МАШИННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 118

УДК 681.142/155

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

Ж.С. Касымова

В последнее время большой интерес проявляется к исследованиям проблемы индукции в нетрадиционной постановке [1]. Частным случаем проблемы усиления эмпирических теорий является проблема автоматического поиска закономерностей. Следовательно, необходимые требования R1-R4 (R1 есть требование формальности метода, R2 - непротиворечивости исходным данным, R3 - нетривиальности, R4 - инвариантности относительно форм записи входных и выходных данных), выдвинутые для произвольного метода индукции, должны выполняться и для метода обнаружения закономерностей. Как и в [1], методы, удовлетворяющие требованиям R1-R4 назовем регулярными. Однако по теореме К.Ф.Самохвалова [1] каждый регулярный метод является недопустимым, т.е. всякий раз, когда на основе фактов наблюдения M_0 регулярным методом усиливается исходная теория h_0, получается теория h_1, отрицающая все наблюдения, кроме подобных M_0, либо теория h_0 вообще не усиливается.

Казалось бы, возникает безвыходное положение: с одной стороны, выполнение необходимых требований ведет к недопустимым методам обнаружения закономерностей, с другой - нарушение хотя бы одного из требований приводит к противоречиям. В связи с этим множество исследовательских работ [2,3-5 и др.] посвящено различным подходам к задаче поиска допустимых[x)] методов. Однако существующие методы хотя и являются допустимыми, но они нерегулярны (не выполняется требование R4 и даже его ослабленный вариант R4'(определение дано ниже)) и, следовательно, не гарантированы от возникновения противоречивых результатов.

---

x) В смысле не являющихся недопустимыми.

Одной из возможных причин такой нежелательной дилеммы является ограниченная выразительность языка I-го порядка[ж)] и слишком жестокое требование R4.

В данной работе делается попытка построить регулярные допустимые методы поиска закономерностей с учетом вышесказанных причин, а именно: во-первых, предлагается рассмотреть ослабленный вариант требования R4; во-вторых, эмпирические теории формализовать в исчислениях с унарной сигнатурой и со специальными кванторами.

В § I формулируются требования R1–R4', доказывается теорема о существовании единственного регулярного допустимого ("почти" недопустимого) метода, формализованного в рамках классического исчисления и удовлетворяющего требованиям R1–R4'. В § 2 доказывается теорема о существовании и определяется класс регулярных допустимых методов, удовлетворяющих требованиям R1–R4' и формализованных в рамках исчислений со специальными кванторами.

§ I. Инвариантный метод, формализованный в классическом исчислении

Предполагается, что читатель знаком с работой [5], в которой вводятся в рассмотрение исчисления с ассоциативными (или a-кванторами) и импликационными кванторами (или i-кванторами).

Условимся через I^a (I^i) обозначать исчисление с произвольным фиксированным $\tilde{x}$ a-квантором (i-квантором), через $I^{\overset{\Rightarrow}{x}}$, $I^{\overset{\Rightarrow}{p,a}}$, $I^{\dot{\tilde{x}}}$, $I^{\overset{+}{\tilde{x}}}$ – исчисления с конкретными кванторами, соответственно: с $\overset{\Rightarrow}{x}$ – импликацией Чёрча, $\overset{\Rightarrow}{p,a}$ – обоснованной p-импликацией, $\dot{\tilde{x}}$ – простой ассоциацией, $\overset{+}{\tilde{x}}$ – аддитивной ассоциацией [6].

Можно показать, что кванторы $\forall$, $\exists$, $\overset{\Rightarrow}{x}$ являются эквивалентными в том смысле, что языки с одним из этих кванторов и унарной сигнатурой по выразительной силе равны. Следовательно, рассмотрения методов обнаружения закономерностей эквивалентны для случаев классического исчисления и исчисления $I^{\overset{\Rightarrow}{x}}$.

ж) Теорема К.Ф.Самохвалова доказана относительно усилений теорий, формализованных в классическом исчислении предикатов.

Пусть $I^{\vec{\vec{x}}}$ - исчисление, язык которого содержит сигнатуру $v = \langle P_1^1, \ldots, P_n^1 \rangle$; логические связки $\&, \vee, \to, \neg$; $\underset{x}{\Rightarrow}$ - i-квантор импликации Чёрча. В качестве моделей рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ всех конечных моделей.

Известно [5], что любое предложение исчисления I^a (I^i) можно представить в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций чисто предваренных формул и их отрицаний, где под чисто предваренной формулой понимается предложение $\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)$ с бескванторными подформулами $\varphi(x)$, $\psi(x)$ с единственной свободной переменной x. Мы будем рассматривать только чисто предваренные формулы. В той же работе [5] показывается, что любую чисто предваренную формулу $\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)$ можно однозначно с точностью до эквивалентности представить в виде четверки $r(\varphi,\psi) = \langle A, B, C, D \rangle$ (где из $\varphi_1 \equiv \varphi$ и $\psi_1 \equiv \psi$ следует $r(\varphi,\psi) = r(\varphi_1, \psi_1)$):

$$A \rightleftharpoons \{ P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} \mid P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} - \text{член СДНФ}^{x)}\ \varphi \text{ и член СДНФ } \psi \},$$

$$B \rightleftharpoons \{ P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} \mid P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} - \text{не член СДНФ } \psi, \text{ но член СДНФ } \varphi \},$$

$$C \rightleftharpoons \{ P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} \mid P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} - \text{член СДНФ } \psi, \text{ не член СДНФ } \varphi \},$$

$$D \rightleftharpoons \{ P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} \mid P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} - \text{не член СДНФ } \varphi \text{ и не член СДНФ } \psi \}.$$

Тогда каждое правило вывода системы $DR^{\vec{\vec{x}}}$, осуществляющее переход от одной чисто предваренной формулы к другой, можно записать в виде перехода соответственно от одной четверки к другой[xx]:

$$DR^{\vec{\vec{x}}}: \frac{\varphi \& \neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \vee \chi}{\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \vee \chi} \text{ осуществляет переход } \frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\langle A \cup C_0, B, C \setminus C_0, D \rangle},$$

---

x) СДНФ - совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

xx) $DR^{\vec{\vec{x}}}$ - полная система правил вывода исчисления $I^{\vec{\vec{x}}}$ (см. [6]).

$$\frac{\varphi\vee\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\&\neg\chi}{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\&\neg\chi}$$ осуществляет переход $$\frac{\langle A,B,C,D\rangle}{\langle A,B\setminus B_0,C,D\cup B_0\rangle},$$

$$\frac{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\vee\chi}{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\&\neg\chi}$$ осуществляет переход $$\frac{\langle A,B,C,D\rangle}{\langle A,B,C\setminus C_0,D\cup C_0\rangle},$$

$$\frac{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\&\neg\chi}{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\vee\chi}$$ осуществляет переход $$\frac{\langle A,B,C,D\rangle}{\langle A,B,C\cup D_0,D\setminus D_0\rangle},$$

$$\frac{\varphi\vee\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\vee\chi}{\varphi\&\neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\vee\chi}$$ осуществляет переход $$\frac{\langle A,B,C,D\rangle}{\langle A\setminus A_0,B,C\cup A_0,D\rangle},$$

$$\frac{\varphi_1 \underset{x}{\Rightarrow} \psi_1, \varphi_2 \underset{x}{\Rightarrow} \psi_2}{\varphi_1\&\neg\psi_1\vee\varphi_2\&\neg\psi_2 \underset{x}{\Rightarrow} \neg(\varphi_1\&\neg\psi_1\vee\varphi_2\&\neg\psi_2)}$$ осуществляет

переход $$\frac{\langle A_1,B_1,C_1,D_1\rangle,\langle A_2,B_2,C_2,D_2\rangle}{\langle A,B_1\cup B_2,C,D\rangle},$$

$$\frac{\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi}{(1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi\&\neg\psi)}$$ осуществляет переход $$\frac{\langle A,B,C,D\rangle}{(\langle\emptyset,A\cup C\cup D,B,\emptyset\rangle)}.$$

Схемой аксиом исчисления $I^{\vec{x}}$ является $\varphi\&\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi\vee\varphi$ с соответствующей четверкой $\langle A,\emptyset,C,D\rangle$.

ЛЕММА I. Нижеприводимые эквивалентности (в которых вместо предваренных формул написаны соответствующие им четверки) являются как семантическими, так и синтаксическими:

$$\langle A_1,B_1,C_1,D_1\rangle\&\ldots\&\langle A_k,B_k,C_k,D_k\rangle \equiv \langle A,\bigcup_1^k B_i,C,D\rangle;$$

$$\langle A,B,C,D\rangle \equiv \langle\emptyset,B,A\cup C,D\rangle \equiv \langle A\cup D,B,C,\emptyset\rangle,$$

$$\langle A_1,B,C_1,D_1\rangle \equiv \langle A_2,B,C_2,D_2\rangle$$ и т.д.

Доказательство очевидно.

В дальнейшем чисто предваренную формулу $\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi$ в исчислении $I^{\vec{x}}$ можем характеризовать одним лишь множеством B, т.е. множеством элементарных конъюнкций $P_1^{\varepsilon_1}(x)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n}(x)$ (где $P_i^{\varepsilon_i}(x)$ =

$= P_i(x)$, если $\varepsilon_i = 1$, $P_i^{\varepsilon_i}(x) = \neg P_i(x)$, если $\varepsilon_i = 0$), входящих в в СДНФ формулы $\varphi(x)$, но не входящих в СДНФ формулы $\psi(x)$.

Согласно [I], эмпирическая теория имеет каноническое и аксиоматическое представления. Рассмотрим эмпирическую теорию h^v, представленную в аксиоматическом виде $\langle v, obs^v, S^v \rangle$, где

I) v - конечное множество наблюдаемых терминов, или сигнатура $P_1^1, \ldots, P_n^1$;

2) obs^v - инструкция о том, как и чем проводить наблюдения;

3) S^v - конечное непротиворечивое множество чисто предваренных формул в исчислении $I^{\neq}$, называемых аксиомами теории h^v.

Заметим, что в рассматриваемом случае аксиоматическое и каноническое представления теории равносильны (хотя в общем случае это неверно), поскольку множество $\mathcal{M}^v(S^v)$ моделей системы аксиом S^v совпадает с множеством всех моделей, являющихся конечными редуктами к моделям из $\mathcal{M}^v(S^v)$. Очевидно, класс $\mathcal{M}^v(S^v)$ эффективно разрешим, так как среди моделей для конечного S^v нет бесконечных.

Множество S^v ($S^v = \{\langle B_i \rangle\}_{i=1}^k$) можно представить в силу леммы I в виде одной формулы $\langle \overset{k}{\underset{1}{\cup}} B_i \rangle$. Наблюдение M^v, $M^v \in \mathcal{M}$, диаграмма модели $D(M^v)$ или протокол наблюдения M^v определяются так же, как и в работе [I].

Под методом обнаружения закономерностей будем понимать функцию f, сопоставляющую каждой двойке $\langle h_0^v, M_0^v \rangle$ (из подходящего класса) некоторую теорию h_1^v, которая принимается фактически всякий раз, когда принимается теория h_0^v (здесь $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle$, $h_1^v = \langle v, obs^v, S_1^v \rangle$, S_0^v и S_1^v - множества чисто предваренных формул).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Класс $\mathcal{C}_0^f$ называется классом методов обнаружения закономерностей f, сопоставляющих двойке $\langle h_0^v, M_0^v \rangle$ теорию $h_1^v = \langle v, obs^v, S_0^v \cup \{B_i\}_{i=1}^s \rangle$ такую, что $\{B_i\}_{i=1}^s$ - новые закономерности, невыводимые из множества S_0^v по правилам вывода $DR^{\neq}$ и не противоречащие S_0^v, где $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle$.

Пусть π - множество всех пар $\langle S^v, M^v \rangle$ таких, что $M^v \in \mathcal{M}(S^v)$, или в наших терминах это означает, что все элементарные конъюнкции из $\langle \overset{k}{\underset{1}{\cup}} B_i \rangle$ отображаются в 0 на модели M^v.

Через τ обозначим множество всех конечных непротиворечивых множеств чисто предваренных формул исчисления I^{Σ}.

Приступим к изложению необходимых требований, которым должен удовлетворять метод поиска эмпирических закономерностей.

R1: для любых $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle, M_0^v$, если M_0^v – наблюдение, полученное в соответствии с obs^v, и если $M_0^v \in \mathfrak{M}(S_0^v)$ (или $M_0^v \models S_0^v$)[ж)], то

$$f(\langle h_0^v, M_0^v \rangle) = \langle v, obs^v, con_f(S_0^v, M_0^v) \rangle,$$

con_f есть однозначное отображение из π в τ, причем если $con_f(S_0^v, M_0^v) = S_1^v$ и $S_0^v = \langle \bigcup_1^k B_i \rangle$, то $S_1^v = S_0^v \cup \{\langle B_i^* \rangle\}_1^s$.

R2: для любых $\langle S_0^v, M_0^v \rangle \in \pi$, $S_1^v \in \tau$, если $con_f(S_0^v, M_0^v) = S_1^v$, то $M_0^v \in \mathfrak{M}(S_1^v)$, или в наших терминах это требование означает, что метод con_f должен находить элементарные конъюнкции B_i^*, которые на модели M_0^v отображаются в 0. Очевидно, полученное $S_1^v = S_0^v \cup \{\langle B_i^* \rangle\}_{i=1}^s$ будет непротиворечивым.

R3: а) для каждых $\langle S_0^v, M_0^v \rangle \in \pi$ и $S_1^v \in \tau$ модели M_1^v, где $M_1^v \in \mathfrak{M}$, если $con_f(S_0^v, M_0^v) = S_1^v$ и $M_1^v \notin \mathfrak{M}(S_0^v)$, то $M_1^v \notin \mathfrak{M}(S_1^v)$. Поскольку наш метод con_f ищет множество S_1^v, логически усиливающее множество S_0^v, то, очевидно, это требование выполнится;

б) существуют $\langle S_0^v, M_0^v \rangle \in \pi$ и M_1^v из $\mathfrak{M}$ такие, что для каждого $S_1^v \in \tau$, если $con_f(S_0^v\ M_0^v) = S_1^v$, то $M_1^v \in \mathfrak{M}(S_0^v)$, а $M_1^v \notin \mathfrak{M}(S_1^v)$. Другими словами, найденные $\{\langle B_i^* \rangle\}_{i=1}^s$ не должны выводиться из множества S_0^v по правилам DR^{Σ}, модель же M_0^v выбирается таким образом, что множество $\{\langle B_i^* \rangle\}_1^s$, равных 0 на M_0^v, не было пустым.

Прежде чем формулировать требование R4, введем некоторые понятия.

ж) Вообще говоря, в качестве входных данных выступает не модель M_0^v, а диаграмма модели $D(M_0^v)$, что мы и будем подразумевать.

Для каждой модели M^v из $\mathfrak{M}$ построим таблицу T_{M^v} следующего вида:

$P_1^{\varepsilon_1^1}(x)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^1}(x)$	...	$P_1^{\varepsilon_1^i}(x)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^i}(x)$	...	$P_1^{\varepsilon_1^{2^n}}(x)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^{2^n}}(x)$
m_1	...	m_i	...	m_{2^n}

В верхней строке написаны в фиксированном порядке все элементарные конъюнкции сигнатуры v, а в нижней – числа m_i такие, что $\sum_{i=1}^{2^n} m_i = |\overline{M}^v|$, m_i – мощность $\{m \mid m\in |M^v|$ и $P_1^{\varepsilon_1^i}(m)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^i}(m) = 1\}$. Очевидно, если $M_1^v \approx M_2^v$, то $T_{M_1^v} = T_{M_2^v}$, и наоборот.

Пусть $v = \langle P_1^1,\ldots,P_n^1\rangle$, $w = \langle Q_1^1,\ldots,Q_n^1\rangle$.

Рассмотрим преобразование F_v^w, удовлетворяющее следующему условию ⊙ :

при преобразовании F_v^w каждая модель M^v из $\mathfrak{M}$ переходит в такую модель $F_v^w M^v$ сигнатуры w, в которой

I) $|M^v| = |F_v^w M^v|$;

2) для каждых $m\in|M^v|$ и $i\in\{1,\ldots,2^n\}$ имеет место

$$Q_1^{a_{1i}}(m)\&\ldots\&Q_n^{a_{ni}}(m) \rightarrow P_1^{\varepsilon_1^i}(m)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^i}(m), \tag{1}$$

где $Q_j^{a_{ji}} = Q_j$, если $a_{ji} = 1$; и $Q_j^{a_{ji}} = \neg Q_j$, если $a_{ji} = 0$; $P_j^{\varepsilon_j^i} = P_j$, если $\varepsilon_j^i = 1$ и $P_j^{\varepsilon_j^i} = \neg P_j$, если $\varepsilon_j^i = 0$, причем для каждой пары $i,r\in\{1,\ldots,2^n\}$, $i\neq r$, имеет место $\langle a_{1i},\ldots,a_{ni}\rangle \neq$ $\neq \langle a_{1r},\ldots,a_{nr}\rangle$, $\langle \varepsilon_1^i,\ldots,\varepsilon_n\rangle \neq \langle \varepsilon_1^r,\ldots,\varepsilon_n^r\rangle$.

В дальнейшем совокупность соотношений (I) будем предполагать при записи следующего перечня взаимно-однозначных соответствий между элементарными конъюнкциями сигнатур v и w:

$$F_v^w(P_1^{\varepsilon_1^1}(x)\&\ldots\&P_n^{\varepsilon_n^1}(x)) = Q_1^{a_{11}}(x)\&\ldots\&Q_n^{a_{n1}}(x), \quad \Bigg\} \\ \vdots$$

$$F_V^W(P_1^{\varepsilon_1^{2^n}}(x)\& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n^{2^n}}(x)) = Q_1^{a_{12^n}}(x)\& \ldots \& Q_n^{a_{n2^n}}(x) \quad (2)$$

Обозначим через φ_1 класс всех преобразований F_V^W, удовлетворяющих условию $\odot$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Класс φ есть класс нетворческих преобразований F_V^W, удовлетворяющих следующим требованиям:

а) F_V^W применим к каждой модели M^V сигнатуры v;

б) значения F_V^W на моделях M^V суть модели M^W сигнатуры w;

в) для всех M_1^V верно $|M_1^2| = |F_V^W M_1^V|$;

г) для всех M_1^V, M_2^V, если $M_1^V \approx M_2^V$, то $F_V^W M_1^V \approx F_V^W M_2^V$;

д) для всех M_1^V, M_2^V, если $M_1^V \not\approx M_2^V$, то $F_V^W M_1^V \not\approx F_V^W M_2^V$.

ЛЕММА 2. Любое преобразование $F_V^W \in \varphi_1$ является нетворческим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_V^W есть преобразование из φ_1. Покажем, что F_V^W удовлетворяет пп."а"-"д" определения 2. П."а" выполняется согласно п.I условия $\odot$. Рассмотрим п."б". Пусть $M^V = \langle |M^V|, P_1, \ldots, P_n \rangle$; разложим $Q_i(x)$ в СДНФ:

$$Q_i(x)=Q_1(x)\&\ldots\&Q_i(x)\&\ldots\&Q_n(x) \vee \ldots \vee \neg Q_1(x)\&\ldots\&Q_i(x)\&\ldots\&\neg Q_n(x).$$

Подставим вместо $Q_1^{a_{1j}}(x)\& \ldots \& Q_n^{a_{nj}}(x)$ конъюнкции $P_1^{\varepsilon_1^j}(x)\& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n^j}(x)$. Согласно перечню соответствий (2), получим

$$Q_i(x) = F_V^W(P_1^{\varepsilon_1^k}(x) \&\ldots\& P_n^{\varepsilon_n^k}(x)) \vee \ldots \vee F_V^W(P_1^{\varepsilon_1^t}(x) \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n^t}(x));$$

теперь однозначно можно построить модель $M^W = \langle |M^V|, Q_1 \ \ldots \ Q_n \rangle$, в которой для каждого объекта $m \in |M^V|$ и каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$Q_i(m) \leftrightarrow P_1^{\varepsilon_1^k}(m) \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n^k}(m) \vee \ldots \vee P_1^{\varepsilon_1^t}(m) \& \ldots \& P_1^{\varepsilon_n^t}(m).$$

П."в". Пусть $M_1^V, M_2^V \in \mathfrak{M}$ и $M_1^V \approx M_2^V$, тогда существует взаимно-однозначное отображение θ: $|M_1^V| \longleftrightarrow |M_2^V|$ такое, что для каждых $m \in |M_1^V|$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо $P_i(m) \leftrightarrow P_i(\theta m)$. Согласно пп."а" и "б", модель M_1^V при преобразовании F_V^W перейдет в модель M_1^W, в которой для каждых $m \in |M^V|$ и $j \in \{1,\dots,n\}$

$$Q_j(m) \leftrightarrow P_1^{\varepsilon_1^k}(m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^k}(m) \vee \dots \vee P_1^{\varepsilon_1^t}(m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^t}(m),$$

а модель M_2^V перейдет в модель M_2^W, в которой

$$Q_j(\theta m) \leftrightarrow P_1^{\varepsilon_1^k}(\theta m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^k}(\theta m) \vee \dots \vee P_1^{\varepsilon_1^t}(\theta m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^t}(\theta m),$$

для каждых $m \in |M_1^V|$ и $j \in \{1,\dots,n\}$. Очевидно, $Q_j(m) \leftrightarrow Q_j(\theta m)$ для любых $m \in |M_1^V|$, $j \in \{1,\dots,n\}$, т.е. $M_1^W \approx M_2^W$;

П."д" докажем методом от противного. Пусть $M_1^V \not\approx M_2^V$, но $F_V^W M_1^V \approx F_V^W M_2^V$. Тогда существует взаимно-однозначное отображение θ: $|M_1^W| \longleftrightarrow |M_2^W|$ такое, что для каждых $m \in |M_1^W|$ и $j \in \{1,\dots,n\}$ $Q_j(m) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow Q_j(\theta m)$, следовательно, имеет место и такое соотношение:

$$Q^{a_{1j}}(m) \& \dots \& Q_n^{a_{1j}}(m) \leftrightarrow Q_1^{a_{nj}}(\theta m) \& \dots \& Q_n^{a_{nj}}(\theta m), j \in \{1,\dots,n\}.$$

Если подставим в соответствии с перечнем (2) вместо элементарных конъюнкций $Q_1^{a_{1j}}(x) \& \dots \& Q_n^{a_{nj}}(x)$ конъюнкции $P_1^{\varepsilon_1^j}(x) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^j}(x)$, то

$$P_1^{\varepsilon_1^j}(m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^j}(m) \leftrightarrow P_1^{\varepsilon_1^j}(\theta m) \& \dots \& P_n^{\varepsilon_n^j}(\theta m);$$

получаем $P_i(\theta m) \leftrightarrow P_i(m)$ для каждых $m \in |M_1^V|$ и $i \in \{1,\dots,n\}$, что противоречит допущению $M_1^V \not\approx M_2^V$. Следовательно, если $M_1^V \not\approx M_2^V$, то $F_V^W(M_1^V) \not\approx F_V^W(M_2^V)$.

Заметим, что произвольное конечное непротиворечивое множество чисто предваренных формул S^V перейдет в результате F_V^W из φ_1 в конечное непротиворечивое множество чисто предваренных формул S^W (вместо элементарных конъюнкций в СДНФ формул S^V сигнатуры v нужно поставить соответствующие им в перечне (2) элементарные конъюнкции сигнатуры w).

R4: для $\forall \langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$, $\forall F_V^W \in \varphi_1$

$$F_V^W \mathrm{con}_f (S_0^V, M_0^V) = \mathrm{con}_f(F_V^W S_0^V, F_V^W M_0^V).$$

В наших терминах это требование означает, что метод con_f должен по паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle$ находить такое множество формул $\{\langle B_i^* \rangle\}_1^s$, что, какое бы преобразование F_0^W из φ_1 ни взяли, множество элементарных конъюнкций $F_V^W\{\langle B^* \rangle\}_1^s$ в точности будет равно множеству закономерностей, найденных этим же методом con_f по паре $\langle F_V^W S_0^V, F_0^W M_0^V \rangle$.

Пусть $\mathfrak{M}_m(S) = \{ M \mid |\bar{M}| = m, M \in \mathfrak{M}(S) \}$, $\{ M_0 \} = \{ M \mid M \approx M_0 \}$.

ТЕОРЕМА I. Существует и притом единственный метод $\tilde{f}$ обнаружения закономерностей, формализованный в исчислении $I^{\vec{x}}$ и удовлетворяющий всем четырем требованиям, такой, что существует пара $\langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$ и

I) $m = |\bar{M}_0^V|$, $\quad \mathfrak{M}_m(con_{\tilde{f}}(S_0^V, H_0^V)) \neq \mathfrak{M}_m(S_0^V)$ и

$$\mathfrak{M}_m(con_{\tilde{f}}(S_0^V, M_0^V)) \neq \{ M_0^V \}$$

или

2) $m \neq |\bar{M}_0^V|$, $\quad \mathfrak{M}_m(con_{\tilde{f}}(S_0^V, M_0^V)) \neq \mathfrak{M}_m(S_0^V)$ и

$$\mathfrak{M}_m(con_{\tilde{f}}(S_0^V, M_0^V)) \neq \emptyset .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Пусть метод $\tilde{f}$ обнаружения закономерностей удовлетворяет определению I и дополнительному условию:

0) $con_{\tilde{f}}$ находит все чисто предваренные формулы, не выводимые из множества S_0^V в исчислении $I^{\vec{x}}$ и истинные на модели M_0^V, т.е. находит все элементарные конъюнкции $\{\langle B_i^* \rangle\}_1^s$, отображающиеся в 0 на модели M_0^V и не принадлежащие множеству S_0^V.

Очевидно, вышеопределенный метод $\tilde{f}$ удовлетворяет первым трем ограничениям. В частности, для доказательства выполнимости требования R3 п."б" нужно взять в качестве искомой пары $\langle S^V, M^V \rangle$ такую, чтобы множество S^V и непустая модель M^V удовлетворяли следующим условиям:

I) если $S^V = \langle \bigcup_1^k B_i \rangle$ и $\mathbb{K}$ - множество всех элементарных конъюнкций сигнатуры v, то $\overline{\mathbb{K}\setminus\{B_i\}^k} > 1$, т.е. $2^n-k > 1$;

2) существует $\langle B^* \rangle \in \mathbb{K}\setminus\{B_i\}_1^k$, которое на модели M^v отображается в 0.

Тогда условие I гарантирует существование невыводимых из S^v чисто предваренных формул, а 2 – существование среди невыводимых из S^v формул формулы, истинной в M^v.

Докажем выполнимость требования R4 . Рассмотрим пару $\langle S_0^v$, $M_0^v \rangle$, удовлетворяющую вышеперечисленным условиям I и 2 (заметим, что достаточно рассмотреть только для таких пар, так как при выборе других пар, не удовлетворяющих хотя бы одному условию I или 2, акт применения метода $\tilde{f}$ будет тривиальным и выполнение требования R4 будет очевидным).

Итак, пусть $S_0^v = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$; $2^n-k>1$ и $\{B_i^*\}_{i=1}^s$ есть собственное непустое подмножество $\mathbb{K}\setminus\bigcup\limits_1^k B_i$, причем B_i^*, $i \in \{1,\dots,s\}$, отображаются на модели M_0^v в 0. Не ограничивая общности, допустим, что первые k элементарных конъюнкций в фиксированной их нумерации есть конъюнкции из множества S_0^v, а s последних номеров составляют множество $\{B_i^*\}_1^s$, т.е.

$$S_0^v = \bigcup_{i=1}^{k}(P_1^{a_{1i}} \& \dots \& P_n^{a_{ni}});$$

$$\{B_i^*\}_1^s = \{P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \dots \& P_n^{a_{n,2^n-s}},\dots,P_1^{a_{1,2^n}} \& \dots \& P_n^{a_{n,2^n}}\}.$$

Ясно, что $s+k < 2^n$.

Представим модель M_0^v в виде следующей таблицы $T_{M_0^v}$:

$P_1^{a_{1,1}} \& \dots \& P_n^{a_{n,1}}$	0
$\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,k}} \& \dots \& P_n^{a_{n,k}}$	0
$P_1^{a_{1,k+1}} \& \dots \& P_n^{a_{n,k+1}}$	m_{k+1}
$\vdots$	$\vdots$

$\vdots$ $\qquad\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n-s-1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s-1}}$	m_{2^n-s-1}
$P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s}}$	0
$\vdots$ $\qquad\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	0

Ясно, что $m_{k+1} > 0, \ldots, m_{2^n-s-1} > 0$.

Возьмем произвольное F_V^W-преобразование из класса φ_1. По условию (∗) (см.с.106), в результате преобразования F_V^W имеет место следующий перечень соответствий между элементарными конъюнкциями сигнатур V и W:

$$F_V^W(P_1^{a_{1,1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,1}}) = Q_1^{\varepsilon_1^1} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^1},$$
$$\ldots \tag{3}$$
$$F_V^W(P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}) = Q_1^{\varepsilon_1^{2^n}} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n}} .$$

При преобразовании F_V^W множество S_0^V перейдет в множество $F_V^W S_0^V = \bigcup\limits_1^k (Q_1^{\varepsilon_1^i} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^i})$, а модель M_0^V с таблицей $T_{M_0^V}$ перейдет в модель $F_V^W M_0^V$ со следующей таблицей:

$Q_1^{\varepsilon_1^1} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^1}$	0
$\vdots$ $\qquad\vdots$	$\vdots$
$Q_1^{\varepsilon_1^k} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^k}$	0
$Q_1^{\varepsilon_1^{k+1}} \& \ldots \& Q_n^{\varepsilon_n^{k+1}}$	m_{k+1}
$\vdots$ $\qquad\vdots$	$\vdots$

⋮ ⋮	⋮
$Q_1^{\varepsilon_1^{2^n-s-1}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n-s-1}}$	m_{2^n-s-1}
$Q_1^{\varepsilon_1^{2^n-s}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n-s}}$	0
⋮ ⋮	⋮
$Q_1^{\varepsilon_1^{2^n}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n}}$	0

В результате метода $\mathrm{con}_{\tilde{f}}$ с входными данными $F_V^W S_0^V$, $F_V^W M_0^V$ получим множество S_1^W, где

$$S_1^W = F_V^W S_0^V \cup \{ Q_1^{\varepsilon_1^{2^n-s}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n-s}}, \dots, Q_1^{\varepsilon_1^{2^n}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n}} \}.$$

Рассмотрим результат применения $\mathrm{con}_{\tilde{f}}$ к входным данным S_0^V и M_0^V. Ясно, что получим множество

$$S_1^V = S_0^V \cup \{P^{a_1, 2^n-s} \& \dots \& P_n^{a_n, 2^n-s}, \dots, P_1^{a_1, 2^n} \& \dots \& P_n^{a_n, 2^n}\}.$$

Применив к S_1^V преобразование F_V^W, получим

$$F_V^W S_1^V = F_V^W S_0^V \cup \{Q_1^{\varepsilon_1^{2^n-s}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n-s}}, \dots, Q_1^{\varepsilon_1^{2^n}} \& \dots \& Q_n^{\varepsilon_n^{2^n}} \},$$

т.е. $F_V^W S_1^V = S_1^W$, что и требовалось доказать. Теперь докажем первое утверждение теоремы I. Возьмем в качестве искомой пары, указанной в теореме, только что рассмотренную пару $\langle S_0^V, M_0^V \rangle$. Пусть $m = |\overline{M}_0^V|$. Докажем, что существует модель M_1^V из $\mathcal{M}(S_1^V)$, $|\overline{M}_1^V| = m$, $M_1^V \neq M_0^V$. Допустим, модель M_1^V имеет следующую таблицу $T_{M_1^V}$:

$P_1^{a_1, 1} \& \dots \& P_n^{a_n, 1}$	0
⋮ ⋮	⋮
$P_1^{a_1, k} \& \dots \& P_n^{a_n, k}$	0

$P_1^{a_{1,k+1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,k+1}}$	$m_{k+1}-1$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n-s-1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s-1}}$	$m_{2^n-s-1}+1$
$P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s}}$	0
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	0

В этой таблице m_i, $i \in \{k+2,\ldots,2^n-s-2\}$, совпадают с m_i из таблицы $T_{M_0^V}$. Так как $T_{M_1^V} \neq T_{M_0^V}$, то $M_1^V \not\equiv M_0^V$; из таблицы $T_{M_1^V}$ видим, что B_i^*, $i \in \{1,\ldots,s\}$, отображаются в 0, т.е. S_1^V истинна на модели M_1^V. Следовательно, M_1^V – искомая модель.

Докажем, что существует модель M_2^V из $\mathfrak{M}(S_0^V)$, $|\bar{M}_2^V| = m$, $M_2^V \notin \mathfrak{M}(S_1^V)$. Пусть модель M_2^V имеет следующую таблицу $T_{M_2^V}$:

$P_1^{a_{1,1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,1}}$	0
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
$P_n^{a_{1,k}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,k}}$	0
$P_1^{a_{1,k+1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,k+1}}$	0
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n-s-1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s-1}}$	m_{2^n-s-1}
$P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s}}$	m_{k+1}
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	0

Так как $m_{k+1} > 0$, то $B_s^* \neq 0$ ложно на модели M_2^V, следовательно, $M_2^V \notin \mathfrak{M}(S_1^V)$.

Единственность. Каждый метод $\tilde{f}'$, подпадающий под определение I (т.е. $\tilde{f}' \in \mathcal{E}_0$), будет искать чисто предваренные формулы $\{B_i^*\}_1^s$, невыводимые из S_0^V и истинные на модели M_0^V, т.е. такие элементарные конъюнкции, которые не принадлежат S_0^V и отображаются на модели M_0^V в 0. Следовательно, каждый метод $\tilde{f}'$ будет отличаться от метода $\tilde{f}$ лишь тем, что обнаруживает не все B_i^*, удовлетворяющие перечисленным ограничениям, а только некоторое их число.

Не ограничивая общности, допустим, что $\tilde{f}'$ – такой метод, который обнаруживает, за исключением одной формулы $\langle B_s^* \rangle$, все истинные в модели M_0^V чисто предваренные формулы $\{\langle B_i^* \rangle\}_{i=1}^{s-1}$, невыводимые из S_0^V по правилам DK^{f} исчисления I^{f}.

Очевидно, данный метод $\tilde{f}'$ удовлетворяет всем трем ограничениям R1–R3. Докажем, что нарушается требование R4.

Пусть множество S_0^V, как и прежде, есть $\{\overset{a}{P}{}_1^{1,1}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,1},\ldots,\overset{a}{P}{}_1^{1,k}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,k}\}$ модель M_0^V с той же таблицей $T_{M_0^V}$ (см. с. III), где $s = 2^n$. Допустим, что в результате применения $con_{\tilde{f}'}$ к паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle$ получили множество

$$S_1^V = S_0^V \cup \{\overset{a}{P}{}_1^{1,2^n-s}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n-s},\ldots,\overset{a}{P}{}_1^{1,2^n-1}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n-1}\}.$$

Рассмотрим F_v^V-преобразование, в результате которого получаем следующий перечень соответствий между элементарными конъюнкциями сигнатур v и V:

$$F_v^V(\overset{a}{P}{}_1^{1,i}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,i}) = \overset{a}{P}{}_1^{1,i}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,i}, \quad i=\overline{1,2^n-2},$$

$$F_v^V(\overset{a}{P}{}_1^{1,2^n-1}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n-1}) = \overset{a}{P}{}_1^{1,2^n}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n},$$

$$F_v^V(\overset{a}{P}{}_1^{1,2^n}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n}) = \overset{a}{P}{}_1^{1,2^n-1}\&\ldots\&\overset{a}{P}{}_n^{n,2^n-1}.$$

В результате F_v^V-преобразования множество $S_1^V = con_{\tilde{f}'}(S_0^V, M_0^V)$ пе-

рейдет в множество $F^V_V S^V_1 = S^V_0 \cup \{ P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \ldots \& P_n^{a_{1,2^n-s}}, \ldots$
$\ldots, P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}} \}$.

Рассмотрим результат применения $con_{\tilde{f}}$ к паре $\langle F^V_V S^V_0, F^V_V M^V_0 \rangle$. Так как $F^V_V S^V_0 = S^V_0$ и $F^V_V M^V_0 = M^V_0$, то $con_{\tilde{f}'}(F^V_V S^V_0, F^V_V M^V_0) =$

$$= S^V_0 \cup \{ P_1^{a_{1,2^n-s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-s}}, \ldots, P_1^{a_{1,2^n-1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n-1}} \}.$$

Очевидно, что $F^V_V S^V_1 \neq con_{\tilde{f}'}(F^V_V S^V_0, F^V_V M^V_0)$.

Таким образом, найден единственный метод $\tilde{f}$, формализованный с помощью классического исчисления $I^{\vec{x}}$, удовлетворяющий ограничениям R1-R4 и не являющийся недопустимым. Но, к сожалению, данный метод $\tilde{f}$ "почти" тривиальный в том смысле, что класс моделей $\mathfrak{M}(con_{\tilde{f}}(S^V_0\ M^V_0))$ содержит, помимо $\{ M^V_0 \}$, незначительное множество малоинтересных моделей.

§ 2. Класс инвариантных методов, формализованных в неклассическом исчислении

Приступим к рассмотрению исчисления $I^{p\vec{,}a}$, язык которого содержит n унарных предикатных символов, связки $\&, \vee, \rightarrow, \neg$, один $_{p\vec{,}a}$-квантор обоснованной p-импликации с рациональным числом p из $(\frac{1}{2},1)$ и натуральным числом a.

Правила вывода исчисления $I^{p\vec{,}a}(p \in (\frac{1}{2},1))$ следующие [6]:

$DR^{p\vec{,}a}$:

$$\frac{\varphi \& \neg \chi \;_{p\vec{,}a}\; \psi \vee \chi}{\varphi \& \neg \chi \;_{p\vec{,}a}\; \psi\ \neg\chi} \text{ соответствует переходу } \frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\langle A, B, C \setminus C_0, D \cup C_0 \rangle};$$

$$\frac{\varphi \;_{p\vec{,}a}\; \psi \& \chi}{\varphi \& \chi \;_{p\vec{,}a}\; \psi} \text{ соответствует переходу}$$

$$\frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\langle A, B \setminus B_1 \setminus B_2, C \cup B_1 \cup D_1, D \cup B_2 \setminus D_1 \rangle};$$

$$\frac{\varphi \,\&\, \neg\chi \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \vee \chi \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi \vee \chi}$$ соответствует переходу $$\frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\langle A \cup D_0, B, C, D \setminus D_0 \rangle};$$

$$\frac{\varphi \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi}{\neg(\varphi \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \neg\psi)}$$ соответствует переходу $$\frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\neg(\langle B, A, C, D \rangle)};$$

$$\frac{\varphi_1 \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi_1, \qquad \varphi_2 \,\&\, \neg\varphi_1 \,\&\, \neg\psi_1 \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi_2 \,\&\, \neg\varphi_1 \,\&\, \neg\psi_1}{\varphi_1 \vee (\varphi_2 \,\&\, \neg\psi_1) \;\underset{p,a}{\Rightarrow}\; \psi_1 \vee (\neg\varphi_1 \,\&\, \psi_2)},$$

что соответствует переходу от четверок $\langle A_1, B_1, C_1, D_1 \rangle$, $\langle A_2, B_2, C_2, D_2 \rangle$ со свойством $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ к четверке $\langle A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2, C, D \rangle$.

ЛЕММА 3. Следующие чисто предваренные формулы являются как семантически, так и синтаксически эквивалентными:

$\langle A_1, B_1, C_1, D_1 \rangle \equiv \langle A_1, B_1, C_2, D_2 \rangle$;

$\langle A, B, C, D \rangle \equiv \langle A, B, C \cup D, \emptyset \rangle \equiv \langle A, B, \emptyset, C \cup D \rangle$

и т.д.

Доказательство очевидно.

В дальнейшем любую чисто предваренную формулу в исчислении $I^{p,\vec{a}}$ будем однозначно с точностью до эквивалентности представлять в виде двойки $\langle A, B \rangle$ (см. [6]).

Рассмотрим эмпирические теории h^v, представленные в аксиоматическом виде $\langle v, obs^v, S^v \rangle$, где v и obs^v определялись ранее, а S^v есть конечное непротиворечивое множество чисто предваренных формул исчисления $I^{p,\vec{a}}$, называемых аксиомами теории h^v. В силу леммы 3 множество S^v можно представить в виде множества пар $\{\langle A_i, B_i \rangle\}_{i=1}^{k}$.

Под методом обнаружения закономерностей, как и прежде, будем понимать отображение, однозначно ставящее в соответствие каждой двойке $\langle h_0^v, M_0^v \rangle$ эмпирическую теорию h_1^v, где $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle$, $h_1^v = \langle v, obs^v, S_1^v \rangle$; S_0^v, S_1^v – множества чисто предваренных формул исчисления $I^{p,\vec{a}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Класс $\mathcal{S}_1$ называется классом методов обнаружения закономерностей f, сопоставляющих каждой двойке $\langle h_0^v, M_0^v \rangle$ с $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle$ (S_0^v истинны на модели M_0^v) теорию $h_1^v = \langle v, obs^v, S_1^v \rangle$ с $S_1^v = S_0^v \cup \{\langle A_i^*, B_i^* \rangle\}_1^s$, причем каждая формула $\langle A_i^*, B_i^* \rangle$ невыводима из множества S_0^v по правилам $DR^{\vec{p},a}$ и истинна на модели M_0^v.

Напомним [5,6], что истинность $\langle A, B \rangle$ на модели M^v означает выполнимость $m_A \geq a$ и $m_A \geq p(m_A + m_B)$, где m_A $[m_B]$ есть мощность множества объектов из $|M^v|$, на которых истинна дизъюнкция элементарных конъюнкций из A [B].

Пусть π - множество всех пар $\langle S^v, M^v \rangle$ таких, что $M^v \in \mathfrak{M}(S^v)$.

Через τ обозначим множество всех конечных непротиворечивых множеств чисто предваренных формул исчисления $I^{\vec{p},a}$.

Определение необходимых требований R1-R4, которым должен удовлетворять метод f в случае исчисления $I^{\vec{p},a}$, можно опустить, поскольку они аналогичны требованиям, рассмотренным выше для метода поиска закономерностей, формализованного в рамках классического исчисления $I^{\vec{x}}$.

Обозначим через $K(S^v)$ множество всех элементарных конъюнкций, входящих в множества $A_i \cup B_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, где $\langle A_i, B_i \rangle \in S^v$, $S^v = \{\langle A_i, B_i \rangle\}_{i=1}^k$. Пусть $\langle h_0^v, M_0^v \rangle$ есть пара, упомянутая в определении 3 метода f; $h_0^v = \langle v, obs^v, S_0^v \rangle$, $T_{M_0^v}$ - таблица модели M_0^v. Пусть con_f, упомянутая в формулировке требования R1, - однозначная функция из π в τ для метода f.

Ниже мы рассмотрим класс $\mathcal{S}$ методов обнаружения закономерностей. Но прежде чем формулировать этот класс, поясним содержательно одно из условий (см. ниже (2*)), которому должны удовлетворять методы из $\mathcal{S}$: в условии (2*) перечисляются все случаи, одновременное выполнение которых может привести к существованию такого акта применения некоторого метода f из $\mathcal{S}$, для которого возможно построение нетворческого преобразования F_v^v со свойствами: преобразование F_v^v переставляет местами такие элементарные конъюнкции $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ с равными числами $m_t = m_1$

из таблицы $T_{M_0^V}$, что входные данные S_0^V, M_0^V при этом не изменяются, $F_V^V S_0^V = S_0^V$, $F_V^V M_0^V = M_0^V$, а $con_f(S_0^V, M_0^V)$ становится не равным $F_V^V(con_f(S_0^V, M_0^V))$, что приводит к нарушению требования R4.

Итак, определим класс $\mathfrak{T}$ следующим образом: метод f принадлежит классу $\mathfrak{T}$, если и только если

(I*) либо а) con_f по каждой паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$ находит все невыводимые из S_0^V и не противоречащие S_0^V чисто предваренные формулы исчисления $I^{p,\vec{a}}$ (очевидно, $f \in \mathfrak{T}_1$);

либо б) $f \in \mathfrak{T}_1$ и $con_f(S_0^V, M_0^V) = S_0^V \cup \{\langle A_i, B_i \rangle\}_{i=1}^r$, где $\{\langle A_i^*, B_i^* \rangle\}_{i=1}^r$ есть множество <u>всех</u> чисто предваренных формул $\varphi \underset{p,\vec{a}}{} \psi$ с одним из следующих ограничений на вид подформул φ, ψ:

(i) φ представляет конъюнкцию k, $n \geq k \geq 1$, предикатных символов $P_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \& \ldots \& P_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, а ψ – дизъюнкцию s предикатных символов $P_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \vee \ldots \vee P_{j_s}^{\varepsilon_{j_s}}$, причем множества $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}, \{P_{j_1}, \ldots, P_{j_s}\}$ не пересекаются (числа k и s могут быть ограничены некоторым натуральным числом);

(ii) φ есть $P_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \& \ldots \& P_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$ и ψ есть $P_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \& \ldots \& P_{j_s}^{\varepsilon_{j_s}}$, множества $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$ и $\{P_{j_1}, \ldots, P_{j_s}\}$ не пересекаются, числа k и s ограничены некоторым натуральным числом (можно продолжить список ограничений на вид подформул φ и ψ, но мы будем рассматривать такие формулы $\varphi \underset{p,\vec{a}}{} \psi$);

либо в) пусть $S_0^V = \{\langle A_j, B_j \rangle\}_{j=1}^k$ и $k > 1$, метод con_f по паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$ находит множество <u>всех</u> возможных чисто предваренных формул, полученных из фиксированной формулы $\langle A_j, B_j \rangle \in S_0^V$ удалением из A_j и/или добавлением в B_j элементарной конъюнкции, при котором истинность формулы $\langle A_j, B_j \rangle$ на модели M_0^V не меняется (очевидно, $f \in \mathfrak{T}_1$);

либо г) пусть $K \setminus K(S_0^V) \neq \emptyset$, метод con_f по паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$ находит все формулы $\langle A_i^*, B_i^* \rangle$, истинные на M_0^V и такие, что

$A_i \cup B_i \subset \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}(S_0^V)$ (список в условии (1^*) можно было бы продолжить, но ограничимся рассмотрением такого класса $\mathfrak{T}$);

(2^*) если $con_r(S_0^V M_0^V) = S_1^V$ и $S_1^V = S_0^V \cup \{\langle A_i^*, B_i^* \rangle\}_{i=1}^s$, то каждое множество A_i^* (B_i^*) удовлетворяет требованию: для каждой элементарной конъюнкции $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$ из A_i^* (B_i^*) с соответствующим числом m_l, если существует элементарная конъюнкция $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P^{a_{nt}}$, соответствующее число которой m_t равно m_l в таблице $T_{M_0^V}$, $m_l = m_t$, то для $P^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ должно нарушаться одно из следующих условий:

(2^*а) $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \not\in A_i^*(B_i^*)$;

(2^*б) не существует формулы $\langle A_j^*, B_j^* \rangle$ из S_1^V такой, что B_j^* (A_j^*) получена из B_i^* (A_i^*) заменой $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ на $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$, а A_j^* (B_j^*) получена из A_i^* (B_i^*) заменой $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$ на $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$;

(2^*в) либо i) элементарные конъюнкции $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ не принадлежат множеству $K(S_0^V)$;

либо ii) $P_1^{a_{nl}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ одновременно входят в множество A_j или B_j некоторой формулы $\langle A_j, B_j \rangle$ из S_0^V;

либо iii) элементарные конъюнкции $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nt}}$ одновременно входят в $K(S_0^V)$, причем входят в такую пару формул $\langle A_{i_1}, B_{i_1} \rangle$, $\langle A_{i_2}, B_{i_2} \rangle$ из S_0^V, что $B_{i_1} = B_{i_2}$, а A_{i_2} получена из A_{i_1} заменой $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$ на $P^{a_{1t}} \& \ldots \& P^{a_{nt}}$ или, наоборот, $A_{i_2} = A_{i_1}$, B_{i_2} получена из B_{i_1} заменой $P_1^{a_{1l}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nl}}$ на $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$.

ТЕОРЕМА 2. Каждый метод обнаружения закономерностей f из определенного выше класса $\mathcal{C}$, формализованный в рамках исчисления $I^{p\vec{,}a}$ с неклассическим квантором $_{p\vec{,}a}$, удовлетворяет требованиям R1-R4, и для него существует пара $\langle S_0^v, M_0^v \rangle \in \pi$ и

I) $m = |M_0^v|$, $\mathcal{M}_m(\mathrm{con}_f(S_0^v\ M_0^v)) \neq \mathcal{M}_m(S_0^v)$,

$$\mathcal{M}_m(\mathrm{con}_f(S_0^v, M_0^v)) \neq \{M_0^v\}$$

или

2) $m \neq |M_0^v|$, $\mathcal{M}_m(\mathrm{con}_f(S_0^v, M_0^v)) \neq \mathcal{M}_m(S_0^v)$,

$$\mathcal{M}_m(\mathrm{con}_f(S_0^v, M_0^v)) \neq \emptyset .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения класса $\mathcal{C}$ видно, что каждый метод $f \in \mathcal{C}$ удовлетворяет требованиям R1-R3 (см.условие (I•)). Нам понадобится

ЛЕММА 4. Для метода f, удовлетворяющего условию (I•), условие (2•) является необходимым и достаточным для выполнимости требования R4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость</u>. Докажем методом от противного. Нам нужно показать, что для метода f из $\mathcal{C}$, удовлетворяющего условию (I•), если существует множество A_i^* (или B_i^*), где $\langle A_i^*, B_i^* \rangle \in S_1^v$, в котором есть элементарная конъюнкция $P_1^{a_{1l}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nl}}$ с числом m_l, равным m_t, $m_l = m_t$, и соответствующая числу m_t элементарная конъюнкция $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ одновременно обладает свойствами (2•а)-(2•в), то нарушается требование R4.

Заметим, что для методов f, удовлетворяющих условию (I•а) или (I•в), или (I•г), условие (2•) выполняется автоматически.

Действительно, для всех перечисленных методов f для всякой пары $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ (см.(2 • б)) будет всегда нарушаться условие (2 • б), поскольку они находят <u>все</u> истинные формулы того или иного вида, а выполнимость условия (2 • б) означала бы, что не все истинные формулы, невыводимые из S_0^v, найдены методом f. Поясним сказанное на примере. Пусть f удовлетворяет одному из условий (I • а),(I • в),(I • г). Пусть $\mathrm{con}_f(S_0^v, M_0^v) = S_1^v$, и допустим, что выполняется (2• б), тогда существует формула $\langle A_i^*, B_i^* \rangle$ из $S_1^v \setminus S_0^v$ и существует формула $\langle \tilde{A}_i^*, B_i^* \rangle \notin S_1^v \setminus S_0^v$ такая, что $\tilde{A}_i^*$ получена из A_i^* заменой $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$ на $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$. Очевидно, формула $\langle \tilde{A}_i^*, B_i^* \rangle$ тоже истинна на M_0^v, так как $m_{\tilde{A}_i^*} = m_{A_i^*}$ при $m_1 = m_t$, и поскольку $\langle A_i^*, B_i^* \rangle$ невыводима из S_0^v, то, по построению, $\langle \tilde{A}_i^*, B_i^* \rangle$ тоже невыводима из S_0^v. Пришли к противоречию. Следовательно, условие (2 • б) должно нарушаться.

Проверим необходимость для случая (I •б), в частности, для (I • бi). Для простоты допустим, что числа k и s ограничены I. Пусть $\mathrm{con}_f(S_0^v M_0^v) = S_1^v$; $S_1^v = S_0^v \cup \{\varphi \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi\}$, где $\varphi = P_{i_1}$, $\psi = P_{j_1}$. Тогда A есть множество элементарных конъюнкций вида $P_{i_1} \& P_{j_1} \& \ldots$, а B есть множество элементарных конъюнкций $P_{i_1} \& \neg P_{j_1} \& \ldots$, где $\& \ldots$ означает элементарную конъюнкцию $n-2$ предикатных символов сигнатуры $v \setminus \{ P_{i_1}, P_{j_1} \}$. Пусть существует элементарная конъюнкция $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_{i_1} \& P_{j_1} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, к примеру, из A такая, что для некоторой элементарной конъюнкции $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& \neg P_{i_1} \& P_{j_1} \& \ldots \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ с равным соответствующим числом m_t, $m_1 = m_t$, в таблице $T_{M_0^v}$ одновременно выполнены условия (2 •а)-(2 • в) (к примеру, (2 • вi)). Следовательно, (из (2 • а)) $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \notin A$, и так как $\neg P_{i_1} \& P_{j_1}$ есть подконъюнкция $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, то $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \ldots \& P_n^{a_{nt}} \notin B$.

Рассмотрим преобразование F_V^V из φ_1 с таким перечнем соответствий:

$$F_V^V(P_1^{a_{1i}} \& \ldots \& P_n^{a_{ni}}) = P_1^{a_{1i}} \& \ldots \& P_n^{a_{ni}}, \qquad i \neq 1,t,$$

$$F_V^V(P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}) = P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}},$$

$$F_V^V(P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}) = P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}.$$

Нетрудно видеть, что в результате F_V^V диаграмма M_0^V не изменится (так как $m_1 = m_t$); S_0^V тоже не изменится (так как (2 • B1)), а значит, $\mathrm{con}_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V) = \mathrm{con}_f(S_0^V, M_0^V) = S_0^V \cup \{P_{i_1}\ {}_{p,a}\!\!\Rightarrow P_{j_1}\}$. С другой стороны, $F_V^V \mathrm{con}_f(S_0^V, M_0^V) = S_0^V \cup \langle \tilde{A}, B \rangle$, где $\tilde{A}$ есть множество A с замененным $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$ на $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& \neg P_{i_1} \& P_{j_1} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nt}}$. Очевидно, $\langle \tilde{A}, B \rangle$ есть двойка формулы, не имеющей вида $P'_{i_1}\ {}_{p,a}\!\!\Rightarrow P_{j_1}$, так как $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& \neg P_{i_1} \& P_{j_1} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ в дизъюнкции с остальными членами $\tilde{A}$ не даст формулу вида $P'_{i_1}\ {}_{p,a}\!\!\Rightarrow P_{j_1}$. Следовательно, $F_V^V \mathrm{con}_f(S_0^V, M_0^V) \neq \mathrm{con}_f(S_0^V, M_0^V)$.

<u>Достаточность</u>. Поскольку методы f из $\mathcal{E}$ удовлетворяют требованию R1, то они опираются только на формальные данные $\langle S_0^V, M_0^V \rangle$, которые можно представить как множество пар множеств элементарных конъюнкций $\{\langle A_i, B_i \rangle\}_{i=1}^k$ и соответственно (см. определение таблицы $T_{M_0^V}$) множество пар $\{\langle$ элементарная конъюнкция; соответствующее ей число m_i в таблице $T_{M_0^V} \rangle\}_{i=1}^{2^n}$.

Заметим, что каждое F_V^V-преобразование из класса φ_1, переставляющее местами более одной пары элементарных конъюнкций, не изменяя остальные, можно разложить в суперпозицию более простых преобразований из φ_1, а именно в суперпозицию преобразований, переставляющих только две элементарные конъюнкции, не изменяя остальные. Следовательно, достаточность можно рассматривать только относительно преобразований, переставляющих местами только две элементарные конъюнкции и не изменяющих остальные.

Рассмотрим, например, случай (I $*$ г). Пусть метод $\mathfrak{f}$ удовлетворяет условиям (I$*$ г) и (2$*$). Не ограничивая общности, допустим, что $con_f(S_0^v, M_0^v) = S_1^v$; $S_1^v = S_0^v \cup \{\langle A_i^*, B_i^*\rangle\}_{i=1}^2$. Поскольку con_f удовлетворяет условию (I$*$г), то $\{(A_i^* \cup B_i^*)\}_{i=1}^2 \subset K \setminus K(S_0^v)$. Для con_f выполнено и условие (2$*$). Рассмотрим поочередно элементарные конъюнкции из A_i^* (B_i^*), $i = 1,2$. Для очередной $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_1^{a_{n1}}$ из A_1^* (B_1^*) с соответствующим числом m_1 в таблице $T_{M_0^v}$ либо вообще не существует элементарной конъюнкции $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ с соответствующим числом m_t, равным m_1, $m_t = m_1$, либо если существует такая элементарная конъюнкция $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, то для нее нарушается одно из условий (2 $*$ а)-(2$*$ в). Допустим, что не существует $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ с равным соответствующим числом m_t, $m_1 \neq m_t$. Рассмотрим F_v^v-преобразование из φ_1, переставляющее местами элементарные конъюнкции $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$. При F_v^v-преобразовании диаграмма модели M_0^v изменится, так как $m_1 \neq$ $\neq m_t$. Следовательно, $F_0^v M_0^v \neq M_0^v$. Поскольку метод con_f опирается только на множество пар {(элементарная конъюнкция; соответствующее число)} и на множество пар множеств $\{\langle A_i, B_i\rangle\}_{i=1}^k$, где $\langle A_i, B_i \rangle \in S_0^v$, то всюду, куда входила элементарная конъюнкция $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, будет входить $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, и наоборот, где было $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ – будет $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$. В этом случае R4 будет выполняться.

Допустим, что существует элементарная конъюнкция $P_1^{a_{1t}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nt}}$ с числом m_t, равным m_1, $m_t = m_1$. Пусть F_v^v-преобразование, переставляющее местами $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$. Тогда в силу допущения о выполнимости условия (2$*$) для элементарной конъюнкции $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ должно нарушаться одно из условий (2 $*$ а)-(2$*$ в). Рассмотрим поочередно нарушение каждого из перечисленных условий.

I. Пусть нарушено (2 $*$ а), т.е. $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \in A_1^*$. Следовательно, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \notin K(S_0^v)$. Тогда $F_v^v S_0^v = S_0^v$, $F_v^v M_0^v = M_0^v$.

Поскольку $F_V^V A_1^* = A_1^*$, то $con_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V) = F_V^V con_f(S_0^V, M_0^V)$, но при этом мы допустили, что $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ не входят в остальные формулы S_1^V. В случае если $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ одновременно входят в A^*, то $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ не принадлежат B_2^* и тогда $F_V^V A_2^* = A_2^*$, $F_V^V B_2^* = B_2^*$. Если $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$,$P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ одновременно входят в B_2^*, то $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ не принадлежат A_2^* и тогда $F_V^V A_2^* = A_2^*$, $F_V^V B_2^* = B_2^*$. Следовательно, в том и в другом случае $F_V^V S_1^V = con_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V)$. Рассмотрим случай, когда $P_1^{a_{11}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{n1}} \in A_2^*$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \in B_2^*$ (либо наоборот). Тогда в результате con_f (см.(I • г)) должна обнаружиться, помимо $\langle A_1^*, B_1^* \rangle$, $\langle A_2^*, B_2^* \rangle$, еще одна формула, а именно формула $\langle \tilde{A}_2^*, \tilde{B}_2^* \rangle$, где $\tilde{A}_2^*$ есть $\tilde{A}_2^*$, в котором $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$ заменено на $P_1^{a_{1t}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nt}}$, а $\tilde{B}_2^*$ есть B_2^* , в котором $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ заменено на $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$. Эта формула также истинна на M_0^V (так как $m_t = m_1$), и элементарные конъюнкции из $\tilde{A}_2^* \cup \tilde{B}_2^*$ содержатся в $K \setminus K(S_0^V)$. В этом случае будем иметь $F_V^V A_2^* = \tilde{A}_2^*$, $F_V^V B_2^* = \tilde{B}_2^*$, $F_V^V \tilde{A}_2^* = A_2^*$, $F_V^V \tilde{B}_2 = B_2^*$. Следовательно, $F_V^V S_1^V = Con_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V)$.

2. Пусть нарушено условие (2• б), но выполнено условие (2•а). Тогда существует в S_1^V формула, в частности $\langle A_2^*, B_2^* \rangle$, такая, что A_2^* есть A_1^*, в которой вместо $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P^{a_{n1}}$ подставлено $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, а B_2^* есть B_1^*, в котором вместо $P_1^{a_{1t}} \& \ldots$ $\ldots \& P_n^{a_{nt}}$ подставлено $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$. Множество $K(S_0^V)$ не содержит $P_1^{a_{11}} \& \ldots \& P_n^{a_{n1}}$, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, и поэтому $F_V^V S_0^V = S_0^V$. Так как $m_t = m_1$, то $F_V^V M_0^V = M_0^V$. Следовательно, $con_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V) = S_1^V$. С другой стороны, $F_V^V S_1^V$ есть $\{\langle F_V^V A_1^*, F_V^V B_1^* \rangle$, $\langle F_V^V A_2^*$,

$F_V^V B_2^* \rangle\} \cup F_V^V S_0^V$, где $F_V^V A_1^* = A_2^*$, $F_V^V A_2^* = A_1^*$, $F_V^V B_1^* = B_2^*$, $F_V^V B_2^* = B_1^*$, $F_V^V S_0^V = S_0^V$. Получаем $F_V^V S_1^V = S_1^V$, т.е.

$$con_f(F_V^V S_0^V, F_V^V M_0^V) = F_V^V con_f(S_0^V, M_0^V).$$

3. Допустим, нарушено условие (2 *в), т.е. одновременно неверно (2 * вi)-(2 * вiii). В этом случае $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \in K(S_0^V)$. Следовательно, $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}} \notin \{\langle A_i^* \cup B_i^* \rangle\}_{i=1}^2$. Тогда $F_V^V M_0^V = M_0^V$, а $F_V^V S_0^V \neq S_0^V$, где $F_V^V S_0^V$ есть S_0^V, в котором всюду в формулах вместо $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ записано $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$. Следовательно, теперь в $\{\langle A_i^*, B_i^* \rangle\}_{i=1}^2$ не входит $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$. Значит, в силу определения con_f обнаружатся формулы $\{\langle \tilde{A}_i^*, \tilde{B}_i^* \rangle\}_{i=1}^2$, в которых всюду, куда входила $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \& P_n^{a_{nl}}$ в $\langle A_i^*, B_i^* \rangle$, $i = 1,2$, будет входить $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, так как именно $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \ldots \& P_n^{a_{nt}}$ обладает всеми свойствами, которыми обладала $P_1^{a_{1l}} \& \ldots \ldots \& P_n^{a_{nl}}$, а именно: непринадлежностью $K(S_0^V)$ и истинностью формул $\langle \tilde{A}_i^*, \tilde{B}_i^* \rangle$, $i=1,2$, содержащих $P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$, соответствующее число которого m_t равно m_l, $m_t = m_l$. С другой стороны, $F_V^V S_1^V = F_V^V S_0^V \cup \{\langle A_i^*, B_i^* \rangle\}_{i=1}^2$, откуда следует выполнимость требования R4.

Продолжим доказательство утверждения I теоремы 2.

В качестве искомой пары $\langle S_0^V, M_0^V \rangle \in \pi$ возьмем такую, чтобы

I) множество S_0^V не было максимально непротиворечивым набором чисто предваренных формул исчисления $I_{p,\vec{a}}$, т.е. чтобы множество всех формул Frm без множества выводимых из S_0^V по правилам $DR^{p,\vec{a}}$ не было пусто:

$$Frm^k = Frm \setminus \{\langle A_i, B_i \rangle \mid \text{ существует набор } \langle A_{i_1}, B_{i_1} \rangle, \ldots$$
$$\ldots, \langle A_{i_t}, B_{i_t} \rangle \text{ из } S_0^V, \text{ где } A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset, \ldots, A_{i_{t-1}} \cap A_{i_t} = \emptyset,$$
$$(A_i \supseteq \bigcup_{j=1}^{t} A_{i_j}, B_i \subseteq (\bigcup_j B_{i_j} \setminus \bigcup_j A_{i_j})) \quad \text{или } (A_i \subseteq (\bigcup_j B_{i_j} \setminus \bigcup_j A_{i_j}),$$

$B_i \supseteq \bigcup_j A_{i_j})\} \neq \emptyset$,

2) модель M_0^V такова, что в ней истинна хотя бы одна формула из множества кандидатов на закономерность Frm^k .

Мы не будем приводить доказательства для всех случаев (I • а)-(I • г), а рассмотрим его для метода f, удовлетворяющего условиям (I• г)-(2•). Следовательно, $K \setminus K(S_0^V) \neq \emptyset$. Зафиксируем нумерацию элементарных конъюнкций сигнатуры v; $S_0^V = \{\langle A_i, B_i \rangle\}_{i=1}^k$. Для удобства положим, что первые s номеров занимают s элементарных конъюнкций, входящих в множество $K(S_0^V)$ (ясно, что $k < s$). Не ограничивая общности, рассмотрим метод con_f , который по паре $\langle S_0^V, M_0^V \rangle$ нашел только одну формулу $\langle A^*, B^* \rangle$, $A^* = P_1^{a_{1t}} \& \ldots \& P_n^{a_{nt}}$.

По предположению, $A^* \cup B^* \not\subseteq K(S_0^V)$, следовательно,номера элементарных конъюнкций из $A^* \cup B^*$ больше номера s, в частности $t > s$, $t = s+1$; пусть номера от $t+1$ до $t+r$ ($t+r \leq 2^n$) суть номера элементарных конъюнкций из B^*.

Таблица модели M_0^V имеет следующий вид:

$P_1^{a_{1,1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,1}}$	m_1
⋮ ⋮	⋮
$P_1^{a_{1,s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,s}}$	m_s
$P_1^{a_{1,t}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t}}$	m_t
$P_1^{a_{1,t+1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+1}}$	m_{t+1}
⋮ ⋮	⋮
$P_1^{a_{1,t+r}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+r}}$	m_{t+r}
⋮ ⋮	⋮
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	m_{2^n}

Пусть $|\overline{M_0^V}| = m$. Нетрудно построить модель $M_1^V \in \mathfrak{M}(S_0^V)$ со свойствами $|\overline{M_1^V}| = m$, $M_1^V \neq M_0^V$, $M_1^V \in \mathfrak{M}(S_1^V)$. В частности, модель с таблицей:

$P_1^{a_{1,1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,1}}$	m_1
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,s}}$	m_s
$P_1^{a_{1,t}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t}}$	m_t+1
$P_1^{a_{1,t+1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+1}}$	$m_{t+1}-1$
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,t+r}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+r}}$	m_{t+r}
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	m_{2^n}

Можно показать, что существует модель $M_2^V \in \mathfrak{M}(S_0^V)$, $M_2^V \notin \mathfrak{M}(S_0^V)$, $|\overline{M}_2^V| = m$. Пусть таблица модели M_2^V имеет следующий вид:

$P_1^{a_{1,1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,1}}$	m_1
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,s}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,s}}$	m_s
$P_1^{a_{1,t}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t}}$	0
$P_1^{a_{1,t+1}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+1}}$	$m_{t+1}+m_t$
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,t+r}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,t+r}}$	m_{t+r}
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$P_1^{a_{1,2^n}} \& \ldots \& P_n^{a_{n,2^n}}$	m_{2^n}

Очевидно, формула $\langle A^*, B^* \rangle$ будет ложной на M_2^V, так как $m_{A^*} = m_t = 0$, следовательно, $m_t \not\geq a$ (a – натуральное), а,значит, $M_2^V \notin \mathfrak{M}(S_1^V)$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Для того чтобы показать, насколько широкий класс интересных моделей охватывает полученное множество закономерностей $con_I(S_0^V, M_0^V)$, достаточно заметить, сколько существует возможностей варьирования чисел m_i, $i \in \{1,\ldots 2^n\}$, в таблице модели $T_{M_0^V}$, оставляя истинными формулы $con_I(S_0^V M_0^V)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть исчисления $I^{\tilde{x}}, I^{\overset{\pm}{x}}, I^a$, I^i и для каждой из них найти непустой класс регулярных допустимых методов обнаружения закономерностей.

Таким образом, при рассмотрении проблемы автоматического поиска закономерноотей, формализованных в рамках классического исчисления предикатов, найден единственный регулярный "почти" недопустимый метод, тогда как в исчислениях с неклассическими кванторами получено целое семейство классов регулярных допустимых методов.

Литература

1. ЗАГОРУЙКО Н.Г.,САМОХВАЛОВ К.Ф.,СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований.-Новосибирск,1978. - 66 с. (НГУ).

2. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания.- В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы,вып.67).Новосибирск,1976,с.54-68.

3. АЗИМОВА Ж.С.,СВИРИДЕНКО Д.И. О понятии "закономерность".- В кн.: Машинные методы обнаружения закономерностей (Вычислительные системы,вып.88).Новосибирск,1981,с.30-43.

4. МАЗУРОВ В.Д. Несовместные системы неравенств в задачах распознавания.- В кн.: Методы комитетов в распознавании образов . Свердловск,1974.Вып.6,с.3-9 (Ин-т матем. и мех.УНЦ АН СССР).

5. ГАЕК П., ГАВРАНЕК Т. Автоматическое образование гипотез.- М.: Наука,1984. - 277 с.

6. КАСЫМОВА Ж.С. Полнота и разрешимость исчислений со специальными кванторами. - В кн.: Анализ данных в экспертных системах (Вычислительные системы,вып.117).Новосибирск,1986,с.36-62.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 августа 1986 года