ПРИКЛАДНАЯ ЛОГИКА
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 116

УДК 510.6+519.685

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРИИ СПИСОЧНЫХ НАДСТРОЕК

Д.И. Свириденко

В работе [1] была определена теория GES, описывающая те свойства списочных надстроек моделей, которые позволяют построить удовлетворительную во многих отношениях теорию вычислимости над этими моделями. В частности, GES допускает рекурсивные Σ-программы, гарантируя существование их Σ-определимых решений. Однако при этом подразумевается, что у Σ-программ отсутствуют предикатные ("процедурные") параметры. Поэтому естественно возникает задача построения теории, позволяющей искать решение и для программ с предикатными параметрами. Другим мотивом написания данной статьи явилось желание осуществить, следуя [2], некоторый онтологический анализ теории GES, в частности, аксиом единственности и экстенсиональности. В результате сформулирована теория GES_1^+, которую можно рассматривать как обобщение эффективного фрагмента GES_0 теории GES, описанного в [2]. При написании статьи существенно использовался опыт работы [3].

Пусть σ_0 - многосортная сигнатура и σ - ее расширение набором списочных операций и отношений:

$$\sigma \rightleftharpoons \sigma_0 \cup \{\underline{\mathrm{head}}, \underline{\mathrm{tail}}, \underline{\mathrm{cons}}, \underline{\mathrm{nil}}, \sqsubseteq, \in, \underline{\mathrm{List}}\}.$$

Добавим к σ список новых предикатных символов $\sigma^+ = (P_i)_{i \in I}$. В силу наличия списочных функций можно без ограничения общности считать, что все P_i одноместны. Через Δ_0^+, Σ^+ и Δ^+ будем обозначать классы Δ_0-, Σ- и Δ-формул сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \sigma^+$, в которые элементарные подформулы вида $P(t)$, где $P \in \sigma^+$, входят позитивно. Далее полагаем $\Delta_0 \rightleftharpoons \Delta_0^+ \upharpoonright \sigma$, $\Sigma = \Sigma^+ \upharpoonright \sigma$ и $\Delta = \Delta^+ \upharpoonright \sigma$.

Теория GES_1^+ включает в себя универсальные замыкания следующих утверждений:

I. <u>Аксиомы пустого списка:</u>

а) $\neg(\delta \in \underline{\mathbf{nil}})$,

б) $(\underline{\mathbf{nil}} \sqsubseteq \alpha)$.

II. <u>Аксиомы списочных операций:</u>

а) $\underline{\mathbf{tail}}\ (\underline{\mathbf{nil}}) = \underline{\mathbf{nil}}$;

б) $\underline{\mathbf{head}}(\delta) = \delta \leftrightarrow \delta = \underline{\mathbf{nil}}$,

в) $\underline{\mathbf{tail}}(\underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta)) = \alpha$,

г) $\neg(\alpha = \underline{\mathbf{nil}}) \to \underline{\mathbf{cons}}(\underline{\mathbf{tail}}(\alpha)\ \underline{\mathbf{head}}(\alpha)) = \alpha$.

III. <u>Аксиомы списочных отношений:</u>

а) $\alpha \sqsubseteq \underline{\mathbf{cons}}(\gamma,\delta) \leftrightarrow (\alpha \sqsubseteq \gamma \vee \alpha = \underline{\mathbf{cons}}(\gamma,\delta))$,

б) $\delta \in \underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta') \leftrightarrow (\delta \in \alpha \vee \delta = \delta')$,

в) $\delta \in \alpha \,\&\, \alpha \sqsubseteq \beta \to \delta \in \beta$.

IУ. <u>Схема аксиом Σ^+-индукции</u>: для любой Σ^+-формулы φ имеет место

$$[\varphi]^{x}_{\underline{\mathbf{nil}}} \,\&\, \forall\alpha\,\forall\delta([\varphi]^{x}_{\alpha} \to [\varphi]^{x}_{\underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta)}) \to \forall\alpha[\varphi]^{x}_{\alpha}.$$

Предполагается, что в п.IУ α и x имеют своим типом $\langle\{\underline{\mathbf{list}}\}\rangle$, а переменная δ - $\langle I \rangle$, где I - множество сортов сигнатуры σ, $\underline{\mathbf{list}}$ - сорт списков. Запись $[\varphi]^{x}_{t}$ означает результат подстановки в φ вместо всех свободных вхождений переменной x терма t того же типа (так, чтобы не было коллизии переменных).

Следующее предложение является простым следствием аксиом теории GES_1^+, подтверждающим адекватность формализации наших содержательных представлений о списочных функциях и отношениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. В GES_1^+ доказуемы следующие утверждения:

а) $(\underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta) = \underline{\mathbf{cons}}(\alpha',\delta') \leftrightarrow \alpha = \alpha' \,\&\, \delta = \delta')$;

б) $(\underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta) \not\sqsubseteq \alpha \quad \underline{\mathbf{cons}}(\alpha,\delta) \neq \delta)$;

в) $\alpha \sqsubseteq \alpha$;

г) $(\alpha \sqsubseteq \underline{\mathbf{nil}} \to \alpha = \underline{\mathbf{nil}})$;

д) $(\alpha \sqsubseteq \beta \,\&\, \beta \sqsubseteq \gamma \to \delta \sqsubseteq \gamma)$;

е) $(\alpha = \beta \leftrightarrow \alpha \sqsubseteq \beta \,\&\, \beta \sqsubseteq \alpha)$;

ж) $(\alpha = \beta \leftrightarrow (\forall\gamma \sqsubseteq \alpha)(\gamma \sqsubseteq \beta \,\&\, (\neg\gamma = \beta \vee \neg\gamma = \alpha) \to$
$\to (\exists\delta \in \alpha)(\underline{\mathrm{cons}}(\gamma,\delta) \sqsubseteq \alpha \,\&\, \underline{\mathrm{cons}}(\gamma,\delta) \sqsubseteq \beta)))$.

Заметим, что "а" и "ж" в [2] выступали как аксиомы теории GES_0.

При использовании предложения I и схемы аксиом Σ^+-индукции легко доказывается следующая

ТЕОРЕМА I. В теории GES_1^+ доказуемы принцип Δ_0^+-выборки и принцип Δ_0^+-выделения[ж)].

Заметим, что поскольку в языке GES_1^+ имеются два вида ограниченных кванторов, связанных с отношениями $\sqsubseteq$ и $\in$, то, вообще говоря, надо различать две формулировки этих принципов: одну для квантора $(\forall x \in y)$, другую для $(\forall x \sqsubseteq y)$. Однако легко понять, что предикат $\in$ выразим через $\sqsubseteq$:

$$GES_1^+ \vdash \alpha\in\beta \leftrightarrow (\exists\, \gamma \sqsubseteq \beta)(\gamma \neq \underline{\mathrm{nil}} \,\&\, \underline{\mathrm{head}}(\gamma) = \alpha)$$

Отсюда следует, что в GES_1^+ доказуема эквивалентность двух формулировок принципов для каждой конкретной Δ_0^+-формулы φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I мы приведем только для принципа Δ_0^+-выборки (принцип Δ_0^+-выделения доказывается аналогично).

Итак, нужно показать, что для Δ_0^+-формулы φ имеет место

$$GES_1^+ \vdash (\forall\alpha\in\beta)(\exists\delta)\varphi(\alpha,\delta) \to (\exists\alpha)[\underline{\mathrm{HLF}}(\alpha,\beta) \,\&\, (\forall\delta\in\beta)\varphi(\delta,\alpha(\delta))]. \quad (1)$$

Точное определение Δ_0-предиката $\underline{\mathrm{HLF}}$ дано в [I,2]. Отметим, что содержательно запись $\underline{\mathrm{HLF}}(\alpha,\beta)$ означает: α есть "график функции", областью определения которой является множество всех начальных отрезков списка β. При этом требуется выполнимость свойства "наследования" предыдущих значений этой функции. В силу этого запись $\alpha(\gamma)$ для $\gamma \sqsubseteq \beta$ означает "значение функции α на аргументе γ", и если $\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2 \sqsubseteq \beta$, то $\alpha(\gamma_1) \sqsubseteq \alpha(\gamma_2)$. Отсюда вытекает, что для доказательства (I) достаточно показать следующее:

$$GES_1^+ \vdash (\forall\alpha\in\beta)(\exists\delta)\varphi(\alpha,\delta) \to (\forall\beta' \sqsubseteq \beta)(\exists\alpha')[\underline{\mathrm{HLF}}(\alpha',\beta') \,\&$$
$$\& \, (\forall\delta\in\beta')\varphi(\delta,\alpha'(\delta))],$$

ж) Формулировки этих принципов см. в [I] (вместо Δ_0-формул нужно рассматривать Δ_0^+-формулы). Сравним текст теоремы I с формулировкой аналогичной теоремы 2 в [2].

т.е. $GES_1^+, (\forall\alpha\in\beta)(\exists\delta)\varphi(\alpha,\delta) \vdash \psi(\beta')$, где

$\psi(\beta') \rightleftharpoons [\beta' \sqsubseteq \beta \to (\exists\alpha')[\underline{HLF}(\alpha',\beta') \,\&\, (\forall\delta\in\beta')\varphi(\delta,\alpha'(\delta))]]$.

Легко видеть, что $\psi(\beta')$ – Σ^+-формула и, следовательно, мы можем воспользоваться принципом Σ^+-индукции. Если $\beta' = \underline{nil}$,то истинность $\psi(\underline{nil})$ очевидна. Пусть имеет место $\psi(\beta')$ и $\underline{cons}(\beta',\delta)\sqsubseteq\beta$. Так как $\delta\in\beta$, то существует γ такой, что $\varphi(\delta,\gamma)$. Рассмотрим $\alpha'' \rightleftharpoons \underline{cons}(\alpha', \langle \underline{cons}(\beta',\delta), \underline{cons}(\underline{head}\ \underline{head}(\alpha'),\gamma)\rangle)$. Очевидно, что справедливо $\underline{HLF}(\alpha'', \underline{cons}(\beta',\delta))$ и, следовательно, имеет место $\psi(\underline{cons}(\beta',\delta))$. □

Из принципа Δ_0^+-выборки вытекает справедливость для GES_1^+ принципа Σ^+-рефлексии: $GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow \exists\alpha\ \varphi^{(\alpha)}$, где φ – Σ^+-формула, а $\varphi^{(\alpha)}$ означает формулу, полученную из φ заменой всех неограниченных кванторов вида $\exists x$ на $\exists x \in \alpha$.

Доказательство этого принципа осуществляется индукцией по сложности Σ^+-формулы φ. При этом нужно использовать следующие простые факты: $GES_1^+ \vdash \varphi^{(\alpha)} \to \varphi$ и $GES_1^+ \vdash (\forall\alpha\in\gamma)(\alpha\in\beta) \to (\varphi^{(\gamma)} \to \varphi^{(\beta)})$, где φ – Σ^+-формула. В дальнейшем формулу $(\forall\alpha\in\gamma)(\alpha\in\beta)$ будем часто обозначать $\gamma \subseteq \beta$.

Если φ – Δ_0^+-формула, то очевидно, что $\varphi^{(\alpha)} = \varphi$ и выполнимость принципа очевидна. Для формул вида $(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2)$ и $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ доказательство осуществляется указанием для двух списков α_1 и α_2, для которых

$$GES_1^+ \vdash (\varphi_1 \leftrightarrow \exists\alpha_1 \varphi_1^{(\alpha_1)}) \,\&\, (\varphi_2 \leftrightarrow \exists\alpha_2 \varphi_2^{(\alpha_2)}),$$

нового списка α^0 такого, что $GES_1^+ \vdash \varphi_1 \circ \varphi_2 \leftrightarrow \exists\alpha^0 .(\varphi_1 \circ \varphi_2)^{\alpha^0}, \circ\in\{\&,\vee\}$. Существование такого списка вытекает из того факта, что $GES_1^+ \vdash \forall\alpha,\beta\ \exists\gamma(\alpha \sqsubseteq \gamma \,\&\, \beta \subseteq \gamma)$.

Случай, когда φ имеет вид $\exists x\in t.\ \varphi$, $\exists x \sqsubseteq t.\varphi$ или $\exists x.\varphi$, тривиален. Для φ, имеющей вид $\forall x \in t.\varphi$ или $\forall x \sqsubseteq t.\varphi$, нужно воспользоваться ранее доказанным принципом Δ_0^+-выборки. □

Рассмотрим теперь Δ_0-предикат $STRLF(\alpha,a,b)$,введенный в [I] и содержательно означающий, что α является списочной функцией, соотносящей **каждому** начальному подсписку $\beta \sqsubseteq a$ единственный начальный подсписок $\gamma \sqsubseteq b$, причем данное соответствие является монотонным по $\sqsubseteq$. В силу такого определения предиката будем писать также $\alpha(\beta)$ для $\beta \sqsubseteq a$, где $\alpha(\beta) \sqsubseteq b$.

ТЕОРЕМА 2 (принцип Σ^+-выборки). Для любой Σ^+-формулы φ имеет место

$$GES_1^+ \vdash (\forall\beta\sqsubseteq\alpha)(\exists\gamma)\varphi(\beta,\gamma) \to \exists\alpha\,\exists b(\underline{STRLF}(\alpha,a,b)\&(\forall\delta\sqsubseteq a)\varphi(\delta,\alpha(\delta))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы основывается на применении принципов Σ^+-рефлексии и Δ_0^+-выборки. Действительно, из формулы $(\forall\beta\sqsubseteq a)(\exists\gamma)\varphi(\beta,\gamma)$ по принципу Σ^+-рефлексии получаем

$$(\exists c)(\forall\beta\sqsubseteq a)(\exists\gamma\in c)\ \varphi^{(c)}(\beta,\gamma).$$

Используя принцип Δ_0^+-выборки, для Δ_0^+-формулы $\varphi^{(c)}$ легко получить $(\exists\alpha)(\exists b)(\underline{STRLF}(\alpha,a,b)\ \&\ (\forall\delta\sqsubseteq a)\ \varphi^{(c)}(\delta,\alpha(\delta)))$. Так как φ – Σ^+-формула, то справедлива импликация $\varphi^{(c)}\to\varphi$. Отсюда вытекает справедливость заключения теоремы. □

СЛЕДСТВИЕ. Для любой Σ^+-формулы $\varphi(x,y)$ имеет место

$$GES_1^+ \vdash (\forall x\in a)(\exists y)\varphi(x,y) \to (\exists b)[(\forall x\in a)(\exists y\in b)\varphi(x,y)\ \&$$
$$\&(\forall y\in b)(\exists x\in a)\ \varphi(x,y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\forall x\in a)(\exists y)\ \varphi(x,y)$. Построим по списку a список $\bar a$, элементами которого являются все начальные отрезки a, упорядоченные по $\sqsubseteq$. Тогда, очевидно, имеем $(\forall\beta\sqsubseteq\bar a)(\exists y)\varphi(\underline{head}(\beta),y)$. По теореме 2,

$$(\exists\alpha)(\underline{STRLF}(\alpha,\bar a,\underline{head}\ (\underline{head}(\alpha)))\ \&\ (\forall\delta\sqsubseteq a)(\delta\neq\underline{nil}\to$$
$$\to\varphi(\underline{head}(\delta),\underline{head}(\alpha(\delta))))).$$

Для каждого $\delta\in\alpha$ рассмотрим элемент $\underline{head}\ (\underline{head}(\delta))$ и составим из этих элементов список b. Нетрудно видеть, что b – список, для которого

$$(\forall x\in a)(\exists y\in b)\varphi(x,y)\ \&\ (\forall y\in b)(\exists x\in a)\ \varphi(x\in y).\ \square$$

Пусть φ – Σ^+-формула и $P_0,\dots,P_k$ – все ее предикатные переменные из δ^+. Обозначим, как и в [3], через φ^* Σ-формулу, получающуюся из φ заменой всех ее элементарных подформул вида $P_i(t)$ на $t\in\alpha_i$. Далее будем использовать сокращение $(\exists\alpha\subseteq P)\varphi$ для $(\exists\alpha)((\forall\beta\in\alpha)P(\beta)\ \&\ \varphi)$.

ТЕОРЕМА 3 (принцип Σ^+-непрерывности). Для любой Σ^+-формулы φ в GES_1^+ доказуема эквивалентность

$$GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow (\exists\alpha_0\subseteq P_0)\dots(\exists\alpha_k\subseteq P_k)\varphi^*. \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по сложности формулы φ. Наиболее интересные здесь случаи: когда φ имеет вид $(\forall x\in y)\varphi_1$ или $(\forall x \sqsubseteq y)\ \varphi_1$. Первый случай доказывается с небольшими модификациями аналогично тому, как это делается в [3] для такого же квантора (здесь используется следствие теоремы 2). Рассмотрим случай, когда $\varphi = (\forall x \sqsubseteq y)\ \varphi_1$. Пусть для φ_1 эквивалентность (2) уже доказана. Тогда

$$GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow (\forall x \sqsubseteq y)(\exists\alpha_0 \subseteq P_0)\ldots(\exists\alpha_k \subseteq P_k)\varphi_1^*.$$

Обозначим через ψ Σ^+-формулу $(\exists\alpha_1 \subseteq P_1)\ \ldots\ \varphi_1^*$; отсюда $GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow (\forall x \sqsubseteq y)(\exists\alpha_0)[(\forall\beta\in\alpha_0)P_0 \wedge \psi]$.

По теореме 2,

$$GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow (\exists\alpha)(\underline{\mathrm{STRLF}}(\alpha,y,\underline{\mathrm{head}}\ (\underline{\mathrm{head}}(\alpha)))\&$$

$$\&\ (\forall x \sqsubseteq y)(\ \psi(x,\alpha(x))\ \&\ (\forall\beta\in\alpha(x))P_0)).$$

В силу определения предиката $\underline{\mathrm{STRLF}}$ легко показать, что имеет место

$(\forall\gamma \sqsubseteq \underline{\mathrm{head}}(\underline{\mathrm{head}}(\alpha)))(\exists x \sqsubseteq y)[\gamma=\alpha(x)\ \&\ \psi(x,\alpha(x))\ \&\ (\forall\beta \in \alpha(x))P_0]$,

откуда следует, что $(\forall\beta\in \underline{\mathrm{head}}(\underline{\mathrm{head}}(\alpha)))P_0$. Отсюда же вытекает, что верна импликация $\psi \to [\psi]^{\gamma}_{\mathrm{head}(\mathrm{head}(\alpha))}$. Следовательно, $GES_1^+ \vdash (\ x \sqsubseteq y)(\exists\alpha_0 \subseteq P_0)\psi \to (\exists\alpha_0 \subseteq P_0)(\ \forall x \sqsubseteq\ y\ )\ \psi$. Доказуемость в GES_1^+ обратной импликации очевидна. Далее нужно воспользоваться индукцией по k в записи $(\exists\alpha_0 \subseteq P_0)(\exists\alpha_1 \subseteq P_1)\ldots\psi_1^*$. □

Заметим, что из теоремы 3 и принципа Σ^+-рефлексии вытекает доказуемость эквивалентности:

$$GES_1^+ \vdash \varphi \leftrightarrow (\exists a)(\exists\alpha_0 \subseteq P_0)\ldots(\varphi^*)^{(a)}$$

для любой Σ^+-формулы $\varphi(P_0,\ldots, P_k)$. В свою очередь, из последней эквивалентности выводится справедливость в GES_1^+ принципа $\underline{\Delta^+\text{-выделения}}$: для любых Σ^+-формул φ и ψ доказуемо

$$GES_1^+ \vdash (\forall\alpha\in\beta)(\ \varphi(\alpha) \leftrightarrow \neg\psi(\alpha)) \to (\exists\alpha)((\forall\delta \in \beta)$$

$$(\varphi(\delta) \to \delta\in\alpha) \quad (\forall\gamma \in \beta)(\ \psi(\gamma) \to \neg(\gamma \in \alpha))).$$

Далее нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть φ – Σ^+-формула. Будем называть выражение вида $\{x\,|\,\varphi\}$ $\underline{\Sigma^+\text{-предикатом}}$ или просто $\underline{\text{предикатом}}$. Используя эти выражения, можно образовывать предикатные формулы $\{x|\varphi\}(t)$, где t – терм. Предикатная формула в действительности – это другое обозначение Σ^+-формулы $[\varphi]^x_t$,т.е. $\{x|\varphi\}(t) \leftrightharpoons [\varphi]^x_t$. Таким образом, разрешая использовать предикатные формулы при образовании формул, мы тем самым фактически язык не изменяем. Если теперь определить в "расширенном" языке класс, аналогичный классу Σ^+-формул (требуя от предикатных подформул только позитивного их вхождения в формулы), мы фактически не изменяем исходного класса Σ^+-формул. Другими словами, наше "расширение" языка продиктовано только соображениями удобства.

Далее мы будем обозначать Σ^+-предикаты через $A, B, C, \dots$ (возможно, с индексами) и писать $\varphi(A, B, C, \dots)$, обозначая тем самым тот факт, что A, B, C – это те предикаты, которые встречаются в записи φ. Запись $\varphi_A[\alpha, \dots]$ будет обозначать формулу,полученную из $\varphi(A, \dots)$ заменой всех предикатных подформул $A(t)$ на $t \in \alpha$,а запись $(\exists\alpha \subseteq A)\varphi$ – формулу $(\exists\alpha)((\forall\beta \in \alpha)A(\beta)\ \&\ \varphi)$. Заметим, если в Σ^+-формуле $\varphi(A, B, \dots)$ все предикатные подформулы определяются Σ-формулами, то φ в действительности сама есть Σ-формула.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (принцип Σ-непрерывности). Для каждой Σ-формулы $\varphi(A)$, где A – Σ-предикат, имеет место

$$GES_1^+ \vdash \varphi(A) \longleftrightarrow (\exists a \subseteq A)\ \varphi_A[a].$$

Доказательство следует схеме доказательства теоремы 3. □

Если $A = \{x|\varphi\}$, то полагаем $A^{(v)} \leftrightharpoons \{x|x \in v\ \&\ \varphi^{(v)}\}$.

СЛЕДСТВИЕ (принцип Σ-перечислимости). Для каждой Σ^+-формулы $\varphi(A)$, где A – Σ-предикат, справедливо

$$GES_1^+ \vdash \varphi(A) \longleftrightarrow (\exists v)(\exists a \subseteq A^{(v)})\ \varphi_A^{(v)}[a].$$

Доказательство вытекает из принципа Σ^+-рефлексии и принципа Σ-непрерывности. □

Далее, если в предикате A встречаются предикатные переменные $P_0, \dots$ из σ^+,то будем этот факт обозначать $A[P_0, \dots]$ или $A[\bar{P}]$.

ТЕОРЕМА 4 (обобщенный принцип Σ^+-непрерывности). Для каждой Σ^+-формулы $\varphi(\bar{P}, A[\bar{P}])$ справедливо

$$GES_1^+ \vdash \varphi(\bar{P}, A[\bar{P}]) \longleftrightarrow (\exists a \subseteq A[\bar{P}])\ \varphi_A(\bar{P}, a). \qquad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть справедлива формула $\varphi(\bar{P}, A[\bar{P}])$. По принципу Σ^+-непрерывности получаем $(\exists \bar{p} \subseteq \bar{P})\ \varphi_P(\bar{p}, A_{\bar{P}}[\bar{p}])$. Поскольку $A_{\bar{P}}[\bar{p}]$ – Σ-предикат, то по принципу Σ-непрерывности $(\exists_{\bar{p}} \subseteq \bar{P})$ $(\exists a \subseteq A_{\bar{P}}[\bar{p}])\ \varphi_{\bar{P},A}(\bar{p}, a)$. Отсюда очевидным образом вытекает $(\exists a \subseteq A[\bar{P}])\ \varphi_A(\bar{P}, a)$. Обратная импликация в (3) очевидна. □

СЛЕДСТВИЕ (принцип Σ^+-объединения). Для каждой Σ^+-формулы φ:

а) $GES_1^+ \vdash (\forall x \in a)(\exists y \subseteq A)\varphi \leftrightarrow (\exists b \subseteq A)(\forall x \in a)(\exists y \subseteq b)\varphi$;

б) $GES_1^+ \vdash (\forall x \subseteq a)(\exists y \subseteq A)\varphi \leftrightarrow (\exists b \subseteq A)(\forall x \subseteq a)(\exists y \subseteq b)\varphi$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 4. □

Пусть $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P)$ – модель теории GES_1^+. Рассмотрим Σ^+-формулу $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, A_0, \ldots, A_k, R)$ сигнатуры $\sigma \cup \sigma^+ \cup \{R\}$, где $R \notin \sigma^+$, арность $(R) = n$ и $\bar{x} = x_1 \ldots x_n$. Определим для каждого набора значений параметров $\bar{b}$ оператор

$$\Gamma_{\varphi,\bar{b}}(R) \rightleftharpoons \{\bar{a} \mid (\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P) \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}, A_0, \ldots, A_k, R)\}.$$

В силу позитивности вхождения R в φ нетрудно показать, что оператор $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$ является монотонным. Наша цель – показать, что в так называемых допустимых моделях теории GES_1^+ оператор $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$ имеет Σ^+-определимую наименьшую неподвижную точку.

Прежде всего заметим, что в моделях теории GES_1^+ имеется возможность определять новые функции с помощью примитивной рекурсии, что утверждает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [2]. Если H и G-функции в $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P) \models GES_1^+$, для которых существуют Σ^+-формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\psi(\bar{x}, y, z, t, v)$ такие, что

$$(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P) \models \varphi(\bar{a}, b) \Leftrightarrow H(\bar{a}) = b$$

и

$$(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P) \models \psi(\bar{a}, b, c, d, e) \Leftrightarrow G(\bar{a}, b, c, d) = e,$$

то существует Σ^+-формула $\Theta(\bar{x}, y, z)$, определяющая в $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), P)$ функцию F такую, что

$$F(\bar{a}, \underline{nil}) = H(\bar{a}),$$
$$F(\bar{a}, \underline{cons}(\alpha, \delta)) = G(\bar{a}, \alpha, \delta, F(\bar{a}, \alpha)).$$

Если при этом функции H и G всюду определенные, то F - единственная такая функция (также всюду определенная).

Из этого предложения, в частности, следует, что операция конкатенации списков $\underline{conc}$ однозначно определяется в списковых надстройках моделей теории GES_1^+:

$$\underline{conc}(\alpha,\underline{nil}) = \alpha,$$
$$\underline{conc}(\alpha,\underline{cons}(\beta,\delta)) = \underline{cons}(\underline{conc}(\alpha,\beta),\delta) .$$

Однако в моделях теории GES_1^+ имеются более богатые возможности определять новые конструкции.

Пусть A и B - предикаты. Так же, как и в [5], определим над ними операции применимости и абстракции:

$$A(B) \rightleftharpoons \{y \mid \exists x[(\forall z \in x)B(z) \ \& \ A(\underline{cons}(\underline{cons}(\underline{nil},x),y))\},$$

$$\lambda P.A \rightleftharpoons \{z \mid z = \underline{cons}(\underline{cons}(\underline{nil},x),y) \to (A_P[x])(y)\},$$

где $A_P[x]$ есть результат замены всех вхождений атомарных формул вида $P(t)$ на $t \in x$ (здесь $P \in \sigma^+$). В дальнейшем терм $\underline{cons}(\underline{cons}(\underline{nil}, x),y)$ будем обозначать более привычным образом $\langle x,y\rangle$. Далее, через $A_P[B]$, где $P \in \sigma^+$ и B - предикат, будем обозначать результат замены в A выражений вида $P(t)$ на $B(t)$. В этих обозначениях обобщенный принцип Σ^+-непрерывности можно записать так: для любых предикатов A и B $GES_1^+ \vdash A_P[B] \longleftrightarrow \exists b \subseteq B.A_P[b]$. Используя этот факт, так же, как и в [5], можно доказать, что

$$GES_1^+ \vdash A_P[B] \longleftrightarrow [\lambda P.A](B).$$

Далее, используя те же аргументы, что и в [5], можно показать справедливость для GES_1^+ следующего результата.

ТЕОРЕМА 5 (принцип Σ^+-рекурсии) [5]. Для любого предиката $F[P]$ существует предикат A такой, что

$$GES_1^+ \vdash A \longleftrightarrow F_P[A].$$

Заметим, что решение A уравнения $P \longleftrightarrow F(P)$, о котором говорится в теореме 5, зависит от тех же предикатных переменных, что и F, кроме P.

Рассмотрим следующее рекурсивное определение:

$$\underline{tc}(\underline{nil}) = \underline{nil},$$
$$\underline{tc}(\underline{cons}(\alpha,\delta)) = \begin{cases} \underline{cons}(\underline{tc}(\alpha),\delta), & \delta \in |\mathfrak{M}|; \\ \underline{conc}(\underline{tc}(\alpha),\underline{cons}(\underline{tc}(\delta)),\delta), & \delta \in S(\mathfrak{M}). \end{cases} \tag{4}$$

По теореме 5 существует решение этого уравнения. Но, к сожалению, оно может быть не единственным, поскольку операция $\underline{tc}$ может оказаться частичной. В силу этого обстоятельства введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модель $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P})$ теории GES_1^+ называется <u>допустимой</u>, если операция $\underline{tc}$ является всюду определенной в $S(\mathfrak{M})$.

ТЕОРЕМА 6. Модель теории GES_1^+ допустима тогда и только тогда, когда для нее справедлив <u>принцип Σ^+-фундируемости</u>:

$$\forall\alpha\ ((\forall\delta \in \alpha)\,\varphi(\delta) \to \varphi(\alpha)) \to \forall\alpha\ \varphi(\alpha),$$

где φ – Σ^+-формула.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модель допустимая, то операция $\underline{tc}$ является единственным решением соответствующего рекурсивного определения (4). Пусть в модели $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P})$ справедлива импликация

$$(\forall\delta \in \alpha)\ \varphi(\delta) \to \varphi(\alpha), \tag{5}$$

и предположим, что $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models \exists\alpha.\neg\varphi(\alpha)$, т.е. найдется $\alpha_0 \in S(\mathfrak{M})$ такой, что неверно $\varphi(\alpha_0)$.

Рассмотрим список $\underline{tc}(\alpha_0)$ и Σ^+-формулу $\psi(\beta) \rightleftharpoons (\forall\gamma \sqsubseteq \beta)\,\varphi(\underline{head}(\gamma))$. Покажем, что для каждого $\beta \sqsubseteq \underline{tc}(\alpha_0)$ истинна формула $\psi(\beta)$. Действительно, для $\beta = \underline{nil}$ справедлива импликация $\varphi(\underline{nil}) \to \psi(\underline{nil})$, а из (5) следует истинность $\varphi(\underline{nil})$ на модели. Пусть верно $\psi(\beta)$, и предположим, что $\underline{cons}(\beta,\delta) \sqsubseteq \underline{tc}(\alpha_0)$. Очевидно, что $\psi(\underline{cons}(\beta,\delta)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \psi(\beta)\ \varphi(\delta)$. Но так как все элементы списка δ находятся среди элементов списка β (так устроено $\underline{tc}(\alpha_0)$), то, по (5), $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}),$ $\mathbf{P}) \models \varphi(\delta)$ и, следовательно, $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models \psi(\underline{cons}(\beta,\delta))$. Воспользовавшись Σ^+-индукцией, приходим к выводу, что $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models$ $\models (\forall\beta \sqsubseteq tc(\alpha_0))\psi(\beta)$. Следовательно, для каждого $\delta \in \alpha_0$ имеем $(\mathfrak{M},$ $S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models \varphi(\delta)$. Но тогда, по (5), $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models \varphi(\alpha_0)$. Полученное противоречие показывает справедливость принципа Σ^+-фундируемости в допустимой модели теории GES_1^+.

Пусть теперь в модели выполняется принцип Σ^+-фундируемости. Используя этот принцип совместно с Σ^+-индукцией, легко показать, что операция $\underline{tc}$ является всюду определенной. □

Таким образом, класс допустимых моделей теории GES_1^+ является аксиоматизируемым с помощью GES_1^+ + {аксиома Σ^+-фундируемости}.

Если $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P})$ – модель теории GES_1^+, то положим

$$S^W(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons \{\alpha \in S(\mathfrak{M}) \mid \underline{tc}(\alpha) \text{ определено}\}.$$

Для каждого $Q \in \mathbf{P}$ обозначим через Q^W предикат $Q^W \rightleftharpoons Q \restriction (|\mathfrak{M}| \cup S^W(\mathfrak{M}))$. Обозначим через $\mathbf{P}^W$ семейство $\{Q^W \mid Q \in \mathbf{P}\}$.

ТЕОРЕМА 7. Если $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models GES_1^+$, то $(\mathfrak{M}, S^W(\mathfrak{M}), \mathbf{P}^W)$ является допустимой моделью теории GES_1^+.

Доказательство этого утверждения заключается в проверке истинности аксиом GES_1^+ на модели $(\mathfrak{M}, S^W(\mathfrak{M}), \mathbf{P})$. □

В дальнейшем операцию $W: (\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \mapsto (\mathfrak{M}, S^W(\mathfrak{M}), \mathbf{P}^W)$ будем называть стандартизацией модели. Причину такого названия поясняет следующая теорема, доказательство которой принадлежит С.С.Гончарову [4].

ТЕОРЕМА 8. Если $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}), \mathbf{P}) \models GES_1^+$ и $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}))$ – позитивная модель, то $S^W(\mathfrak{M})$ изоморфна $HW(\mathfrak{M})$, где $HW(\mathfrak{M})$ – списочная надстройка, состоящая из всех наследственно конечных списков над моделью $\mathfrak{M}$.

Вернемся теперь к вопросу о нахождении наименьших неподвижных точек монотонных операторов вида $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$, где φ – Σ^+-формула.

Прежде всего отметим, что это оказывается возможным для допустимых моделей теории $GES_1^+ \restriction \sigma$, о чем говорит

ТЕОРЕМА 9. Пусть $(\mathfrak{M}, S(\mathfrak{M}))$ – допустимая модель теории $GES_1^+ \restriction \sigma$. Тогда для любой Σ^+-формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, R)$ сигнатуры $\sigma \cup \{R\}$, где арность $(R) = n$ и $\bar{x} = x_1 \ldots x_n$, найдется Σ-формула, определяющая для любого набора $\bar{b}$ значений параметров наименьшую неподвижную точку оператора $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$ среди всех его Σ-определимых неподвижных точек.

Доказательство этой теоремы будет опубликовано в другой работе (см. также [I]).

Заметим, что в теореме 9 ищется решение среди всех Σ-определимых отношений, а не абсолютное (как, например, в [I]).

Следующая теорема позволяет в рамках теории GES_1^+ решать рекурсивные уравнения уже с предикатными параметрами. Ее доказательство в основном следует схеме доказательства аналогичной теоремы из [3].

ТЕОРЕМА 10. Если $\varphi(\bar{x},\bar{y},A_0,\dots,A_k,R)$ – Σ-формула сигнатуры $\sigma\cup\sigma^+\cup\{R\}$, где $R\notin\sigma^+\cup\sigma$, арность $(R)=n$ и $\bar{x}=x_1\dots x_n$, то существует Σ^+-формула $\phi(\bar{x},\bar{y},A_0,\dots,A_k)$ сигнатуры $\sigma\cup\sigma^+$, которая для любой допустимой модели $\mathfrak{M}$ теории GES_1^+ и любого набора $\bar{b}$ значений параметров определяет множество $\{\bar{a}\mid\mathfrak{M}\models\phi(\bar{a},\bar{b},A_0,\dots,A_k)\}$, являющееся наименьшей неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$ среди всех его неподвижных Σ^+-определимых точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана Σ^+-формула $\varphi(\bar{x},\bar{y},A_0,\dots,A_k,R)$. По теореме 4,

$$GES_1^+\vdash\varphi\longleftrightarrow(\exists\bar{\alpha}\le\bar{A})\,\varphi_{\bar{A}}(\bar{x},\bar{y},\bar{\alpha},R). \tag{6}$$

Очевидно, что $\varphi_{\bar{A}}$ является Σ^+-формулой в сигнатуре $\sigma\cup\{R\}$. Рассмотрим теперь модель $\mathfrak{M}\models(GES_1^+ + {}'\Sigma^+$-фундируемость$)$ и положим $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}\upharpoonright\sigma$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{N}$ будет допустимой моделью теории GES_1^+. По теореме 9 существует Σ-формула $\phi_{\bar{A}}(\bar{x},\bar{y},\bar{\alpha})$, определяющая неподвижную точку оператора $\Gamma_{\varphi_{\bar{A}},\bar{y}}$ в $\mathfrak{N}$, наименьшую среди всех Σ-определимых неподвижных точек этого оператора. Положим $\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{A})=(\exists\bar{\alpha}\le\bar{A})\,\phi_{\bar{A}}(\bar{x},\bar{y},\bar{\alpha})$. Покажем, что ϕ – искомая формула. Пусть $\bar{b}$ – некоторый набор значений параметров из $\mathfrak{M}$ и $LFP(\varphi,\bar{b})$ – наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$. Рассмотрим набор списков $\bar{\alpha}=\alpha_0\dots\alpha_k$ такой, что $\alpha_i\le[A_i]$, где $[A]$ есть значение в $\mathfrak{M}$ предиката A и $\alpha\le[A]\leftrightharpoons(\forall\beta\in\alpha)(\beta\in[A])$. Рассмотрим множество $LFP(\phi_{\bar{A}},\bar{b})\leftrightharpoons\{\bar{a}\mid\phi_{\bar{A}}(\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha})\}$, которое есть "наименьшая" неподвижная точка оператора $\Gamma_{\phi_{\bar{A}},\bar{b}}$. Поскольку $\bar{\alpha}\le\overline{[A]}$, то из (6) вытекает $LFP(\phi_{\bar{A}},\bar{b})\le LFP(\varphi,\bar{b})$. Так как это включение верно для любого набора $\bar{\alpha}\le[A]$, то

$$I_{\bar{b}}\leftrightharpoons\{\bar{a}\mid(\exists\bar{\alpha}\le\bar{A})\,\phi_{\bar{A}}(\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha})\}\le LFP(\varphi,\bar{b}).$$

Покажем теперь, что $I_{\bar{b}}$ также является неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\varphi,\bar{b}}$. Пусть $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{x},\bar{b},\bar{A},I_{\bar{b}})$. Рассматривая $I_{\bar{b}}$ как Σ^+-предикат, по теореме 4 получаем

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{x},\bar{b},\bar{A},I_{\bar{b}}) \longleftrightarrow (\exists\bar{\alpha} \subseteq \bar{A})(\exists\beta \subseteq I_{\bar{b}})\ \varphi_{\bar{A},I_{\bar{b}}}(\bar{x},\bar{b},\bar{\alpha},\beta).$$

Если $\beta \subseteq I_{\bar{b}}$, то $\mathfrak{M} \models (\forall\gamma \in \beta)[(\exists\bar{\alpha}' \subseteq \bar{A})\phi_{\bar{A}}(\gamma, \bar{b}, \bar{\alpha}')]$. По следствию теоремы 4, $\mathfrak{M} = (\exists\bar{\alpha}'' \subseteq \bar{A})(\forall\gamma \in \beta)(\exists\bar{\alpha}' \subseteq \bar{\alpha}'')\ \phi_{\bar{A}}(\gamma, \bar{b}, \bar{\alpha}')$. Если рассмотреть набор списков $\bar{\delta}$, где $\delta_1 \leftrightharpoons \underline{conc}(\alpha_1, \alpha_1'')$, то, очевидно, $\bar{\delta} \subseteq \overline{[A]}$. Это позволяет показать, что $\mathfrak{M} \models (\forall\gamma\in\beta)\, x\, \phi_{\bar{A}}(\gamma,\bar{b},\bar{\delta})$. Таким образом, $\beta \subseteq LFP(\phi_{\bar{A}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta}), \bar{b})$. Поскольку $\bar{\alpha} \subseteq \bar{b}$, то в силу монотонности получаем

$$\mathfrak{M} \models (\exists\bar{\delta} \subseteq \bar{A})(\exists\beta \subseteq LFP(\phi_{A}(\bar{x},\bar{y},\bar{\delta}),\bar{b}))\ \varphi_{\bar{A},LFP(\phi_{\bar{A}},\bar{b})}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{\delta}, \beta).$$

Вновь используя теорему 4, получаем

$$\mathfrak{M} = (\exists\bar{\delta} \subseteq \bar{A})\ \varphi_{\bar{A}}(\bar{x},\bar{b},\bar{\delta}, LFP(\phi_{A},\bar{b})).$$

Поскольку $LFP(\phi_{A},\bar{b})$ есть "наименьшее" решение уравнения

$$\mathfrak{M} \upharpoonright \sigma \models P(\bar{x}) \longleftrightarrow \varphi_{\bar{A}}(\bar{x},\bar{b},\bar{\delta},P),$$

то $\bar{x} \in LFP(\phi_{\bar{A}},\bar{b})$. Но $LFP(\phi_{\bar{A}},\bar{b}) \subseteq I_{\bar{b}}$, и, следовательно, $x \in I_{\bar{b}}$. Отсюда

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{x},\bar{b},\bar{A},I_{\bar{b}}) \rightarrow I_{\bar{b}}(\bar{x}),$$

что и требовалось доказать. □

В заключение автор выражает благодарность С.С.Гончарову и В.Ю.Сазонову за внимание, проявленное к настоящей работе.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование. -В кн.: Логико-математические проблемы МОЗ (Вычислительные системы, вып. 107). Новосибирск, 1985, с. 3-29.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Замечание об аксиомах списочной надстройки GES. -В кн.: Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, вып. 114). Новосибирск, 1986, с. 11-15.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-допустимые множества.- Там же, с. 35-39.

4. ГОНЧАРОВ С.С. Σ-программы и эффективные реализации списочной надстройки. -В кн.: Труды Всесоюз. конф. по прикладной логике. Новосибирск, 1985, с.57-60.

5. САЗОНОВ В.Ю. Бестиповые исчисления Σ-выражений. -Настоящий сборник, с.80-100.

Поступила в ред.-изд.отд.
8 апреля 1986 года