

УДК 519.6:681.3.06

ОТОБРАЖЕНИЕ НА ПЛОСКОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ, БЛИЗКИХ  
К РАЗВЕРТЫВАЮЩИМСЯ

Ю.С.Завьялов, Т.Э.Овчинникова

## §1. Постановка задачи

Отображение различных поверхностей на плоскость - типичная задача инженерной геометрии. Формулируется она следующим образом. Для заданного сегмента поверхности требуется найти плоскую область такой формы, чтобы из нее путем деформации можно было получить исходный сегмент. На деформацию налагаются ограничения, обусловленные, как правило, свойствами материала, из которого предстоит изготовить объект заданной формы. Такие отображения получили название квазиразверток [1].

Пусть сегмент поверхности  $D$  задан векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , где  $u, v$  - криволинейные координаты на поверхности. Область  $\Omega$  на плоскости также будем описывать с помощью вектор-функции  $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$  от параметров  $u, v$ . Тогда задача сводится к построению отображения  $f: \vec{r}(u, v) \rightarrow \vec{R}(u, v)$ , удовлетворяющего некоторым требованиям. Обычно они заключаются в том, что  $f$  должно обладать некоторыми свойствами изометрических отображений, или изгибаний.

Рассмотрим одну из часто встречающихся постановок: деформация должна сохранять длину координатных линий, изменяя только углы между ними, причем искажение углов также не должно превышать некоторой величины. В качестве практического примера можно указать задачу построения лекал для раскроя ткани при автоматизации швейного производства [2]. Здесь требуется построить отображение сегментов поверхности манекена, каркас которого моделирует нити основы и утка ткани на конструктивной детали одежды.

Предположим, что заданный сегмент  $D$  близок к некоторой раз-  
вертываемой поверхности  $D_0$ , описываемой вектор-функцией

$$\bar{r}_0(u, v) = \bar{p}(u) + v \bar{l}(u), \quad (1)$$

где  $\bar{p}(u)$  - направляющая, а  $\bar{l}(u)$  - вектор образующей. Тогда исходную поверхность можно задать уравнением

$$\bar{r}(u, v) = \bar{p}(u) + v \bar{l}(u) + \bar{\varphi}(u, v). \quad (2)$$

Поверхность  $D_0$  в дальнейшем будем называть базовой, а вектор-функцию  $\bar{\varphi}(u, v)$  - уклонением.

Образ сегмента  $D$  при отображении на плоскость представим в аналогичном виде

$$\bar{R}(u, v) = \bar{P}(u) + v \bar{L}(u) + \bar{\Phi}(u, v), \quad (3)$$

причем  $\bar{R}_0(u, v) = \bar{P}(u) + v \bar{L}(u)$  описывает область  $\Omega_0$  на плоскости, полученную из  $D_0$  путем изгибания. Такое представление дает возможность строить отображение сегмента поэтапно: сначала получить развертку базовой поверхности, а затем определить поправку  $\bar{\Phi}(u, v)$ , учитывающую уклонение  $\bar{\varphi}(u, v)$ .

Далее будем использовать следующие обозначения. Для векторов  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$  символом  $(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$  обозначается скалярное произведение,  $\bar{r}_1 \times \bar{r}_2$  - векторное,  $[\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3]$  - смешанное,  $|\bar{r}|$  - модуль вектора  $\bar{r}$ . Векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  - единичные орты на плоскости, на которой строится квазиразвертка. Предполагается, что рассматриваемые поверхности обладают достаточной гладкостью, не ниже класса  $C^2$ .

## §2. Развертка базовой поверхности

Развертку поверхности  $D_0$  будем строить с помощью метода, использованного в [1]. Векторы  $\bar{P}'(u)$  и  $\bar{L}(u)$  на плоскости представим в виде (рис. I):

$$\begin{aligned} \bar{P}'(u) &= |\bar{P}'(u)| \{ \cos \alpha(u) \bar{e}_1 + \sin \alpha(u) \bar{e}_2 \}, \\ \bar{L}(u) &= |\bar{L}(u)| \{ \cos \theta(u) \bar{e}_1 + \sin \theta(u) \bar{e}_2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть  $E, F, G$  - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $D_0$  [3]. При параметризации (I) имеем

$$\begin{aligned} E &= |\bar{P}'|^2 + 2v(\bar{P}'\bar{L}') + v^2 |\bar{L}'|^2, \\ F &= (\bar{P}'\bar{L}) + v(\bar{L}'\bar{L}), \quad G = |\bar{L}|^2. \end{aligned}$$

Аналогично для коэффициентов  $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$  в области  $\Omega_0$  получаем

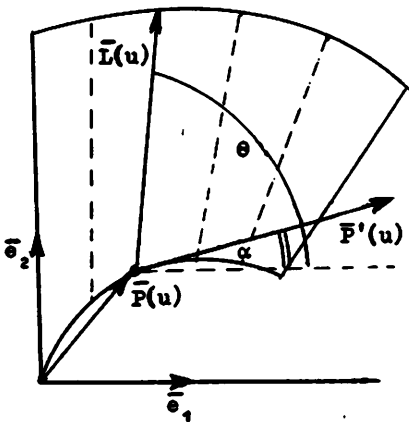


Рис. I

кривой  $\bar{P}(u)$  на поверхности  $D_0$ ,  $\bar{n}(u)$  - единичный вектор нормали к поверхности в точке  $\bar{P} = \bar{P}(u)$ ,  $\bar{k}(u)$  - кривизна плоской кривой  $\bar{P}(u)$ .

Тогда

$$\kappa = \frac{[\bar{P}'' \bar{P}' \bar{n}']}{|\bar{P}'|^3}, \quad \kappa = \frac{[\bar{P}'' \times \bar{P}']}{|\bar{P}'|^3} = \frac{\alpha'}{|\bar{P}'|}.$$

Учитывая, что  $\bar{n} = (\bar{P}' \times \bar{I}) / |\bar{P}' \times \bar{I}|$ ,  $|\bar{P}'| = |\bar{P}'|$ , из условия  $\kappa(u) = \kappa(u)$  получаем

$$\alpha' = \frac{[\bar{P}'' \bar{P}' (\bar{P}' \times \bar{I})]}{|\bar{P}'|^2 |\bar{P}' \times \bar{I}|}.$$

В каждой точке кривой  $\bar{P}(u)$  построим ортонормированную систему векторов  $\bar{\xi} = \bar{L} / |\bar{L}|$ ,  $\bar{\eta} = \bar{\xi}' / |\bar{\xi}'|$ . Из (4) следует

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2, \\ \bar{\eta} &= -\sin \theta \bar{e}_1 + \cos \theta \bar{e}_2, \\ \bar{\xi}' &= \theta' \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $|\bar{I}'| = |\bar{L}'|$  и

$$\bar{L}' = |\bar{I}| \bar{\xi}' + \frac{(\bar{I} \bar{I}')}{|\bar{I}|} \bar{\xi}, \quad (7)$$

$$\hat{E} = |\bar{P}'|^2 + 2\nu(\bar{P}' \bar{L}') + \nu^2 |\bar{L}'|^2,$$

$$\hat{F} = (\bar{P}' \bar{L}') + \nu(\bar{L}' \bar{L}'), \quad \hat{G} = |\bar{L}'|^2.$$

Поскольку эти коэффициенты инвариантны относительно изгиба - ний, то из условий  $E = \hat{E}$ ,  $F = \hat{F}$ ,  $G = \hat{G}$  нетрудно получить

$$\begin{aligned} |\bar{P}'| &= |\bar{P}'|, \quad |\bar{I}| = |\bar{L}|, \quad |\bar{I}'| = |\bar{L}'|, \\ (\bar{P}' \bar{I}) &= (\bar{P}' \bar{L}), \quad (\bar{P}' \bar{I}') = (\bar{P}' \bar{L}'). \end{aligned} \quad (5)$$

Для отыскания углов  $\alpha(u)$  и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

и  $\theta(u)$  в представлении (4) воспользуемся свойством инвариантности геодезической кривизны кривых при изгибаниях. Пусть  $\kappa(u)$  - геодезическая кривизна

то

$$|\bar{l}'|^2 = |\bar{l}|^2 \theta'^2 + \frac{(\bar{l}\bar{l}')^2}{|\bar{l}|^2},$$

$$\theta'^2 = \frac{|\bar{l}|^2 |\bar{l}'|^2 - (\bar{l}\bar{l}')^2}{|\bar{l}|^4} = \frac{|\bar{l} \times \bar{l}'|^2}{|\bar{l}|^4}.$$

Таким образом, параметры развертки базовой поверхности определяются системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{[\bar{r}'' \bar{r}' (\bar{r}' \times \bar{l})]}{|\bar{r}'|^2 |\bar{r}' \times \bar{l}|}, \\ \theta' &= \pm \frac{|\bar{l} \times \bar{l}'|}{|\bar{l}|^2}, \\ \bar{r}' &= |\bar{r}'| \{ \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2 \}, \\ \bar{l} &= |\bar{l}| \{ \cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для ее решения требуется задать значения  $\alpha_0 = \alpha(u_0)$ ,  $\theta_0 = \theta(u_0)$ ,  $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0)$ . Ясно, что выбор  $\alpha_0$  и  $\bar{r}_0$  влияет только на расположение области  $\Omega_0$  относительно системы координат  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ . Угол  $\theta_0$  выбирается следующим образом. Поскольку  $\theta$  и  $\alpha$  связаны соотношением  $\theta = \alpha + \beta$ , где  $\beta$  — угол между направляющей и образующей на плоскости, а углы между кривыми инвариантны относительно изгибаний, то следует положить  $\theta_0 = \alpha_0 + \beta_0$ , где  $\beta_0$  — угол между векторами  $\bar{r}'(u_0)$  и  $\bar{l}(u_0)$ .

### §3. Квазиразвертка поверхности общего вида

Для построения квазиразвертки сегмента  $D$  остается определить функцию  $\bar{\varphi}(u, v)$  в представлении (3), такую, чтобы выполнялось условие сохранения длин координатных кривых. Это условие означает равенство первого и третьего коэффициентов первых квадратичных форм поверхности и области  $\Omega$ . Для сегмента поверхности, заданного уравнением (2), коэффициенты имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= |\bar{r}'|^2 + v^2 |\bar{l}'|^2 + 2v(\bar{r}'\bar{l}') + 2v(\bar{\varphi}_u \bar{l}') + 2(\bar{\varphi}_u \bar{r}') + |\bar{\varphi}_u|^2, \\ E_3 &= (\bar{r}'\bar{l}) + v(\bar{l}'\bar{l}) + (\bar{l}\bar{\varphi}_v) + (\bar{r}'\bar{\varphi}_v) + v(\bar{l}'\bar{\varphi}_v) + (\bar{\varphi}_u \bar{\varphi}_v), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$G_1 = |\bar{l}|^2 + 2(\bar{\varphi}_V \bar{l}) + |\bar{\varphi}_V|^2.$$

В области  $\Omega$  коэффициенты задаются аналогичными выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_1 &= |\bar{P}'|^2 + v^2 |\bar{L}'|^2 + 2v(\bar{P}'\bar{L}') + 2v(\bar{\varphi}_U \bar{L}') + 2(\bar{\varphi}_U \bar{P}') + |\bar{\varphi}_U|^2, \\ \hat{F}_1 &= (\bar{P}'\bar{L}') + v(\bar{L}'\bar{L}') + (\bar{L}'\bar{\varphi}_U) + (\bar{P}'\bar{\varphi}_V) + v(\bar{L}'\bar{\varphi}_V) + (\bar{\varphi}_U \bar{\varphi}_V), \\ \hat{G}_1 &= |\bar{L}|^2 + 2(\bar{\varphi}_V \bar{L}) + |\bar{\varphi}_V|^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Поскольку  $\bar{L}$  и  $\bar{P}$  удовлетворяют соотношениям (5), то из условий  $E_1 = \hat{E}_1$ ,  $G_1 = \hat{G}_1$  получаем систему уравнений относительно функции  $\bar{\varphi}(u, v)$ :

$$\left. \begin{aligned} 2v(\bar{\varphi}_U \bar{L}') + 2(\bar{\varphi}_U \bar{P}') + |\bar{\varphi}_U|^2 &= 2v(\bar{\varphi}_U \bar{L}') + 2(\bar{\varphi}_U \bar{P}') + |\bar{\varphi}_U|^2, \\ 2(\bar{\varphi}_V \bar{L}) + |\bar{\varphi}_V|^2 &= 2(\bar{\varphi}_V \bar{L}) + |\bar{\varphi}_V|^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Исходное предположение относительно сегмента  $D$  состояло в том, что он мало уклоняется от базовой поверхности. Теперь можно уточнить это условие. Будем считать, что функция  $\bar{\varphi}(u, v)$  и ее производные  $\bar{\varphi}_U(u, v)$ ,  $\bar{\varphi}_V(u, v)$  малы по сравнению с остальными величинами в уравнениях (II). В дальнейших рассуждениях считаем так же, что и поправка  $\bar{\varphi}(u, v)$  этому условию удовлетворяет. Тогда в уравнениях можно пренебречь квадратами производных этих функций, что приводит к системе линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v(\bar{\varphi}_U \bar{L}') + (\bar{\varphi}_U \bar{P}') &= v(\bar{\varphi}_U \bar{L}') + (\bar{\varphi}_U \bar{P}'), \\ (\bar{\varphi}_V \bar{L}) &= (\bar{\varphi}_V \bar{L}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Представим  $\bar{\varphi}(u, v)$  в виде разложения по векторам  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ , определяемым формулами (6):

$$\bar{\varphi}(u, v) = \varphi_1(u, v)\bar{\xi}(u) + \varphi_2(u, v)\bar{\eta}(u). \quad (13)$$

Тогда область  $\Omega$  будет описываться уравнением

$$\bar{R}(u, v) = \bar{P}(u) + \{v|\bar{l}(u)| + \varphi_1(u, v)\}\bar{\xi}(u) + \varphi_2(u, v)\bar{\eta}(u). \quad (14)$$

После подстановки разложения (13) и выражений для  $\bar{P}'$  и  $\bar{L}$  из (4), (7) в (12), получаем систему уравнений относительно скалярных функций  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{1u}q_1 + \Phi_{2u}q_2 + \Phi_1\theta'q_2 - \Phi_2\theta'q_1 &= f_1, \\ \Phi_{1v}|\bar{l}| &= f_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $q_1 = v(|\bar{l}'|)/|\bar{l}| + |\bar{p}'|\cos(\theta - \alpha)$ ,  $q_2 = v|\bar{l}'|\theta' - |\bar{p}'|\sin(\theta - \alpha)$ ,  
 $f_1 = v(\bar{\Phi}_u\bar{l}') + (\bar{\Phi}_u\bar{p}')$ ,  $f_2 = (\bar{\Phi}_v\bar{l})$ .

Из второго уравнения системы (15) при заданном граничном условии  $\Phi_1(u, v) = \Psi_1(u)$  сразу же получаем:

$$\Phi_1(u, v) = \frac{1}{|\bar{l}(u)|} \int_{v_0}^v f_2(u, s) ds + \Psi_1(u).$$

Далее из первого уравнения системы имеем  $\Phi_{2u}q_2 - \Phi_2\theta'q_1 = \hat{f}_1$ , где  $\hat{f}_1 = f_1 - \Phi_{1u}q_1 - \Phi_1\theta'q_2$ .

Предположим, что на всем сегменте  $D$  коэффициент  $q_2$  отличен от нуля, т.е.  $v|\bar{l}'|\theta' - |\bar{p}'|\sin(\theta - \alpha) \neq 0$ . Тогда, полагая  $\Phi_2(u_0, v) = \Psi_2(v)$ , находим

$$\Phi_2(u, v) = \exp \left[ \int_{u_0}^u Q_1(t, v) dt \right] \left\{ \int_{u_0}^u Q_2(t, v) \exp \left[ - \int_{u_0}^t Q_1(\tau, v) d\tau \right] dt + \Psi_2(v) \right\},$$

где  $Q_1 = -\theta'q_1/q_2$ ,  $Q_2 = \hat{f}_1/q_2$ .

Функции  $\Psi_1, \Psi_2$  выбираются исходя из характера приближения сегмента  $D$  базовой поверхностью  $D_0$ , а также из дополнительных соображений относительно области  $\Omega$ . Приведем один пример выбора граничных условий.

Пусть область значений параметров  $u, v$  является прямоугольником  $[0, U] \times [0, V]$ , а поверхность  $D_0$  построена так, что вдоль координатной кривой  $v=0$  она совпадает с исходным сегментом  $D$ . Тогда

$$\Phi_1(u, v) = \frac{1}{|\bar{l}(u)|} \int_0^v f_2(u, s) ds.$$

Если, кроме того, требуется, чтобы координатная кривая  $u=0$  в области  $\Omega$  была прямой линией, то из уравнения (14) видно, что должно выполняться условие  $\Phi_2(0, v) = 0$  или  $\Psi_2 \equiv 0$ . При этом получаем решение

$$\Phi_2(u, v) = \left\{ \int_0^u Q_2(t, u) \exp \left[ - \int_0^t Q_1(\tau, v) d\tau \right] dt \right\} \exp \left[ \int_0^u Q_1(t, v) dt \right].$$

Остается оценить, насколько изменяются углы между координатными кривыми при таком отображении. Пусть  $\beta(u, v)$  — угол между кривыми координатной сетки исходного сегмента, а  $\hat{\beta}(u, v)$  — соответствующий угол в области  $\Omega$ . Поскольку [3]  $\cos \beta = F_1 / \sqrt{E_1 G_1}$ ,  $\cos \hat{\beta} = \hat{F}_1 / \sqrt{\hat{E}_1 \hat{G}_1}$ , где  $E_1, F_1, G_1$  и  $\hat{E}_1, \hat{F}_1, \hat{G}_1$  определяются формулами (9), (10), а  $E_1 = \hat{E}_1, G_1 = \hat{G}_1$ , то

$$\cos(\beta - \hat{\beta}) = (F_1 \hat{F}_1 + \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \sqrt{\hat{E}_1 \hat{G}_1 - \hat{F}_1^2}) / (E_1 G_1).$$

Отсюда

$$\Delta\beta = (\beta - \hat{\beta}) = \arccos \left( \frac{F_1 \hat{F}_1 + \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \sqrt{\hat{E}_1 \hat{G}_1 - \hat{F}_1^2}}{E_1 G_1} \right).$$

Учитывая равенства (5), коэффициент можно представить в виде  $\hat{F}_1 = F_1 + \delta$ , где  $\delta = (\bar{L}' \bar{\Phi}_u) - (\bar{L} \bar{\Phi}_u) + (\bar{P}' \bar{\Phi}_v) - (\bar{P} \bar{\Phi}_v) + v[(\bar{L}' \bar{\Phi}_v) - (\bar{L} \bar{\Phi}_v)]$ . В этом выражении, как и при выводе уравнений (12), мы пренебрегли величинами  $(\bar{\Phi}_u \bar{\Phi}_v)$  и  $(\bar{\Phi}_v \bar{\Phi}_v)$ , считая их малыми по сравнению с остальными параметрами. Тогда, рассматривая изменение угла как функцию параметра  $\delta$ , можно записать  $\Delta\beta(\delta) = \Delta\beta(0) + \delta \Delta\beta'(0) + O(\delta^2)$ . Отсюда нетрудно получить оценку

$$|\Delta\beta| = \frac{|\delta|}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} + O(\delta^2).$$

#### §4. Квазиразвертка поверхности вращения

Критерием эффективности работы алгоритма может служить точность, с которой сохраняется длина координатных кривых сегмента. Ясно, что относительное изменение длины будет тем меньше, чем лучше базовая поверхность приближает исходный сегмент. В общем случае трудно дать какие-либо рекомендации по способу построения этой развертывающейся поверхности. Поэтому в качестве примера ограничимся рассмотрением поверхностей вращения.

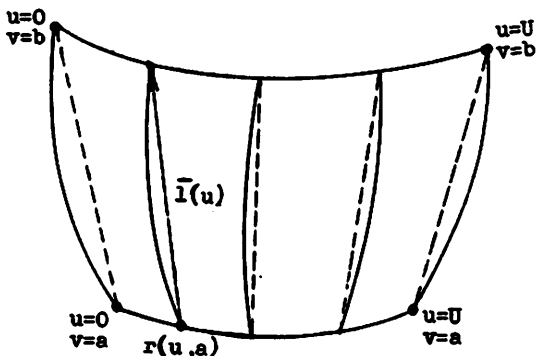


Рис. 2

Пусть сегмент поверхности задан параметрическими уравнениями  $x = d(v)\cos u$ ,  $y = d(v)\sin u$ ,  $z = f(v)$ , где  $f, d$  - некоторые функции класса  $C^2$  от параметра  $v$ . Областью значений параметров  $u, v$  является прямоугольник  $[0, U] \times [a, b]$ ,  $U < 2\pi$ . Если в качестве направляющей взять координатную линию  $\bar{r}(u, a)$ , а в качестве образующей  $\bar{l}(u) = \bar{r}(u, b) - \bar{r}(u, a)$ , то определяемая ими линейчатая поверхность будет сегментом конуса или цилиндра и может служить базовой (рис.2). Она задается вектор-функцией  $\bar{r}_0(u, v) = (1-w)\bar{r}(u, a) + w\bar{r}(u, b)$ , где  $w = (v-a)/(b-a)$ . Тогда функция уклонения и ее производные определяются формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(u, v) &= \bar{r}(u, v) - (1-w)\bar{r}(u, a) - w\bar{r}(u, b), \\ \bar{\varphi}_u(u, v) &= \bar{r}_u(u, v) - (1-w)\bar{r}_u(u, a) - w\bar{r}_u(u, b), \\ \bar{\varphi}_v(u, v) &= \bar{r}_v(u, v) + [\bar{r}(u, a) - \bar{r}(u, b)] / (b-a). \end{aligned} \quad (16)$$

Для того, чтобы оценить величины  $|\bar{\varphi}|$ ,  $|\bar{\varphi}_u|$ ,  $|\bar{\varphi}_v|$ , разложим  $\bar{r}(u, a)$ ,  $\bar{r}(u, b)$ ,  $\bar{r}_u(u, a)$ ,  $\bar{r}_u(u, b)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $(u, v)$ :

$$\bar{r}(u, a) = \bar{r}(u, v) - (v-a)\bar{r}_v(u, v) + \frac{(v-a)^2}{2}\bar{r}_{vv}(u, s_1),$$

$$\bar{r}(u, b) = \bar{r}(u, v) + (b-v)\bar{r}_v(u, v) + \frac{(b-v)^2}{2}\bar{r}_{vv}(u, t_1),$$

$$\bar{r}_u(u, a) = \bar{r}_u(u, v) - (v-a)\bar{r}_{uv}(u, s_2),$$

$$\bar{r}_u(u, b) = \bar{r}_u(u, v) + (b-v)\bar{r}_{uv}(u, t_2),$$



где  $s_1, s_2 \in [a, v]$ ,  $t_1, t_2 \in [v, b]$ . Подставляя эти выражения в (16), получаем:

$$|\bar{\varphi}(u, v)| = \left| -\bar{r}_{vv}(u, s_1) \frac{(v-a)^2(b-v)}{2(b-a)} - \bar{r}_{vv}(u, t_1) \frac{(v-a)(b-v)^2}{2(b-a)} \right| \leq \|\bar{r}_{vv}\|_C \frac{(b-a)^2}{8},$$

$$|\bar{\varphi}_u(u, v)| = \left| \bar{r}_{uv}(u, s_2) \frac{(b-v)(v-a)}{(b-a)} - \bar{r}_{uv}(u, t_2) \frac{(b-v)(v-a)}{(b-a)} \right| \leq \|\bar{r}_{uv}\|_C \frac{(b-a)}{2},$$

$$|\bar{\varphi}_v(u, v)| = \left| \bar{r}_{vv}(u, s_1) \frac{(v-a)^2}{2(b-a)} - \bar{r}_{vv}(u, t_1) \frac{(b-v)^2}{2(b-a)} \right| \leq \|\bar{r}_{vv}\|_C \frac{(b-a)}{2},$$

где  $\|\bar{r}\|_C = \max_{u, v} |\bar{r}(u, v)|$ .

Полученные оценки показывают, что при достаточно малых значениях нормы второй производной функции  $\bar{r}(u, v)$  и на небольших сегментах поверхности функция уклонения будет удовлетворять условиям применимости алгоритма, описанного в § 3.

Т а б л и ц а

$q$	0,1	0,2	0,4	1	2
$\epsilon_v$ (%)	0,2	1,37	1,41	0,43	0,02
$\epsilon_u$ (%)	0,09	0,09	0,05	0,02	0,09
$\Delta\beta$ (рад)	0,32	0,44	0,37	0,21	0,11

Для иллюстрации приведем данные по построению квазиразверток сегментов параболоида вращения. Параболоид задавался уравнениями  $x = v \cdot \cos u$ ,  $y = x \cdot \sin u$ ,  $z = qv^2$ , где

$q$  - константа,  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $v \in [1, 6]$ . Численные расчеты на ЭВМ производились для параболоидов с различными значениями параметра  $q$ . Гауссова кривизна такой поверхности определяется формулой [3]:  $K = 4q^2 / (1 + 4q^2v^2)^2$ . С ростом  $q$  от 0,1 до 2 ее значение сначала возрастает, затем убывает. Обозначим через  $\epsilon_u$ ,  $\epsilon_v$  максимальные относительные изменения длин по координатным линиям  $u = \cos t$  и  $v = \cos t$  соответственно, а через  $\Delta\beta$  максимальное изменение угла между координатными линиями. Результаты, полученные на различных параболоидах, приведены в таблице.

## Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплаины в инженерной геометрии. -М.: Машиностроение, 1985. - 223 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., МОКЕЕВА Н.С., РАЗМАХНИНА В.В. Проблемы автоматизации швейного производства средствами информатики и вычислительной техники. -В кн.: Сплайн-аппроксимации и численный анализ (Вычислительные системы, вып.108). Новосибирск, 1985, с. 101-105.

3. ПОГОРЕЛОВ А.В. Дифференциальная геометрия. -М.: Наука, 1974. - 176 с.

Поступила в ред.-изд.отд.  
15 мая 1986 года