П Р И К Л А Д Н А Я   Л О Г И К А
(Вычислительные системы)
1986 год   Выпуск 116

УДК 519.681.2

О СЕМАНТИКЕ КВАЗИТОЖДЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ МОДЕЛИ ИЗ КОНСТАНТ

О.А. Ильичева

Широкое распространение идей логического программирования мотивируется адекватностью представления свойств предметных областей в языке исчисления предикатов [1]. Использование логических спецификаций позволяет повысить уровень автоматизации и надежности производства программных систем [2,3]. Однако прямая реализация аксиоматических описаний встречает ряд серьезных проблем как теоретических, связанных с определением класса моделей, адекватного прагматике задачи, так и практических, обусловленных требованием не только исполнимости спецификации, но и ее эффективной реализуемости. В частности, интерпретация логических описаний с равенством в ряде практических постановок должна давать качественную диагностику возможной неопределенности функций и их переопределения, обладать свойством конечной завершимости и проводиться в допустимых пределах сложности, как правило, не превышающих полиномов второй степени.

Модели термов, представляющие обычно семантику логических программ, не позволяют дать приемлемых решений этих проблем. Высокие затраты памяти разрешающих алгоритмов, некорректность интерпретаторов в случае переопределения функций, необходимость в усложнении спецификации делают проблематичным и применение формального аппарата трехзначных логик, исчислений с неопределенностью, релятивизаций теорий [4,5].

В данной работе предлагается подход, направленный на решение этих задач, апробированный в системе [6]. В качестве спецификации используются конечные совокупности H квазитождеств, интерпретируемые на областях, являющихся полными решетками с низом - "неопределенность" и верхом – "ошибка переопределения". Интерпретирующая функция рассматривается как наименьшая неподвижная точка монотонного функционала, явное определение которого позволяет непосредственно выводить реализующие алгоритмы. Эквивалентную денотационной теоретико-модельную семантику теории H представляет модель, задаваемая H и состоящая из констант сигнатуры, кодирующих множество объектов предметной области. Выделяется класс формул, интерпретируемый с линейной памятью за время $O(n\log n)$ относительно мощности определяемых в H отношений. Приводятся эффективно проверяемые по виду формул достаточные условия конечной завершимости интерпретации описаний, расширенных встроенными арифметическими функциями. Для простоты изложения все результаты рассматриваются в односортной сигнатуре, хотя они основаны на известных теоремах [7], справедливых и для многосортных систем (см., например, [8]), используемых обычно на практике.

Пусть $\Sigma = (F,R,C)$ – конечная сигнатура, в которой F,R,C – множества символов функций, предикатов и констант соответственно; $C \neq \emptyset$. Обозначим через f,r,c,t элементы термов F,R,C сигнатуры Σ соответственно; через $\bar{a}$ – векторы из элементов произвольного множества A; через $\bar{x}_\phi$, $\bar{x}_t$ – векторы переменных формулы ϕ или терма t; через T_Σ – множества замкнутых термов сигнатуры Σ.

Рассмотрим теорию $H = \sigma_0 \cup \sigma$ сигнатуры Σ в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, в которой σ_0 – конечное множество замкнутых атомарных формул $\{f(\bar{c}) = c_f\} \cup \{r(\bar{c})\}$, σ – конечное множество квазитождеств вида $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to f(\bar{x}) = t(\bar{x}))$ или $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to r(\bar{x}))$, где $\varphi(x)$ – конъюнкция квазиатомарных формул.

Совокупность $\sigma_0 \cup \sigma$ содержательно трактуется как система определений функций и отношений на множестве объектов, представляемых константами из C. Для удобства описания формальной семантики будем считать, что глубина терма t в определениях функций не превосходит 1, тогда, в силу коммутативности равенства, формула $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to f_i(\bar{x})=f_j(\bar{x}))$ рассматривается и как определение функции $f_i(\bar{x})$, и как определение функции $f_j(\bar{x})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что теория H сигнатуры Σ определима в C, если для каждого терма $t \in T_\Sigma$ существует $c \in C$ такая, что $H \vdash t = c$; теория H эквационально корректна, если она непротиворечива относительно аксиом равенства и условия: $c_i \neq c_j$ для всех $c_i, c_j \in C$, $i \neq j$.

ТЕОРЕМА I. Всякая определимая в C эквационально корректная теория сигнатуры Σ имеет модель $\mathfrak{M}_C$, каждый элемент которой есть некоторая константа из C. Эта $\mathfrak{M}_C$ изоморфна фактор-системе свободной системы, порождаемой Σ и задаваемой H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для теории H строится стандартная модель, определяемая σ_0 и множеством порождающих C в квазимногообразии $\mathcal{K}$, определяемом σ, по алгоритму, описанному в [7]. При этом множество σ пополняется аксиомами равенства, так что σ становится полной системой формул, определяющей $\mathcal{K}$ (условие определимости в C тогда эквивалентно условию $\forall t \in T_\Sigma \exists c$, что $t = c$ является логическим следствием H). Формулы σ конкретизируются всевозможными подстановками замкнутых термов над C. Строится последовательность $\delta_0 \subseteq \delta_1 \subseteq \ldots \subseteq \delta_n \subseteq \ldots$ совокупностей замкнутых квазиатомарных формул, в которой $\delta_0 = \sigma_0$ и каждая δ_{i+1} содержит δ_i и множество логических следствий δ_i и σ. На основе множества δ_ω-объединения всех δ_n строится свободная алгебраическая система $\mathfrak{A}$, которая факторизуется по конгруэнции $=$. На фактор-системе $\mathfrak{A}/{=}$ истинны формулы $\sigma_0 \cup \sigma$, все их логические следствия и только они.

В силу того, что теория H определима в C, каждый класс эквивалентности термов - элемент $\mathfrak{A}/{=}$ содержит константу, причем, так как H эквационально корректна, только одну. Поэтому отображение C на носитель $\mathfrak{A}/{=}$, сопоставляющее каждой C класс эквивалентности, содержащий C, является изоморфизмом. Искомая модель $\mathfrak{M}_C$ строится на C очевидным образом: для n-местной функции f ее интерпретация $f(c_1, \ldots, c_n) = c_f$ тогда и только тогда, когда $f(c_1, \ldots, c_n) = c_f \in \delta_\omega$; аналогично для предиката r: $\mathfrak{M}_C \models r(c_1, \ldots$ $\ldots, c_{n(r)}) \leftrightarrow r(c_1, \ldots, c_{n(r)}) \in \delta_\omega$.

Теорема I обратима. Обратимость очевидна.

СЛЕДСТВИЕ I. Модель $\mathfrak{M}_C$ гомоморфно вкладывается в любую другую модель теории H.

Модель $\mathfrak{M}_C$ рассматривается как теоретико-модельная семантика определений H.

Для исследования свойств реализаций более удобна денотационная семантика языка предложений H, из которой может быть выведен интерпретатор, диагностирующий неопределенность и переопределение функций (нарушение условий теоремы I) при построении $\mathfrak{M}_c$ для произвольной теории H.

Следует отметить, что содержательная трактовка H как системы определений не допускает принятую в теории частичных моделей концепцию сильного равенства, требующую, например, для формулы $t_1(\bar{c}) = t_2(\bar{c}) \to r(\bar{c})$ интерпретации предиката $r(\bar{c})$ как истинного, если t_1 и t_2 не определены на $\bar{c}$. На практике недостаточно также при переопределении функций установления только факта противоречия, поскольку в этом случае результат интерпретации зависит от порядка, в котором разрешались предложения, и соответствующая диагностика поэтому некорректна.

Приводимый ниже интерпретатор реализует слабое равенство и в случае переопределения функций отмечает все символы f и r с их аргументами $\bar{c}$, интерпретация которых была "задета" ошибкой. Результат вычисления при этом уже не зависит от порядка.

В определении денотационной семантики в качестве областей берутся полные решетки с нижним элементом $\perp$ - "неопределенность" и верхним $\top$ - "ошибка". Области частично упорядочены отношением аппроксимации $\sqsubseteq$: $\perp \sqsubseteq x$; $x \sqsubseteq x$; $x \sqsubseteq \top$ для любого элемента x области.

Введем обозначения: Bool={true, false}; D^* - список над произвольным множеством D; $\hat{D} = D \cup \{\perp, \top\}$; + - раздельное объединение; $[\hat{D} \to \hat{D}]$ - область функций из $\hat{D}$ в $\hat{D}$.

Операция конъюнкции расширяется на Bool как строгая по $\perp$ и $\top$, т.е. равная $\perp$ (или $\top$), если хотя бы один ее аргумент равен $\perp$ (или $\top$). Равенству соответствует предикат слабого равенства, строгий по $\perp$ и $\top$. В качестве функции условия берется монотонная операция if x then y else z, отличающаяся от обычной тем, что при $x = \perp$ (или $\top$) значение ее есть $\perp$ (или $\top$) [9].

Для обеспечения строгой монотонности интерпретации введем еще одну функцию max: $\hat{D}^* \to \hat{D}$, выбирающую максимальный по $\sqsubseteq$ элемент списка:

$$\max(\langle x \rangle) = x; \quad \max(\langle \perp, x \rangle) = x; \quad \max(\langle \top, x \rangle) = \top;$$

$$\max(\langle x, x \rangle) = x; \quad \max(\langle \perp, \top \rangle) = \top;$$

$$\max(\langle x, y \rangle) = \top, \text{ если } x, y \in D \text{ и } x \neq y;$$

$$\max(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \max(\langle x_1, \max(\langle x_2, \dots, x_n \rangle) \rangle).$$

Для $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ функция $\max(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$ обозначается как $\max\limits_{x \in X}(x)$ и функция $\max(\langle f(x_1), \dots, f(x_n), y \rangle)$ как $\max\limits_{x \in X}(f(x), y)$.

В качестве синтаксических областей рассматриваются для сигнатуры Σ область термов $\hat{T}$, включающая F, C, область формул $\hat{\Phi}$, включающая R, область имен переменных $\hat{X}$. Для F и R определяется функция $\mathfrak{D}$, которая каждому f и r ставит в соответствие множество его определений из H.

Семантические области интерпретации: $\hat{C}$ и $\widehat{Bool}$. Интерпретирующая функция сигнатурных символов, термов и формул $i \in I$, $I = [[\hat{T} \to [\hat{C}^* \to \hat{C}]] + [\hat{\Phi} \to [\hat{C}^* \to \widehat{Bool}]]]$. Функции интерпретации переменных $\gamma \in \Gamma = [\hat{X}^* \to \hat{C}^*]$.

Функция i определяется индуктивно, по структуре термов и формул, отражающей структуру соответствующих областей. Некоторые основные определения:

$$i[\![c]\!] = c; \quad i[\![x]\!] = \lambda\gamma . \gamma(x);$$

$$i[\![r \cdot t]\!] = i[\![r]\!] \cdot i[\![t]\!]; \quad i[\![f \cdot t]\!] = i[\![f]\!] \cdot i[\![t]\!];$$

$$\left.\begin{array}{l}
i[\![f]\!]\bar{c} = \max\limits_{\varphi \in \mathfrak{D}(f)} \big(\max\limits_{\gamma \in \Delta : \gamma \restriction \bar{x}_f = \bar{c}} (\text{if } i[\![\varphi]\!]\gamma \text{ then } i[\![t]\!]\gamma \text{ else } \bot) \big), \\
\qquad \text{where } \mathfrak{D}(f) = \{(\varphi \to f \cdot \bar{x}_f)\bar{x}\}; \quad \bar{x}, \bar{x}_f \in \hat{X}^*, \\
\qquad \text{where } \Delta = [\bar{x} \to \hat{C}^*] \subset \Gamma; \\
i[\![r]\!]\bar{c} = \max\limits_{\varphi \in \mathfrak{D}(r)} \big(\max\limits_{\gamma \in \Delta : \gamma \restriction \bar{x}_r = \bar{c}} (\text{if } i[\![\varphi]\!]\gamma \text{ then true else } \bot) \big), \\
\qquad \text{where } \mathfrak{D}(r) = \{(\varphi \to r \cdot \bar{x}_r)\bar{x}\}; \quad \bar{x}, \bar{x}_r \in \hat{X}^*, \\
\qquad \text{where } \Delta = [\bar{x} \to \hat{C}^*] \subset \Gamma;
\end{array}\right\} (1)$$

$$i[\![\Phi_1 \wedge \Phi_2]\!] = And(i[\![\Phi_1]\!], i[\![\Phi_2]\!]);$$

$$i[\![t_1 = t_2]\!] = \simeq (i[\![t_1]\!], i[\![t_2]\!])$$

(And и $\simeq$ – расширенная на $\bot$, $\top$ конъюнкция и слабое равенство соответственно).

Отметим, что в определениях (I) в качестве значения f и r берется максимальный по $\sqsubseteq$ элемент по всем определениям f и r и всем интерпретациям переменных $\bar{x}$; при этом если для некоторых $f, \bar{c}$ получаются различные значения c_1 и c_2, то $i[f]\bar{c} = \top$ (корректность интерпретации функций).

Если $\sigma_0 \cup \sigma$ рассматривать как логическую программу $pr \in PR = \Phi^*$, то смысл ее задается функцией Den из области $[PR \to I]$. В качестве программы можно, однако, рассматривать только формулы σ (определяющие квазимногообразие $\mathcal{K}$), а σ_0 (определяющие конкретную систему в $\mathcal{K}$) как вход этой программы, соответствующий некоторой (начальной) функции интерпретации $i_0 \in I$. Тогда смысл программы есть функция из области $[PR \to [I \to I]]$. Уравнения (I) модифицируются: i_0 включается в определения в качестве аргумента функции max, и $\mathfrak{F}$ принимает значение на подмножествах σ.

Рекурсивно заданная функция i определяется как наименьшая неподвижная точка монотонного функционала τ: $I \to I$, т.е. $i = \tau(i)$. С другой стороны, $i = Den(\sigma_0 \cup \sigma) = Den(\sigma) i_0$.

Рассмотрим операционное представление для $Den(\sigma_0 \cup \sigma)$. Эквивалентная итерационная формула для i:

$$i^0 = \perp;\ i^1 = \tau(i_0) = \tau(\perp), \ldots, i^{k+1} = \tau(i^k) = \tau^{k+1}(\perp), \ldots,$$

так что i есть наименьшая верхняя грань $\{\tau^n(\perp), n = 0, 1, \ldots\}$. Соответственно интерпретатор, реализующий по программе $\sigma_0 \cup \sigma$ последовательное вычисление i^j, $j = 1, \ldots,$ путем одновременной подстановки i^{j-1} в формулы $\tau(i^{j-1})$ для всевозможных наборов аргументов функции i^j семантически эквивалентен $Den(\sigma_0 \cup \sigma)$, так как неподвижная точка вычисления есть i. В применении к $Den(\sigma) i_0$ начальное состояние представляется функцией i_0, финальное – функцией i_m, для которой выполнено $i_m = i_{m-1}$ на всей области определения. Формулы перехода от i_{k-1} к i_k $(k > 0)$, например, для определений $i[\![f]\!]\bar{c}$ имеют тогда вид:

$$i_k[\![f]\!]\bar{c} = \max(i_0[\![f]\!]\bar{c},$$

$$\max_{\varphi \in \mathfrak{F}(f)} \Big(\max_{\gamma \in \Delta:\, \gamma \upharpoonright \bar{x}_f = \bar{c}} (\text{if } i_{k-1}[\![\varphi]\!]\gamma \text{ then } i_{k-1}[\![t]\!]\gamma \text{ else } \perp)\Big)\Big).$$

Очевидно, что при переходе от j-го состояния к (j+1)-му имеет смысл интерпретировать только те f (или r) и только на тех $\bar{c}$, для которых интерпретация символов $\alpha \in F \cup R$, входящих в φ или t хотя бы одного определения $\varphi \to f = t$ (или $\varphi \to r$) при подстановке γ, совместимой с $\bar{c}$, на шаге j была продуктивной, т.е. дала новое значение: $i_{j-1}[\![\alpha]\!]\bar{c} \sqsubset i_j[\![\alpha]\!]\bar{c}$. Для всех остальных ξ, $\bar{c}_\xi$: $i_{j+1}[\![\xi]\!]\bar{c}_\xi = i_j[\![\xi]\!]\bar{c}_\xi$.

Сопоставим каждому j-му состоянию множество S_j области определенности функции i_j: $S_j = \{f(\bar{c}) = c_f \mid i[\![f]\!]\bar{c} = c_f\} \cup \{r(\bar{c}) \mid i[\![r]\!]\bar{c} =$

$=$ true $\}$. Неподвижной точке i соответствует множество S_{fix}, равное объединению всех S_n. Обозначим $S^{\perp}$ множество $\{\langle\alpha,\bar{c}\rangle \mid i[\![\alpha]\!]\bar{c} = \perp, \alpha\in F\cup R\}$ и S^{T} – множество $\{\langle\alpha,\bar{c}\rangle \mid i[\alpha]\bar{c} = T, \alpha\in F\cup R\}$.

Оптимизируя вычисление, получим интерпретатор IN, состояние st которого образуется парой $\langle D, \mathfrak{F}\rangle$, где $D = S\cup S^{\perp}\cup S^{T}$ представляет область данных – график функции i, $\mathfrak{F}$ – множество интерпретируемых формул. Шаг перехода step: st $\to$ st вычисляется для первой компоненты st по итерационным формулам для i, $\mathfrak{F}$ составляют предложения, имеющие вхождения символов c продуктивной интерпретацией. Условие окончания вычисления: $\mathfrak{F} = \emptyset$. Выход: D_{fix}. Соответствующий этому представлению алгоритм интерпретации приведен в приложении.

Корректность и полнота интерпретации IN относительно построения модели $\mathfrak{M}_c$ вытекает из следующей теоремы, показывающей соответствие денотационной и теоретико-модельной семантики теории H.

ТЕОРЕМА 2. Для любой определяющей совокупности H сигнатуры $\Sigma = (F, R, C)$ выполняются следующие условия:

1) если модель $\mathfrak{M}_c$ существует, то для $\forall f\in F$, $r\in R$, $\bar{c}\in C^*$, $c_f\in C$:

$$\mathfrak{M}_c \models f(\bar{c}) = c_f \leftrightarrow i[\![f]\!]\bar{c} = c_f ,$$
$$\mathfrak{M}_c \models r(\bar{c}) \qquad \leftrightarrow i[\![r]\!]\bar{c} = \text{true};$$

2) эквационально корректная теория H неопределима в C тогда и только тогда, когда $\exists f\in F, \bar{c}\in C^*$: $i[f]\bar{c} = \perp$;

3) определимая в C теория H эквационально некорректна тогда и только тогда, когда $\exists f\in F, \bar{c}\in C^*$: $i[f]\bar{c} = T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгое доказательство громоздко, поэтому отметим лишь основные положения. Поскольку приводимый выше (см. теорему I) алгоритм [7] строит $\mathfrak{M}_c$ для эквационально корректной и определимой в C теории H и интерпретатор IN семантически эквивалентен $\mathrm{Den}(H)$, то достаточно рассмотреть соответствие множеств $\delta_\omega = \bigcup\limits_n \delta_n$ и $S_{fix} = \bigcup\limits_k S_k$.

Для доказательства п.I покажем, что если $\mathfrak{M}_c$ существует, то множество атомарных формул, входящих в δ_ω, совпадает с S_{fix}.

Рассматриваются последовательности $\delta_0, \ldots, \delta_j, \ldots$ и $S_0, \ldots S_k, \ldots$, в которых, по определению, $\delta_0 = S_0 = \sigma_0$. Используется понятие разложимости термов: терм $t \in T_\Sigma$ разложим во множестве A, если для него и всех его подтермов t_i существуют $c_t, c_i \in C$ такие, что замкнутые формулы $t = c_t, t_i = c_i$ содержатся в A. Для определимой в C теории все замкнутые термы разложимы в δ_ω. Соответственно если функция i_k определена для некоторых $\alpha \in F \cup R$, $\bar{c}$, то все термы, интерпретация которых дала значение i_k, разложимы в S_k. Учитывая, что все подстановки γ из $[X^* \to C^*]$ входят во множество подстановок θ: $[X^* \to T^*_\Sigma]$, используемых для конкретизаций предложений σ при построении множеств δ, получим, что если атомарная формула a принадлежит S_k для некоторого k, то она будет включена и в δ_k на шаге k. Обратно, если $a \in \delta_j$ для некоторого j, то $\exists k$, $k \geq j$: $a \in S_k$ (в силу определимости в C теории $\exists k$, при котором все термы, участвовавшие в выводе a, разложимы в δ_k и подстановка γ, давшая a для S_k, может быть построена по θ, давшей a в δ_j).

Рассуждая аналогично, в доказательстве п.3 имеем, что если существуют подстановки γ_1, γ_2: $\gamma_1 \restriction \bar{x}_f = \gamma_2 \restriction \bar{x}_f = \bar{c}$, при которых для некоторой f: $i[f]\bar{c} = \top$, то существует не менее двух следствий $f(\bar{c}) = c_1$ и $f(\bar{c}) = c_2$, полученных при подстановках $\theta_1 = \gamma_1$ и $\theta_2 = \gamma_2$, что ведет к противоречивости H. И, обратно, по θ_1, θ_2 легко построить (если H определима в C) соответствующие γ_1, γ_2, для которых функция max даст $\top$.

Пункт 2 доказывается методом от противного, исходя из справедливости п.I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Модель $\mathfrak{M}_C$ для H существует тогда и только тогда, когда для $\forall f \in F$, $\bar{c} \in C^*$ $\exists c_f \in C$ такие, что $i[f]\bar{c} = c_f$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если модель $\mathfrak{M}_C$ существует, то для $\forall r \in R$: $i[r]\bar{c} = \perp \leftrightarrow H \nvdash r(c)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\mathfrak{M}_C$ существует, то множество S_{fix} представляет ее позитивную диаграмму.

Рассмотрим ряд свойств интерпретатора, характеризующих его корректность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. При заданном входе (σ, i_0) результат интерпретации IN не зависит от порядка, в котором интерпретировались предложения σ, и порядка подстановок γ в каждое предложение.

Доказательство следует из монотонности интерпретации. В случае ошибки функции и отношения доопределяются на $\top$, таким образом фиксируется след ошибки.

Будем говорить, что последовательность состояний интерпретатора $st_1, \ldots, st_m$ допустима, если $st_{j+1} = step(st_j)$, $j=1,\ldots,m-1$. Допустимая последовательность состояний $st_k, \ldots, st_n$, $k \geq 0$, $n > k$, называется циклом, если $st_k = st_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Никакая допустимая последовательность состояний интерпретатора IN не является циклом.

Доказательство очевидно следует из определения st и монотонности вычисления: $\forall j \geq 0$: $S_j \subseteq S_{j+1}$ или $S_j^T \subseteq S_{j+1}^T$, поэтому если $\exists j$: $S_j = S_{j+1}$, $S_j^T = S_{j+1}^T$, то $\mathfrak{F}_{j+1} = \emptyset$, если же $\exists k,m$: $m > k$ и $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}_k$, то $S_m \supset S_k$ или $S_m^T \supset S_k^T$ по определению $\mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любого конечного входа (σ, i_0) интерпретация $IN(\sigma, i_0)$ на конечной области C завершается за конечное число шагов.

На практике часто рассматриваются спецификации, расширенные арифметическими функциями, аксиоматика которых скрыта, т.е. не входит в H, и интерпретация задается извне. Множество констант, пополненное областями определения и значений этих функций, становится счетным.

Встает проблема конечной интерпретируемости H и соответственно существования конечной подмодели для нее.

Пусть C^A - счетное множество констант, $C \subset C^A$ (C - множество констант, непосредственно входящих в H) и F^A - конечное множество символов арифметических функций, определяемых на C^A. Поскольку никакое конечное подмножество C^A не является замкнутым относительно этих функций, релятивизируем F^A, сопоставив каждой n-местной $f \in F^A$ $(n+1)$-местный предикат r_f. Обозначим R^A множество всех таких r_f. Зафиксируем сигнатуру $\Sigma^A = (F, R \cup R^A; C^A)$ и конечную теорию $H = \sigma_0 \cup \sigma$ в этой сигнатуре. Определим множество $C_0 = \{c \mid c \in C^A$, c входит в формулы $S_{fix} \cup S_{fix}^T$ результата интерпретации $IN(\sigma, i_0)\}$. Очевидно, что если $IN(\sigma, i_0)$ завершается за конечное число шагов, то C_0 конечно, при этом $C \subseteq C_0$. Говорим тогда, что интерпретация завершается на области C_0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если интерпретация $\mathrm{IN}(\sigma, i_0)$ теории H завершается за конечное число шагов на некоторой области C_0, $C_0 \subset C^A$, причем для $\forall f \in F, \forall \bar{c} \in C_0^* \exists c_f \in C_0 : f(\bar{c}) = c_f \in S_{fix}$, то существует конечная модель $\mathfrak{M}_{C_0}$ теории H в конечном обеднении $\Sigma_0 = (F, R \cup R^A, C_0)$ языка Σ^A.

Доказательство следует из эквивалентности $\mathrm{IN}(\sigma, i_0)$ и $\mathrm{Den}(\sigma, i_0)$ и следствия 2.

Рассмотрим теперь вопрос, при каких условиях интерпретация на счетной области конечно-завершима. В жестких рамках эффективности реализации интерес представляют условия, разрешимые по виду формул σ, без проведения интерпретации с конкретным входом σ_0. Существуют простые подклассы квазитождеств, полезные для практических задач, интерпретируемые за конечное число шагов при любом конечном входе i_0. Приведем два из них.

В каждой формуле $\phi : \varphi \to \psi \in \sigma$ сигнатуры $\Sigma = (F, R, C)$, включающей, возможно, символы арифметических функций, пронумеруем вхождения предикатных символов и термов и выделим две подформулы формулы ϕ: r_φ и f_φ, обозначив $r_\varphi : \bigwedge_{i=1}^{k} r_i(x)$, $f_\varphi : \bigwedge_{i=1}^{m} t_i(\bar{x}) = t_i'(\bar{x})$ так что $\varphi = r_\varphi \wedge f_\varphi$. Пусть V_ϕ, V_t – множества переменных произвольной формулы ϕ или терма t, $\{r_\varphi\}$ – множество подформул r_φ.

Потребуем, чтобы для $\forall \phi \in \sigma$

1) все конъюнкции r_φ были атомарны и $\{r_\varphi\} \neq \emptyset$;

2) $V_\psi \subseteq V_{r_\varphi}$, $V_{f_\varphi} \subseteq V_{r_\varphi}$.

Условие 2 связывает аргументы определяемых функций и предикатов отношениями в φ, таким образом, область определения $f(\bar{x})$ и $r(\bar{x})$ из ψ не выходит за пределы области определения предикатов в φ и, следовательно, за пределы C – множества констант, непосредственно входящих в H, конечного для любой конечной H.

Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если конечная определяющая совокупность σ удовлетворяет условиям 1,2, то для любого конечного множества σ_0 интерпретация $\mathrm{IN}(\sigma,i_0)$ завершается за конечное число шагов.

Отметим, что условия I,2 проверяемы в линейное время относительно $|R| + |F|$.

Рассмотрим менее жесткие ограничения на вид формул σ. Ослабим условие 2, допустив в f_φ конъюнкты вида $y_i = t_i(\bar{x})$, так что

3) $y_i \bar{\in} V_{r_\varphi}$, но $V_{t_i} \subseteq V_{r_\varphi}$ и по-прежнему $V_\Psi \subseteq V_{r_\varphi}$.

Формулы σ принимают вид:

$$\forall \bar{x},\bar{y}(r_\varphi(\bar{x}) \quad y_1 = t_1(\bar{x}) \quad \dots \quad y_n = t_n(\bar{x}) \rightarrow \Psi(\bar{x},\bar{y})) \ , \qquad (2)$$

где $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$.

В такой спецификации могут быть определены перечислимые отношения, например, $\forall x,y(r(x) \wedge y = x+1 \rightarrow r(y))$. Области определения интерпретируемых функций и отношений, расширяемые значениями термов, будут неограниченно расти. Определим простое достаточное условие конечной интерпретируемости определений σ вида (2), проверяемое в полиномиальное время.

Рассмотрим ситуации, при которых возможно неограниченное возрастание области S. Условия I и 3 позволяют принимать во внимание только трансформации областей истинности предикатов, поэтому учета требуют случаи, когда Ψ содержит формулы вида $r(\bar{y})$ или $r(\bar{x},\bar{y})$. Введем отношения между символами предикатов левых и правых частей импликаций, фиксирующие характер зависимости их аргументов. Для всех $r \in R$ и $\phi \in \sigma$ для каждого вхождения r в ϕ пронумеруем по порядку его аргументы и обозначим k-й аргумент предиката r через $r[k]$.

Определим бинарные отношения:

$$h = \{(\langle r_i,k\rangle, \langle r_j,m\rangle) \mid \exists \in \sigma, \phi\colon \varphi \rightarrow \Psi\colon r_i \text{ входит в } \Psi,$$
$$r_j \text{ входит в } \varphi \text{ и } r_i[k] = r_j[m]\}_{r_i,r_j \in R};$$

$$W = \{(\langle r_i,k\rangle, \langle r_j,m\rangle) \mid \exists \phi \in \sigma, \phi\colon \varphi \rightarrow \Psi\colon y = t(\bar{x}) \text{ входит в}$$
$$\varphi,\ r_i - \text{в } \Psi \text{ и } y = r_i[k];\ r_j \text{ входит в } \varphi \text{ и } r_j[m] \in$$
$$\in V_t\}_{r_i,r_j \in R};$$

$$Z = h \cup W .$$

Принадлежность некоторой пары $(\langle r_1,l\rangle,\langle r_2,n\rangle)$ отношению Z означает, что значение l-го аргумента предиката r_1 зависит от значения n-го аргумента предиката r_2. Если транзитивное замыкание отношения W содержит пару $(\langle r,n\rangle,\langle r,n\rangle)$ для некоторых r и n, то, очевидно, система определений σ содержит цикл с, возможно, расширяющейся областью определения (по n-му аргументу) для r. Циклы по отношению Z безопасны, если циклические участки $\nu = \{(\alpha,\beta),(\beta,\xi),\dots,(\gamma,\alpha)\}, \nu\subset Z$, не содержат элементов отношения W.

Назовем замкнутой цепью множество элементов (x_i,y_i) последовательности $\langle (x_i,y_i)\rangle$, $i=1,\dots,n$, такой, что $x_{i+1}=y_i$ и $x_1 = y_n$.

ТЕОРЕМА 4. Если для конечной определяющей совокупности σ, удовлетворяющей условиям I и 3, для любой замкнутой цепи ν в Z верно $\nu\cap W=\emptyset$, то для всякого конечного σ интерпретация $IN(\sigma,i_0)$ завершается за конечное число шагов.

Условия конечной завершимости оптимизируют процесс интерпретации, снижая число шагов управляющего алгоритма (определяемое мощностью $|\sigma|$, умноженной на количество вызовов автомата, интерпретирующего одно предложение) до $O(n)$, где n – совокупная мощность определяемых в H отношений, и уменьшая для каждого предложения ϕ число подстановок γ (вектор $\bar{c}_\phi$ составляют только константы из области определенности предикатов r_ϕ). Сложность перебора областей определенности функций и отношений при выборе подстановки полиномиален. Следующие ограничения на характер пересечения переменных в формуле r_ϕ позволяют снизить его до $\log n$.

Обозначим множество аргументов, содержащих константы из C любой (под) формулы ϕ как $Arg\phi$, арность предиката r как $\mu(r)$. Заменим все вхождения констант $c\in C$ в подформулу r_ϕ на единый символ s. Обозначим через m мощность множества $S\cup S^T$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если для каждого предложения из σ имеет место: I) $\{r_\phi\}\neq\emptyset$; $V_{t_\phi} \le V_{r_\phi}$; $V_\psi \le V_{r_\phi}$ (условия конечной завершимости) или 2) для подформулы r_ϕ выполняется $\forall r_i$, $i=1,\dots,k$, $\mu(r_i)\le 2$ и

a) $V_{r_i}\cap V_{r_j}=\emptyset$ для любых $r_i(\bar{x}), r_j(\bar{x})$ из $\{r_\phi\}$, л и б о

б) $\bigcap_{i=1}^{k} V_{r_i} \neq \emptyset$,

л и б о

в) $s \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Arg}\, r_i$,

л и б о

г) $\exists r_{\varphi_1}, r_{\varphi_2}$ такие, что $r_\varphi = r_{\varphi_1} \wedge r_{\varphi_2}$; $V_{r_{\varphi_1}} \cap V_{r_{\varphi_2}} = \emptyset$ и $V_{r_{\varphi_1}}$ удовлетворяет 2б, $V_{r_{\varphi_2}}$ удовлетворяет 2в, то теория $\sigma_0 \cup \sigma$ разрешима со сложностью $O(n\log n)$ по времени и $O(m)$ по памяти для любого конечного σ_0.

В случае, если $S^T = \emptyset$ (ошибки переопределения нет), то память расходуется только под текущие график функций и область истинности отношений. Алгоритм интерпретации, соответствующий приведенным выше ограничениям на теорию, опубликован в [10].

Рассмотренный подход имеет практическое приложение в системе автоматизации синтаксического и контекстного анализа программ [6] - составной части автоматизированных систем построения трансляторов. Контекстно-зависимый синтаксис (или, в другой терминологии, статическая семантика) языка программирования $\mathcal{L}$ описывается множеством аксиом $\sigma \cup \mathcal{R}$, определяющим класс контекстно-правильных программ в $\mathcal{L}$ (предложения $\mathcal{R}$ задают контекстные условия и проверяются на построенной модели $\mathfrak{M}_c$). По этому описанию автоматически генерируется контекстный анализатор программ языка $\mathcal{L}$: предложения $\sigma \cup \mathcal{R}$ транслируются в таблицы, которые подключаются к универсальному интерпретатору квазитождеств, соответствующему IN, в качестве информационной базы. Полученная программа является контекстным анализатором, настроенным на язык $\mathcal{L}$.

Контекстная структура каждой конкретной программы $P_{\mathcal{L}}$ в $\mathcal{L}$ определяется множеством σ_0, представляющим полное или абстрактное дерево разбора этой программы. Метки узлов дерева, соответствующие конструкциям $P_{\mathcal{L}}$, образуют множество констант, входящих в σ_0 . График соответствующей функции i_0 является выходом синтаксического анализатора и входом контекстного. Интерпретируемые функции $f \in F$ представляют атрибуты конструкций $P_{\mathcal{L}}$, предикаты $r \in R$ - отношения контекстной зависимости этих конструкций; $P_{\mathcal{L}}$ является контекстно-правильной, если для $\sigma_0 \cup \sigma$ существует модель $\mathfrak{M}_c$, на которой выполняются аксиомы $\mathcal{R}$. Для программ, содержащих ошибку ($\sigma_0 \cup \sigma$ противоречиво), выдается полный след ошибки по контексту программы.

Для описания контекстных свойств алголоподобных языков программирования использовались спецификации, удовлетворяющие условиям предложения 4.

Система написана на языке СЕТЛ, некоторые примеры приведены в приложении. Генератор анализаторов занимает 10 К памяти ЕС-1060 и составляет программу ASPLE-анализатора (10 аксиом) за 6 секунд. Интерпретатор формул занимает 12 К и в процессе работы со средними по величине программами использует до 70 К памяти.

Литература

1. CLARK K.L.,TÄRNLUND S.A. Logic Programming. APIC Studies in Data Processing,N 16.-London: Academic Press.- 366 p.

2. GAUDEL M.C. Specification of compilers as abstract data type representations.-In: Lecture Notes in Comput.Sci.,1980.V.94, p.140-164.

3. GOGUEN J.A.,TARDO J. An introduction to OBI: A Language for Writing and Testing Software Specifications.Specifications of Reliable Software.- IEEE,1979,p.170-189.

4. RESCHER N. Many-valued Logic. - New York: McGraw Hill, 1969.-360 p.

5. WIRSING M.,BROY M. An analysis of semantics models for algebraic specifications. Theoretical foundations of programming Methodology.- L.N.Int.: Summer School,1982,Dortrecht,p.351-412.

6. ГЛУШКОВА В.Н., ИЛЬИЧЁВА О.А. Автоматизация синтаксического и контекстного анализа в СПТ. -Кибернетика, №4, 1985, с.26-28.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы.-Новосибирск: Наука, 1970. - 392 с.

8. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описаний. -В кн.: Логико-математические основы проблемы МОЗ (Вычислительные системы, вып. 107). Новосибирск, 1985, с.52-70.

9. МАННА З. Теория неподвижной точки программ. -Кибернетический сборник. М., Мир, 1978, с.38-100.

10. ИЛЬИЧЕВА О.А. Реализация контекстного анализа на основе вычислений в структурах. -В кн.: Методы трансляции, 1981, с.100-107.

Поступила в ред.изд.-отд.
22 января 1986 года

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритм интерпретации IN. Введем обозначения. Пусть NS – множество данных $\langle\alpha, \bar{c}\rangle$ $(\alpha \in F \cup R)$, интерпретация которых продуктивна (на каждом шаге k : $\langle\alpha, \bar{c}\rangle \in NS_k \leftrightarrow i_{k-1}[\alpha]\bar{c} \sqsubset i_k[\alpha]\bar{c})$; A – отображение $F \cup R \to 2^{\sigma}$, сопоставляющее каждому f и r множество предложений $\mathfrak{P}$, имеющих вхождение f, r в посылке или (для f) в равенстве заключения; f_t – внешняя функция терма t в формуле $\varphi \to f = t$. Операция "+" соответствует добавлению элемента во множество, "–" – изъятию. Ограничение функции подстановки $\gamma: \bar{x} \to C^*$ на $\bar{x}_\xi$ обозначим через $\bar{c}_\xi$. ЦК – метка цикла.

Вход: $NS = S_0 = \sigma_0$, $S = S_0$, $S^T = \emptyset$, $S^{\perp} = \{\langle\alpha, \bar{c}\rangle \mid i_0[\alpha]\bar{c} = \perp\}$.

ЦК1: Пока $NS \neq \emptyset$ выполнять:

1. Выбор $d = \langle\alpha, \bar{c}\rangle$ – любой из NS; $NS = NS - d$.
2. Интерпретация предложений $A(\alpha)$.

ЦК2: Для каждого $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \Psi(\bar{x}))$ из $A(\alpha)$.

ЦК3: Для каждой подстановки γ : $\gamma \restriction \bar{x}_\alpha = \bar{c}$ определить истинность формулы $\varphi(\bar{c}_\varphi)$, используя текущую область данных S и S^T. Случаи:

2.1. $\varphi(\bar{c}_\varphi)$ истинна, тогда для $\Psi(\bar{x})$ вида $r(\bar{x})$ выполнить: если $r(\bar{c}_r) \bar{\in} (S \cup S^T)$, то $S = S + r(\bar{c}_r)$; $NS = NS + \langle r, \bar{c}_r\rangle$, иначе выход на ЦК3; для $\Psi(\bar{x})$ вида $f(\bar{x}) = t(\bar{x})$ определить значение $f(\bar{c}_f)$ и $t(\bar{c}_t)$, используя S и S^T:

а) если $\exists c_0$: $f(\bar{c}_f) = c_0 \in S$, $t(\bar{c}_t) = c_0$, то выход на ЦК3;

б) если $\exists c_0$: $t(\bar{c}_t) = c_0$, $\langle f, \bar{c}_f\rangle \in S^{\perp}$, то $S = S + (f(\bar{c}_f) = c_0)$; $NS = NS + \langle f, \bar{c}_f\rangle$; $S^{\perp} = S^{\perp} - \langle f, \bar{c}_f\rangle$ (то же для f_t, если $\exists c_0$: $f(\bar{c}_f) = c_0$, но $\langle f_t, \bar{c}_{f_t}\rangle \in S^{\perp}$);

в) $(t(\bar{c}_t) = \top$ и $\langle f, \bar{c}_f\rangle \bar{\in} S^T)$ или $\exists c_1, c_2$: $t(\bar{c}_t) = c_1$, $f(\bar{c}_f) = c_2$, то $\langle f, \bar{c}_f\rangle$ добавляется в S^T и NS и выбрасывается из S или $S^{\perp}$ (то же для f_t, если $f(\bar{c}_f) = \top$, а $f_t(\bar{c}_{f_t}) \bar{\in} S^T$ или $f_t(\bar{c}_{f_t}) = c_1$, $f(\bar{c}_f) = c_2$). Во всех остальных случаях 2.1 выход на ЦК3.

2.2. $\varphi(\bar{c}_\varphi)$ не определена, тогда выход на ЦК3.

2.3. $\varphi(\bar{c}_\varphi)$ есть $\top$, тогда для $\xi(\bar{c}_\xi)$, определяемых в Ψ, если $\langle\xi, \bar{c}_\xi\rangle \bar{\in} S^T$, то выбросить $\xi(\bar{c}_\xi)$ из S или $\langle\xi, \bar{c}_\xi\rangle$ из $S^{\perp}$ и добавить в S^T и NS , иначе выход на ЦК3.

Конец ЦК3, ЦК2, ЦК1.

Выход: $NS = \emptyset$; $S = S_{fix}$; $S^{\perp} = S^{\perp}_{fix}$; $S^{\top} = S^{\top}_{fix}$.

Примеры. В качестве σ взяты две аксиомы идентификации переменных языков программирования. Сигнатура: C – набор меток узлов дерева разбора (сортов, соответствующих нетерминалам грамматики) и лексические константы (сорта TEXT); R – бинарные предикаты объяв-в, исп-в, описан-в, левч, правч, соответствующие отношениям объявления, использования, описания идентификаторов в программе, принадлежности их левым и правым частям присваивания; F – одноместные функции имя, тип: ID → TEXT. Определения σ даны без квантора всеобщности, т.е.

σ: x объяв-в y ∧ z исп-в y ∧ имя(x) = имя(z) → z опис-в y ∧ ∧тип(z) = тип(x); x левч y ∧ z правч y → тип(x) = тип(z);

σ_0 составляет множество атомарных формул, полученных интерпретацией аксиом абстрактного типа синтаксиса, выполняемой синтаксическим анализатором (абстрактный синтаксис задается через встроенные отношения подчинения и соседства на дереве вывода).

Функция A : A(объяв-в) = {σ [1]} ; A(исп-в) = {σ [1]}; A (опис-в) = {σ [1]}; A (левч) = {σ [2]}; A (правч) = {σ [2]} ; A (имя) = {σ[1]} ; A (тип) = {σ [1], σ [2]} , где σ[i] обозначает i-ю аксиому σ .

Каждому j-му вхождению идентификатора в программу соответствует j-й индекс константы, c_p – метка узла программы, c_0 – присваивания.

Рассмотрим две программы.

I. Анализируемая программа*): **begin** **int** a,b; a:= b **end** .

σ_0: объяв-в = $\{\langle c^1_a, c_p\rangle, \langle c^1_b, c_p\rangle\}$; исп-в = $\{\langle c^2_a, c_p\rangle, \langle c^2_b, c_p\rangle\}$; левч = $\{\langle c^2_a, c_0\rangle\}$; правч = $\{\langle c^2_b, c_0\rangle\}$; имя (c^1_a) = 'a' ; имя (c^1_b) = 'b', имя (c^2_a) = 'a', имя (c^2_b) = 'b' ; тип (c^1_a) = = 'int' , тип (c^1_b) = 'int'.

В соответствии с алгоритмом, интерпретация первого предложения даст опис-в = $\{\langle c^2_a, c_p\rangle, \langle c^2_b, c_p\rangle\}$ и тип (c^2_a)='int', тип (c^2_b)= = 'int', интерпретация второй аксиомы подтвердит равенство типов. На выходе $S^{\perp} = \emptyset$, $S^{\top} = \emptyset$, $\mathfrak{M}_c$ существует.

---

*) Для упрощения записи множество формул вида $r_1(\bar{c}_1), r(\bar{c}_2), \ldots, r(\bar{c}_n)$ представлено как $r = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n\}$.

2. Программа: __begin__ __int__ a,b,k,l;__bool__ d;a:=b;b:=d;k:=l __end__ .

σ_0 составляется аналогично первому примеру, тип определен только на определяющих вхождениях.

Интерпретация первой аксиомы перенесет соответствующий тип на использующие его вхождения c^2_a, c^2_b, c^3_b, c^2_d, c^2_k, c^2_l; интерпретация второй аксиомы даст переопределение типа на c^3_b, c^2_d в ошибку, которая перенесется повторной интерпретацией первой аксиомы на тип (c^1_b), тип (c^2_b) и второй аксиомы на тип (c^2_a), затем снова первой – на тип (c^1_a). На выходе для функции тип во множество S (правильная интерпретация) войдут тип (c^2_k) = 'int', тип (c^2_l) = 'int' и во множество $S^{\top}$ (ошибки) – тип (c^1_a), тип (c^2_a), тип (c^1_b), тип (c^2_b), тип (c^3_b), тип (c^2_d); $S^{\perp} = \emptyset$. Модель $\mathcal{M}_c$ не существует.