СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 519.65

О СПЛАЙН-ФУНКЦИЯХ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.Имамов

В последнее время наблюдается повышенный интерес к задачам интерполяции функций на хаотической сетке узлов [1–5].

В работах [3,4] введено понятие полиномиальных сплайн-функций, связанных с хаотической сеткой узлов. На основе найденных экстремальных свойств было доказано, что задачи интерполяции и сглаживания имеют единственные решения в виде полиномиальных сплайн-функций. Для сплайнов были получены представления в виде разложения через фундаментальные полиномиальные сплайны.

В настоящей статье для полиномиальных сплайн-функций, связанных с хаотической сеткой, дается представление через усеченные степенные функции, выводятся системы линейных уравнений для решения задач интерполяции и сглаживания, а также оценивается погрешность интерполяции. Основным результатом является теорема 1.

1. Постановка задачи. В некотором произвольно заданном множестве точек $\omega = \{(s_i, t_i), i = 1,2,\dots,n\}$, плоскости переменных (s, t) заданы значения $x(s_i,t_i) = z_i$, $i = 1,2,\dots,n$, функции $x = x(s,t)$. Требуется найти достаточно гладкую функцию $\sigma = \sigma(s,t)$ такую, что $\sigma(s_i,t_i) = z_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

Если сетка ω прямоугольная, то эта задача решается достаточно просто. Решение получается в виде полиномов, полиномиальных сплайн-функций или в виде линейных комбинаций фундаментальных решений некоторых операторов [1].

От произвольной сетки ω к прямоугольной сетке можно переходить так, как описано в [3,4]. Пусть

$$a = \min_i s_i, \quad b = \max_i s_i, \quad c = \min_i t_i, \quad d = \max_i t_i.$$

Прямоугольник $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ содержит сетку ω. Пусть $\bar{s}_i, \bar{t}_j$ – те же числа s_i, t_i, но упорядоченные по возрастанию, т.е.

$$\bar{s}_1 < \bar{s}_2 < \ldots < \bar{s}_{n_1}, \quad \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \ldots < \bar{t}_{n_2}, \quad n_1, n_2 \le n.$$

Проведя прямые $s=\bar{s}_i$, $t=\bar{t}_j$, получаем прямоугольную сетку $\Delta = \{(\bar{s}_i,\bar{t}_j),\ i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n_2\}$, которая содержит в себе сетку ω. Отметим, что значения $z_i = x(s_i,t_i), i=1,2,\ldots,n$, заданы, вообще говоря, не во всех узлах сетки Δ. Количество интерполяционных условий равно n, а число узлов сетки – $n_1 n_2$. Недостающие $n_1 n_2 - n+1$ условий, которые налагаются на сплайн, возникли в [3,4] как естественные.

Пусть $C(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ – классы непрерывных и суммируемых с квадратом функций на Ω. Через $X=B_2^{p,q}(\Omega)$, $p,q \ge 1$, обозначим гильбертово пространство Сарда функций $x=x(s,t)$ таких, что

$$x^{(\nu,\mu)}(s,t) \in C(\Omega),\ \nu < p,\ \mu < q;$$

$$x^{(\nu,\mu)}(s,t) \in L_2(\Omega),\ \nu \le p,\ \mu \le q.$$

Введем пространство (гильбертово) $Y = Y(\Omega)$:

$$Y = [L_2(a,b)]^q \times [L_2(c,d)]^p \times L_2(\Omega)$$

и два линейных непрерывных оператора $T: X \to Y$, $A: X \to R^n$, действующих по формулам

$$Tx = [x^{(p,\mu)}(s,c),\ x^{(\nu,q)}(a,t),\ x^{(p,q)}(s,t),\ \nu<p,\ \mu<q],$$

$$Ax = x|_\omega = [x(s_i,t_i),\ i=1,2,\ldots,n].$$

Ясно, что

$$\|Tx\|_Y^2 = \sum_{\mu=0}^{q-1} \| x^{(p,\mu)}(s,c) \|^2_{L_2(a,b)} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \|x^{(\nu,q)}(a,t)\|^2_{L_2(c,d)} + \|x^{(p,q)}(s,t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (1)$$

Сделаем следующее предположение:

$$Tx = 0, Ax = 0 \Rightarrow x = 0. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что если $n_1 \ge p$, $n_2 \ge q$, то предположение (2) выполняется.

Если предположение (2) выполняется, то пространство $X=B_2^{p,q}(\Omega)$ гильбертово относительно нормы $\|\cdot\|_X$, где

$$\|x\|_X^2 = \|Tx\|_Y^2 + \|Ax\|_{R^n}^2 \quad . \tag{3}$$

Пусть теперь $z=[z_1,z_2,\dots,z_n]\in R^n$ и $A^{-1}(z)=\{x\in X\,|\,Ax=z\}\neq\neq\emptyset$, т.е. $A^{-1}(z)$ – множество интерполянтов из пространства X для заданного вектора $z\in R^n$ исходных данных.

Основную задачу переформулируем так: найти интерполяционную сплайн-функцию $\sigma=\sigma(s,t)$ такую, что

$$\sigma = \arg\min_{x\in A^{-1}(z)} \|Tx\|_Y^2 \quad . \tag{4}$$

Наряду с задачей (4) рассматриваем еще и задачу сглаживания: найти сглаживающую сплайн-функцию $\sigma_\rho=\sigma_\rho(s,t)$ такую, что

$$\sigma_\rho = \arg\min_{x\in X}\{\|Tx\|_Y^2 + \rho\|Ax-z\|_{R^n}^2\}, \tag{5}$$

где $\rho>0$ – параметр сглаживания.

Как показано в [4], решения задач (4),(5) существуют, единственны и имеют вид:

$$\sigma = \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{q-1}\alpha_{\nu\mu}s^{\nu}t^{\mu} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_i(s,t), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_i^{\nu} t_i^{\mu} = 0 \ , \quad \nu<p \ , \ \mu<q \ , \tag{7}$$

где

$$K_i(s,t) = K_i(s)K_i(t),$$

$$K_i(s) = \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(s-a)^{\nu}}{\nu!}\cdot\frac{(s_i-a)^{\nu}}{\nu!} + \int_a^b \frac{(s_i-\tilde{s})_+^{p-1}}{(p-1)!}\cdot\frac{(s-\tilde{s})_+^{p-1}}{(p-1)!}\,d\tilde{s} \ ,$$

$$K_i(t) = \sum_{\mu=0}^{q-1}\frac{(t-c)^{\mu}}{\mu!}\cdot\frac{(t_i-c)^{\mu}}{\mu!} + \int_c^d \frac{(t_i-\tilde{t})_+^{q-1}}{(q-1)!}\cdot\frac{(t-\tilde{t})_+^{q-1}}{(q-1)!}\,d\tilde{t}.$$

2. <u>Система уравнений для определения коэффициентов</u>. В представлении (6) для полиномиальных сплайн-функций всего $n+pq$ неизвестных. Из (7) имеем pq условий.

В задаче сплайн-интерполяции добавляется n интерполяционных условий: $\sigma(s_i,t_i) = z_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Таким образом, для определения интерполяционной сплайн-функции имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{q-1}\alpha_{\nu\mu}s_i^{\nu}t_i^{\mu} + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j K_j(s_i,t_i) = z_i, \quad i = 1,2,\dots,n,\\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_j s_j^{\nu}t_j^{\mu} = 0, \quad \nu < p,\ \mu < q. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В задаче сплайн-сглаживания вместо n интерполяционных условий получаются n условий сглаживания $\sigma_\rho(s_i,t_i) = z_i - \lambda_i/\rho$, $i = 1, 2,\dots,n$, вытекающих из (5) как условия минимума.

В результате система линейных уравнений для определения сглаживающей сплайн-функции имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{q-1}\alpha_{\nu\mu}s_i^{\nu}t_i^{\mu} + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j K_j(s_i,t_i) = z_i - \frac{\lambda_i}{\rho}, \quad i = 1,2,\dots,n,\\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_j s_j^{\nu}t_j^{\mu} = 0, \quad \nu < p,\ \mu < q. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для $p = q = 2$ распишем системы уравнений (8) и (9) более подробно в виде матричных уравнений. Для этого введем обозначения:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\\ t_1 & t_2 & \dots & t_n\\ s_1t_1 & s_2t_2 & \dots & s_nt_n \end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix},\quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{00}\\ \alpha_{10}\\ \alpha_{01}\\ \alpha_{11} \end{bmatrix},\quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1\\ \lambda_2\\ \dots\\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $k_{ij} = K_j(s_i,t_i)$, $i,j = 1,2,\dots,n$. Тогда система (8) запишется так:

$$\begin{bmatrix} 0 & B\\ B^* & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ z \end{bmatrix}, \tag{8'}$$

где 0 - нулевая матрица четвертого порядка, а в правой части под 0 понимается вектор-столбец из четырех элементов. Система (9) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & K-\frac{1}{\rho}E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}, \qquad (9')$$

здесь E – единичная матрица порядка n.

Обозначим матрицы систем (8') и (9') через Q и Q_ρ соответственно. Невырожденность их можно показать непосредственно. Согласно [6] клеточные матрицы вида Q и Q_ρ невырождены, если матрица B имеет левую обратную, а матрицы K, $K-\frac{1}{\rho}E$ на элементах ядра матрицы B положительны. Матрица B имеет левую обратную, так как мы предполагаем выполнение условия (2).

Докажем положительность матриц $K, K-\frac{1}{\rho}E$. Мы должны убедиться, что для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию (7), должно выполняться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_{ji} \lambda_j \ge 0 .$$

Действительно, согласно признаку сплайнов [7], $\sigma = \sigma(s,t)$ является полиномиальным сплайном тогда и только тогда, когда

$$(T\sigma, Tx)_Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(s_i, t_i)$$

для всех $x \in X$. Подставляя (6) в это тождество, будем иметь

$$0 \le (T\sigma, T\sigma)_Y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma(s_j, t_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i(s_j, t_j) \Big).$$

<u>3. Оценка точности интерполяции.</u> Обозначим решение задачи (4) через $\sigma_n = \sigma_n(s,t) = \sigma_n(x; s,t)$, чтобы указать зависимость от интерполируемой функции $x = x(s,t)$ и числа n. Пусть h_n – расстояние между множествами ω и Ω, т.е.

$$h_n = \sup_{(s,t)\in\Omega} \inf_{(s_i,t_i)\in\omega} \big((s-s_i)^2 + (t-t_i)^2\big)^{1/2} .$$

Через $P_{pq}(s,t)$ обозначим полином степени $p-1$ по s и $q-1$ по t. Оценим остаточный член интерполяции $R_n(x; s,t) = x(s,t) - \sigma_n(x; s,t)$ в норме $C(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $x \in X = B_2^{p,q}(\Omega)$ интерполируется сплайном $\sigma_n = \sigma_n(x; s,t)$.

Предположим, что существует разбиение области Ω на прямоугольники Ω_γ, $\gamma = 1,2,\ldots,\Gamma$, такое, что

1) $\Omega = \bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} \Omega_\gamma$ и существует число $M>0$ со свойством $\operatorname{diam}\Omega_\gamma \le Mh_n$ для всех $\gamma\in\Gamma$ ($\operatorname{diam}\Omega_\gamma$ - диаметр Ω_γ);

2) из условия $P_{pq}(s_i,t_i) = 0$, $(s_i,t_i)\in \omega\cap\Omega_\gamma$, следует равенство $P_{pq}(s,t) \equiv 0$.

Тогда существуют числа $M_1, M_2, Q=Q(p,q,\Omega)$ такие, что выполняется неравенство

$$\|R_n(x;s,t)\|_{C[\Omega]} \le Q\Big\{ M_2 h_n^{q-\frac12} \max_{a\le s\le b} \sum_{\nu=0}^{p-1} \|x^{(\nu,q)}(s,\bar t)\|_{L_2(c,d)} +$$

$$+ M_1 h_n^{p-\frac12} \max_{c\le t\le d} \sum_{\mu=0}^{q-1} \| x^{(p,\mu)}(\bar s,t)\|_{L_2(a,b)} +$$

$$+ M_1 M_2 h_n^{p+q-1} \| x^{(p,q)}(\bar s,\bar t)\|_{L_2(\Omega)}\Big\} . \qquad (10)$$

Отметим, что в ходе доказательства теоремы будет показано, что $M_1 = M^{p-1/2}$, $M_2 = M^{q-1/2}$. Для определения константы $Q = Q(p,q,\Omega)$ введем функции $u_\nu = u_\nu(s,t)$, $v_\mu = v_\mu(s,t)$, $w = w(s,t)$, задаваемые формулами:

$$u_\nu = \|u_\nu(s,t,\tilde t)\|_{L_2(0,1)}, \quad u_\nu(s,t,\tilde t) = R_n[s^{(\nu)}(t-\tilde t)_+^{(q-1)}],$$

$$v_\mu = \|v_\mu(s,t,\tilde s)\|_{L_2(0,1)}, \quad v_\mu(s,t,\tilde s) = R_n[t^{(\mu)}(s-\tilde s)_+^{(p-1)}],$$

$$w = \| w(s,t,\tilde s,\tilde t)\|_{L_2(\Omega_0)}, \quad w(s,t;\tilde s,\tilde t) = R_n[(s-\tilde s)_+^{(p-1)}(t-\tilde t)_+^{(q-1)}],$$

где $\Omega_0 = [0,1]\times[0,1]$, $s^{(\nu)} = s^\nu/\nu!$, $s_+^{(\nu)} = \max\,[s^{(\nu)}, 0]$. Полагая

$$Q^2(s,t) = \Big\{ \sum_{\nu=0}^{p-1} u_\nu^2(s,t) + \sum_{\mu=0}^{q-1} v_\mu^2(s,t) + w^2(s,t)\Big\},$$

имеем $Q = \max_{(s,t)\in\Omega} Q(s,t)$.

ЛЕММА I. Пусть в $\Omega_0 = [0,1]\times[0,1]$ содержится достаточное количество то -

чек (s_i,t_i), $i=1,2,\dots,n_{pq}$, таких, что из $P_{pq}(s_i,t_i)=0$, $i=1,2,\dots,n_{pq}$, следует $P_{pq}(s,t)=0$. Тогда справедливо представление

$$R_n(x;s,t)=\sum_{\nu=0}^{p-1}\int_0^1 u_\nu(s,t,\tilde{t})x^{(\nu,q)}(0,\tilde{t})\,d\tilde{t}\,+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{q-1}\int_0^1 v_\mu(s,t,\tilde{s})x^{(p,\mu)}(\tilde{s},0)d\tilde{s}+\int_0^1\!\!\int_0^1 w(s,t;\tilde{s},\tilde{t})x^{(p,q)}(\tilde{s},\tilde{t})d\tilde{s}d\tilde{t}. \quad (11)$$

Действительно, по формуле Тейлора для $x\in B^{p,q}(\Omega_0)$ имеем

$$x=P_{pq}(s,t)+\sum_{\nu=0}^{p-1}s^{(\nu)}\int_0^1(t-\tilde{t})_+^{(q-1)}x^{(\nu,q)}(0,\tilde{t})d\tilde{t}\,+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{q-1}t^{(\mu)}\int_0^1(s-\tilde{s})_+^{(p-1)}x^{(p,\mu)}(\tilde{s},0)d\tilde{s}\,+$$

$$+\int_0^1\!\!\int_0^1(s-\tilde{s})_+^{(p-1)}(t-\tilde{t})_+^{(q-1)}x^{(p,q)}(\tilde{s},\tilde{t})d\tilde{s}d\tilde{t}.$$

Отсюда, учитывая, что $R_n(P_{pq};s,t)=0$, легко получаем (II).

Отметим, что равенство (II) может быть получено применением теорем Сарда (см. [7, теоремы 4.7.I и 4.7.2]).

СЛЕДСТВИЕ I. Справедливо неравенство

$$|R_n(x;s\ t)|\le Q\|Tx\|_Y,\ Y=Y(\Omega_0),\ (s,t)\in\Omega_0. \quad (12)$$

Сделав в (I2) замену переменных $\tilde{s}=(\bar{s}-a_\gamma)/(b_\gamma-a_\gamma)$, $\tilde{t}=(\bar{t}-c_\gamma)/(d_\gamma-c_\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливо неравенство

$$|R_n(x;s,t)|\le Q\Big\{(d_\gamma-c_\gamma)^{2q-1}\sum_{\nu=0}^{p-1}\|x^{(\nu,q)}(a_\gamma,\bar{t})\|^2_{L_2(c_\gamma,d_\gamma)}+$$

$$+(b_\gamma-a_\gamma)^{2p-1}\sum_{\mu=0}^{q-1}\|x^{(p,\mu)}(\bar{s},c_\gamma)\|^2_{L_2(a_\gamma,b_\gamma)}+$$

$$+(b_\gamma-a_\gamma)^{2p-1}(d_\gamma-c_\gamma)^{2q-1}\|x^{(p,q)}(\bar{s},\bar{t})\|^2_{L_2(\Omega_\gamma)}\Big\}^{1/2}, \quad (13)$$

$$(s,t)\in\Omega_\gamma,\quad \gamma\in\Gamma.$$

Из (13), учитывая, что $b_\gamma - a_\gamma \le Mh_n$, $d_\gamma - c_\gamma \le Mh_n$, $\|\cdot\|_{L_2[a_\gamma,b_\gamma]} \le$ $\le \|\cdot\|_{L_2[a,b]}$, $\|\cdot\|_{L_2(c_\gamma,d_\gamma)} \le \|\cdot\|_{L_2[c,d]}$, $\|\cdot\|_{L_2[\Omega_\gamma]} \le \|\cdot\|_{L_2[\Omega]}$, и переходя к максимуму по s,t, получаем

$$\|R_n(x;s,t)\|_{C[\Omega]} \le \|\rho\|_{C[\Omega]}\{ M^{2q-1}h_n^{2q-1} \times$$

$$\times \max_{a\le s\le b} \sum_{\nu=0}^{p-1} \|x^{(\nu,q)}(s,\bar t)\|^2_{L_2(c,d)} +$$

$$+ M^{2p-1}h_n^{2p-1} \max_{c\le t\le d} \sum_{\mu=0}^{q-1} \|x^{(p,\mu)}(\bar s,t)\|^2_{L_2(a,b)} +$$

$$+ M^{2p+2q-2}h_n^{2p+2q-2}\|x^{(p,q)}(\bar s,\bar t)\|^2_{L_2[\Omega]}\}^{1/2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что для производных остаточного члена $R_n^{(k,l)}(x;s,t)$ также можно получить оценку вида (10), где степени h_n будут уменьшаться на k и l в соответствующих местах.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ИМАМОВ А. О вариационных задачах теории сплайнов. -В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978, с.27-36.

2. ИМАМОВ А. Формулы интерполирования функций многих переменных. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с.50-55.

3. ИМАМОВ А. О сплайн-функциях двух переменных.-В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып. 57. Ташкент, 1979, с. 7-18.

4. ИМАМОВ А. Сплайны, связанные с хаотической сеткой узлов. -В кн.: Некоторые вопросы прикладной математики и механики. Вып.3, Наманган, 1984, с.71-77.

5. ВАСИЛЕНКО В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. -Новосибирск; Наука, 1983. - 214 с.

6. СОБОЛЕВ С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М.: Наука, 1974. - 808 с.

7. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1975. - 496 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 марта 1986 года