleftharpoons \varphi_n(x)\ \&\ \neg \mathrm{tail}^{n+3}(x) = \mathrm{nil}\ \&$$
$$\&\ \mathrm{head}(\mathrm{tail}^{k+2}(x)) = \mathrm{head}(x),$$

$$\varphi_{2n+2}(x) \rightleftharpoons \varphi_n(x)\ \&\ \neg \mathrm{tail}^{k+3}(x) = \mathrm{nil}\ \&$$
$$\&\ \mathrm{head}(\mathrm{tail}^{k+2}(x)) = \mathrm{head}(\mathrm{tail})(x).$$

Ясно, что таким образом мы определили формулы для любого n уже из E_{k+1}.

ЛЕММА 2.

а) $\mathrm{LL} \vdash \neg(\exists x)(\varphi_{2n+1}(x)\ \&\ \varphi_{2n+2}(x))$,

б) $\mathrm{LL} \vdash (\varphi_{2n+1}(x) \to \varphi_n(x))\&(\varphi_{2n+2}(x) \to \varphi_n(x))$,

в) $\mathrm{LL} \vdash \neg\exists x(\varphi_{2n+1}(x)\ \&\ \varphi_{2n+2}(x))$,

г) $\gamma_0 \models (\exists x)\varphi_n(x)$

для любого $n \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения "а" и "б" очевидны.

Докажем "в". Пусть существует модель $\tilde{\gamma}$ для LL, в которой не выполнено $\neg(\exists x)(\varphi_{2n+1}(x)\ \&\ \varphi_{2n+2}(x))$. Тогда существует элемент s такой, что $\tilde{\gamma} \models \varphi_{2n+1}(s)\ \&\ \varphi_{2n+2}(s)$. Так как φ_0 входит как конъюнктивный член в любую формулу φ_k, то $\tilde{\gamma} \models \varphi_0(s)$ и, следовательно, существуют $s \neq \mathrm{nil}$ и $\mathrm{tail}(s) \neq \mathrm{nil}$, а, по лемме I, существуют атомы b_0 и b_1 такие, что $\mathrm{head}(s)=b_0$ и $\mathrm{head}(\mathrm{tail}(s))= = b_1$ и $b_0 \neq b_1$. Но $\tilde{\gamma} \models \varphi_{2n+1}(s)$, следовательно, $b_0 = \mathrm{head}(\mathrm{tail}^k(s))$, а так как $\tilde{\gamma} \models \varphi_{2n+2}(s)$, то $b_1 = head(tail^k(s))$, но это противоречит тому, что $b_0 \neq b_1$.

Перейдем к доказательству "г". Так как в γ_0 есть два неравных атома $a_0 \neq a_1$, то рассмотрим список $s \leftrightharpoons cons(a_1, cons(a_2, nil))$. Тогда, как нетрудно проверить, $\gamma_0 \models \varphi_0(s)$. Докажем наше утверждение индукцией по E_k.

Пусть теперь $n \in E_{k+1}$. В таком случае $n = 2l+1$ или $2l+2$. Так как $l \in E_k$, то, по индукционному предположению, существует элемент s такой, что $\gamma_0 \models \varphi_l(s)$. Определим теперь новые элементы s' и s'', положив $s' = cons(head(s), \ldots, cons(head^i(s), \ldots$ $\ldots, cons(head^{l+3}(s), cons(head(s), nil))$ и $s'' = cons(head(s),$ $cons(head^2(s), \ldots, cons(head^{l+3}(s), cons(head(tail(s)), nil))$.

Нетрудно видеть непосредственно из аксиом, что $head^{i+1}(s') =$ $= head^{i+1}(s'') = head^{i+1}(s)$ для $i \leq l+2$ и $head^{l+4}(s') = head(s)$, а $head^{l+4}(s'') = head(tail(s))$. Но на s выполнена формула $\varphi_0(x)$, следовательно, $head(s) \neq head(tail(s))$, а потому, как нетрудно убедиться по индукции на s' выполнена формула φ_{2n+1}, а на s'' – формула φ_{2n+2}, что и требовалось доказать.

Таким образом, теория модели γ_0 имеет континуум типов, и, следовательно, из мощностных соображений непосредственно следует, в частности, что она имеет континуум счетных моделей. Рассмотрим теперь на типе атомов только n-константных символов $a_1, \ldots, a_n$ и определим теорию T_n, взяв в качестве аксиом формулы

$$a_i \neq a \text{ для } i \neq j; \tag{1}$$

$$\neg(\exists x)(\neg x = a_1 \& \ldots \& \neg x = a_n). \tag{2}$$

В [6] аксиомы вида (I) пропущены, а без них, очевидно, полноты не будет. Определим $LL_n = LLT_n$.

Теория LL_n будет теорией списков над n различными атомами, поименованными константными символами $a_1, \ldots, a_n$, и соответствует теории с n-константами для атомов из [6]. Из нашего предложения мы непосредственно получаем, что теории LL_n не могут быть несчетно категоричны, так как они даже не ω-стабильны.

СЛЕДСТВИЕ. Теория LL_n не категорична ни в какой мощности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если теория атомов T полна, то теория LLT также полна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ_0 и γ_1 – две насыщенные модели мощности ω_1. Рассмотрим в них фрагмент, состоящий из атомов и основных предикатов и функций на атомах. Это будут одноосновные модели

$\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_0$ соответственно, которые очевидным образом тоже будут насыщены, а так как они обе являются моделями полной теории T, то они изоморфны в силу теоремы из [4]. Пусть $\varphi: M_0 \to M_1$ – изоморфизм $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$. Построим теперь изоморфизм двуосновной модели γ_0 на γ_1, для этого нам нужно будет построить отображение на списках, а на атомах мы возьмем отображение φ.

ЛЕММА 3. *Если* $\delta \in S_1$ *и для любого* n *в* γ_1 *выполнено* $tail^n(\delta) \neq nil$, *то существуют* ω_1 *попарно не* θ_1*-эквивалентных элементов* δ' *таких, что для любого* n *в* γ_1 *выполнено* $head^n(\delta) = head^n(\delta')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что их не более чем счетное число. Пусть $\delta_0, \dots, \delta_n, \dots$, $n \in N$, – все такие элементы. Определим тип $p(x)$ над этим счетным множеством $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots\}$, положив:

$$p(x) \rightleftharpoons \{\neg\, tail^k(\delta_i) = tail^l(x) \mid i \in N,\ k, l \in N\} \cup$$

$$\cup \{\neg\, tail^n(\delta_i) = nil \mid i \in N,\ n \in N\} \cup$$

$$\cup \{head^n(\delta_i) = head^n(x)\ \&\ \neg(tail^n(x) = nil) \mid n, i \in N\}.$$

Легко проверить, что это множество формул локально совместно и, по теореме компактности А.И.Мальцева [4], своместно. Пусть S_0 – множество списков модели γ_0, а S_1 – множество списков модели γ_1. Определим на этих множествах отношения эквивалентности θ и θ_1, положив: $\delta_0\ \theta_1\ \delta_1 \rightleftharpoons$;существуют $k \geq 1$, $l \geq 1$ такие, что $\gamma_0 \models tail^k(\delta_0) = tail^l(\delta_1)$.

Рассмотрим фактор-множества S_0/θ_0 и S_1/θ_1 и отношения эквивалентности E_0 и E_1 на них, положив $(\delta_0/\theta_1)E_1(\delta_1/\theta_1) \rightleftharpoons (\exists \delta'_0 \in (\delta_0/\theta_1)(\exists \delta'_1 \in \delta_1/\theta_1) \cdot (\delta'_0 = \delta'_1$ или для любого $n \in N$ выполнено $\gamma \models tail^n(\delta'_0) \neq nil\ \&\ tail^n(\delta'_1) \neq nil\ \&\ head^n(\delta'_0) = head^n(\delta'_1))$ совместно, но в силу насыщенности γ_1 в мощности ω_1 мы должны иметь элемент δ', который реализует этот тип, но в таком случае δ' не θ_1-эквивалентен всем элементам $\delta_0, \dots, \delta_n, \dots$ и, кроме того, для любого n выполнено $head^n(\delta') = head^n(\delta)$.

ЛЕММА 4. *Для любой функции* $f: N \to M_1$ *существует элемент* δ_f *из* S_1 *такой, что* $\gamma_1 \models head^{n+1}(\delta_f) = f(n)$ *для всех* $n \in N$.

Доказывается использованием теоремы компактности А.И.Мальцева [4].

ЛЕММА 5. Если $tail^n(s) = nil$ и $(s/\theta_0)/E_0 = (s'/\theta_0)/E_0$, то существует k такое, что $tail^k(s')=nil$.

Легко доказывается непосредственной проверкой из определений.

Определим отображение $\Psi: (s_1/\theta_0)/E_0 \to (s_1/\theta_1)/E_1$, положив

$$\Psi((\delta_0/\theta_0)/E_0 \leftrightharpoons \begin{cases} (nil/\theta_1)/E_1, & \text{если существует } k \text{ такое, что } tail^k(\delta_0) = nil, \\ (\delta_f/\theta_1)/E_1, & \text{если для любого } n \text{ выполнено } tail^n(\delta_0) \neq nil \text{ и } \delta_f - \text{элемент, построенный в лемме 5 по } f, \text{ а } f(n) \leftrightharpoons \Psi(head^{n+1}(\delta_0)). \end{cases}$$

Покажем, что это определение корректно. Действительно, пусть $(\delta_0/\theta_0)E_0(\delta_1/\theta_0)$, в таком случае, если существует n такое, что $tail^n(\delta_0) = nil$, то, по лемме 5, найдется k такое, что $tail^k(\delta_1) = nil$ и, следовательно, $\Psi((\delta_0/\theta_0)/E_0) = \Psi((\delta_1/\theta_0)/E_0) = (nil/\theta_1)/E_1$. Если для любого n $tail^n(\delta_0) \neq nil$, то, по лемме 5, для любого n $tail^n(\delta_1) \neq nil$. Следовательно, существуют δ_0' и δ_1' такие, что $\delta_0'\ \theta_0\ \delta_0$ и $\delta_1'\ \theta_0\ \delta_1$ и для любого n выполнено $head^n(\delta_0') = head^n(\delta_1')$.

Пусть δ_f^0 и δ_f^1 - элементы такие, что для любого n

$$head^{n+1}(\delta_f^0) = \varphi(head^{n+1}(\delta_0))$$

и

$$head^{n+1}(\delta_f^1) = \varphi(head^{n+1}(\delta_1)).$$

Так как $\delta_0'\ \theta_0\ \delta_0$ и $\delta_1'\ \theta_0\ \delta_1$, то найдутся k_0, l_0 и k_1, l_1 такие, что для любых $n \in N$

$$head^{n+k_0}(\delta_0') = head^{n+l_0}(\delta_0)$$

и

$$head^{n+k_1}(\delta_1') = head^{n+l_1}(\delta_1).$$

Пусть теперь $m \in N$ и $m > 2\max\{k_0, l_0, k_1, l_1\}$, тогда

$$head^m(\delta_f^0) = \varphi(head^m(\delta_0)) = \varphi(head^{(m-l_0)+k_0}(\delta_0')) =$$

$$= \varphi(head^{(m-l_0)+k_0}(\delta_1'))=$$

$= \varphi(\mathrm{head}^{((m-l_0)+k_0-k_1)+l_1}(\delta_1)) = \mathrm{head}^{m+k_0+l_1-l_0-k_1}(\delta_f^1)$.

Пусть $m_0 > 2 + \max\{k_0, l_0, k_1, l_1\}$ и $n_0 = m_0 - (k_0+l_1-l_0-k_1)$. В таком случае $\mathrm{head}^{m+m_0}(\delta_f^0) = \mathrm{head}^{m+n_0}(\delta_f^1)$. Рассмотрим элементы $\tilde\delta_f^0 = \mathrm{tail}^{m_0}(\delta_f)$ и $\tilde\delta_f^1 \leftrightharpoons \mathrm{tail}^{n_0}(\delta_{f_1})$. В таком случае $\tilde\delta_f^0 \theta_1 \delta_f^0$ и $\tilde\delta_f^1 \theta_1 \delta_f^1$, а для любого $m \in N$ выполнено $\mathrm{head}^m(\tilde\delta_f^0) = \mathrm{head}^m(\tilde\delta_f^1)$, следовательно, $(\delta_f^0/\theta_1)/E_1 = (\delta_f^1/\theta_1)/E_1$. Корректность доказана. В силу леммы 4, Ψ отображает $(S_0/\theta_0)/E_0$ на $(S_1/\theta_1)/E_1$. Заметим, что Ψ – разнозначное отображение. Пусть $(\delta_0/\theta_0, \delta_1/\theta_0) \notin E_0$.

Предположим, что $(\delta_f^0/\theta_1, \delta_f^1/\theta_1) \in E_1$. Если существует n такое, что $\mathrm{tail}^n(\delta_0) = \mathrm{nil}$ или $\mathrm{tail}^n(\delta_1) = \mathrm{nil}$, то, в силу леммы 5, уже $(\delta_f^0/\theta_1, \delta_f^1/\theta_1) \notin E_1$. Поэтому мы должны рассмотреть лишь случай, когда для любого n выполнено $\mathrm{tail}^n(\delta_0) \neq \mathrm{nil}$ и $\mathrm{tail}^n(\delta_1) \neq \mathrm{nil}$. Но в этом случае существуют k и l такие, что для любого m имеем $\mathrm{head}^{m+k}(\delta_f^0) = \mathrm{head}^{m+l}(\delta_f^1)$, и так как $\mathrm{head}^{m+k}(\delta_f^0) = \varphi(\mathrm{head}^{m+k}(\delta_0))$, а $\mathrm{head}^{m+l}(\delta_f^1) = \varphi(\mathrm{head}^{m+l}(\delta_1))$, то $\mathrm{head}^{m+k}(\delta_0) = \mathrm{head}^{m+l}(\delta_1)$. Следовательно, $(\delta_0/\theta_0, \delta_1/\theta_1) \in E_1$.

В силу лемм 3 и 5 мы получаем, что класс E_i-эквивалентности состоит либо из одного θ_i-класса, либо из ω_1 θ_i-классов, причем если в E_i-классе один θ_i-класс, то он состоит в точности из таких s, что найдется такое n, что $\mathrm{tail}^n(s) = \mathrm{nil}$.

Определим теперь для каждого E_0-класса взаимно-однозначное отображение f_a из a на $\Psi(a)$. Это возможно сделать, так как они одновременно либо одноэлементны, либо содержат точно ω_1 элементов.

Построим отображение Ψ_0 из S_0/θ_0 на S_1/θ_1, положив

$$\Psi_0(\delta_0/\theta_0) \leftrightharpoons f_{(\delta_0/\theta_0)/E_0}(\delta_0/\theta_0).$$

Искомое отображение λ из S_0 на S_1 строится теперь следующим образом.

Если δ – элемент из S_0 и существует n такое, что $\mathrm{tail}^n(\delta) = \mathrm{nil}$, то рассмотрим наименьшее n с этим свойством и определим $\lambda(\delta) \leftrightharpoons \mathrm{cons}(\varphi\,\mathrm{head}^1(\delta), \varphi\,\mathrm{cons}(\mathrm{head}^2(\delta), \ldots, \mathrm{cons}(\varphi\,\mathrm{head}^n(\delta), \mathrm{nil})$. Ясно, что $\lambda(\delta) \in \Psi_0(\delta/\theta_0)$. Если же для любого n имеем $\mathrm{tail}^n(\delta) \neq \mathrm{nil}$, тогда рассмотрим элемент δ' такой, что $\delta' \in \Psi_0(\delta/\theta_0)$. По построению, $\delta'/\theta_1 \in \Psi((\delta/\theta_0)/E_0)$. Следовательно, существуют k и l такие, что для любого m выполнено $\varphi\,\mathrm{head}^{m+k}(\delta) = \mathrm{head}^{m+l}(\delta')$.

Рассмотрим элемент $\delta'' = tail^{l}(\delta')$ и

$$\delta^{*} \rightleftharpoons cons(\Psi\, head(\delta), \ldots, cons(\Psi\, head^{k}(\delta), \delta'')).$$

Но в таком случае для любого m выполнено $\varphi\, head^{m}(\delta) = head^{m}(\delta^{*})$.

Нетрудно проверить, что элемент δ^{*} определяется однозначно независимо от выбора δ' и k, l, а λ – искомый изоморфизм.

Рассмотрим теперь вопрос об элиминации кванторов в теории линейных списков. Расширим сигнатуру теории L линейных списков двумя двуместными операциями head и tail, а также предположим, что в теории атомов T есть выделяемый элемент error. Добавим к перечню аксиом списков также аксиомы, определяющие функции head и tail, а именно:

$$head(x) = b \leftrightarrow (x = nil) \& (\exists x_0)(cons(b, x_0) = x) \vee x = nil \& \\ \& b = error, tail(x) = x_0 \leftrightarrow x = x_0 = nil \vee \\ \vee (\exists b)(cons(b, x_0) = x).$$

Константа error доопределяет функцию head на пустом списке.

Пусть теперь вновь T – теория атомов, записанная лишь формулами с переменными и операциями типа atom. Рассмотрим теорию списков L_T^{*} над атомами с теорией T в таким образом обогащенной сигнатуре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многосортная теория T допускает элиминацию кванторов относительно сорта i, если для любой формулы φ существуют бескванторная формула Ψ с предикатами $P_1, \ldots, P_n$ из обогащения сигнатуры и формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, в которые не входят термы типа i, такие, что формула Ψ^{*}, полученная подстановкой в Ψ вместо $P_1, \ldots, P_n$ соответственно формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, будет эквивалентна в теории T формуле φ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если теория атомов T полна, то теория списков L_T^{*}, полученная обогащением операциями head и tail и их определениями, допускает элиминацию кванторов по типу list.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим обогащение L' сигнатуры списков с head и tail предикатами $P_\Phi(b_1, \ldots, b_n)$ для каждой формулы $\Phi(b_1, \ldots, b_n)$, не содержащей термов типа list, и добавим аксиомы $(\forall b_1, \ldots, b_n)(P_\Phi(b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow \Phi(b_1, \ldots, b_n))$. Получим новую теорию T' списков над атомами в обогащенной сигнатуре. Ясно, что в этой сигнатуре уже всякая формула без термов типа list будет эквивалентна бескванторной формуле. Покажем, что в обогащенной таким образом сигнатуре вся теория допускает элиминацию кванторов. Отсюда уже непосредственно следует заключение нашего предложения. Для доказательства элиминации кванторов теории T' мы воспользуемся следующим признаком.

ТЕОРЕМА [9]. *Для теории T следующие три условия эквивалентны:*

1) T допускает элиминацию кванторов;

2) T подмодельно полна;

3) каждая диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
\mathfrak{B} \arrow[ur, dashed, "\equiv"] & & \alpha \arrow[ul, dashed] \\
& \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} \mathfrak{B} \models T, \\ \alpha \models T \end{array}$$

может быть дополнена указанным здесь способом.

Нетрудно заметить, что в условии 3 достаточно рассматривать лишь счетные модели: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \alpha$.

Рассмотрим счетные модели α и $\mathfrak{B}$ теории T' и $\mathfrak{A}$, их общую подмодель. Расширим модели α и $\mathfrak{B}$ до α^*- и $\mathfrak{B}^*$-насыщенных моделей мощности ω_1. Итак, $\alpha \preccurlyeq \alpha^*$ и $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}^*$. Покажем теперь, что над $\mathfrak{A}$ существует изоморфизм α^* и $\mathfrak{B}^*$. В силу предложения 3, они изоморфны, но не обязательно над $\mathfrak{A}$. Построим искомый изоморфизм.

Рассмотрим одноосновной фрагмент этих моделей из атомов. Пусть это соответственно α^{at}, $\mathfrak{B}^{at}$ и $\mathfrak{A}^{at}$. Тогда $a^{at} \leq \alpha^{at}$ и $a^{at} \leq \mathfrak{B}^{at}$. Так как фрагмент теории, ограниченный на атомы, допускает элиминацию кванторов, ограничения моделей α^* и $\mathfrak{B}^*$ на одно из основных множеств также будет насыщенной моделью, а поэтому существует изоморфизм $\varphi\colon (\alpha^*)^{at} \underset{\text{на}}{\to} (\mathfrak{B}^*)^{at}$ такой, что $\varphi / \mathfrak{A}^{at} = id$.

Продолжим теперь этот изоморфизм на второе основное множество. Это делается аналогично предложению 3. Отличие состоит лишь в том, что мы фрагмент $\mathfrak{A}^{list}$ отображаем на себя и это можно сделать, так как он счетен, и определенное таким образом построение не влияет на проведение дальнейшей конструкции.

СЛЕДСТВИЕ. Теория LL_n допускает элиминацию кванторов в расширенной сигнатуре

$\langle$ cons, nil, error, head, tail $\rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные рассуждения позволяют показать, что если теория атомов допускает элиминацию кванторов, то и теория списков LLT также допускает элиминацию кванторов.

Из полученных результатов также легко получить конструкцию списков и т.д., как это сделано в [10] для матриц.

Если T - теория атомов, то мы можем построить для нее списки LLT. По полученной теории LLT, взяв ее за атомы, мы можем построить трехосновную LL(LLT) теорию списков над списками, взяв за атомы уже теорию LLT. Этот процесс можно продолжить. Таким образом, мы можем получить теорию списков глубины

$$n - LL_n(T) \rightleftharpoons LL(\dots LL(T)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если T - полная теория, то теория $LL_n(T)$ полна и допускает в обогащении системой функций $head_n$, $tail_n$, $head_{n-1}$, $tail_{n-1}$, ..., $head_1$, $head_1$ элиминацию кванторов по спискам любой глубины $1 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложений 3 и 4.

Литература

1. АГАФОНОВ В.Н. Типы и абстракции данных в языках программирования (обзор). -В кн.: Данные в языках программирования. -М.: Мир, 1982.

2. BROSGOL B.M. Some Issues in Date Types and Type Checking. - In: Lecture Notes in Computer Science, 1977, v.54, p.102-130.

3. EARBY I. Relational Level Date Structures for Programming Languages.-Acta Informatica, 1973, N 2, p.293-309.

4. КЕЙСЛЕР Г., ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей. -М.: Мир, 1977.

5. LISKOV B.H., ZILLES S.N. Specification Techniques for Data Abstractions.-IEEE Trans.on Software Engineering, 1975, v.SE-1.1, March, p.7-19.

6. MOORE D., RUSSELL B. Axiomatic Data Type Specifications: A First order Theory of Linear Lists.- Acta Informatica, 1981, v.15, N 3, p.193-208.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Модельные соответствия. -Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, т.23, № 3, с.313-336.

8. PARNAS D.L. A Technique for Software Module Specification with Examples. Communications of the ACM, 1972, v.15, N 5, p. 330-336.

9. САКС Дж. Теория насыщенных моделей. -М.: Мир, 1976.

10. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных. -В кн:. Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с.75-86.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября 1984 года