

ГРАФЫ С СОВПАДАЮЩИМИ ЦЕПНЫМИ МАТРИЦАМИ СЛОЕВ

А.А. Добрынин

Рассматриваются количественные и структурные характеристики простых цепей связных неориентированных графов. Количественные характеристики представляются в виде наборов чисел, равных количеству цепей различной длины, выходящих из вершин графа. В [1] такие наборы содержит цепная матрица слоев, а в [2,3] - цепная степенная последовательность. Исследуется однозначность представления графов цепной матрицей слоев. Показывается, что для $14 \leq p \leq 18$ существуют пары неизоморфных графов порядка p с совпадающими цепными матрицами слоев. Для $r \geq 3$ дан ответ на вопрос о существовании неизоморфных регулярных графов степени r с совпадающими цепными матрицами слоев. С количественными и структурными характеристиками цепей связаны также понятия изотопичности и структурной изотопичности графов [1]. Для изотопичных графов существует отображение одного графа на другой, при котором сохраняются количественные характеристики цепей между вершинами графа. Сохранение структуры цепей, выходящих из вершин графа, является основным свойством при отображениях структурно-изотопичных графов. Изучаются вопросы существования графов, обладающих сочетаниями свойств изотопичности, структурной изотопичности и равенства цепной матрицы слоев.

1. Графы с совпадающей цепной матрицей слоев. Пусть $G(V, X)$ - конечный связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, $V(G)$ - множество вершин графа, $X(G)$ - множество ребер графа и $|V(G)| = p$, $|X(G)| = q$. Простор цепью в графе G , соединяющей вершины $v_1, v_k \in V(G)$, будем называть последовательность попарно различных вершин (v_1, v_2, \dots, v_k) такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in X(G)$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Длина простой цепи равна количеству ребер

(v_i, v_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, k-1$. Далее под цепью всегда понимается простая цепь. В этом разделе изучаются графы, имеющие одинаковые количественные характеристики цепей различной длины. Изоморфность графов G и H условимся обозначать $G \cong H$.

Пусть вершины графа G занумерованы числами $1, 2, \dots, p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Цепной матрицей слоев графа G называется матрица $\tau(G) = \|\tau_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, p-1$, где элемент τ_{ij} равен числу всех цепей длины j , соединяющих вершину i с остальными вершинами графа G .

Номер последней ненулевой компоненты в строке $\tau(G)$ назовем длиной этой строки. Приведение цепной матрицы слоев к каноническому виду заключается в упорядочении строк по уменьшению их длин, а строки одинаковой длины упорядочиваются лексикографически. На рис. 1, а показана цепная матрица слоев графа G с указанием вершин,

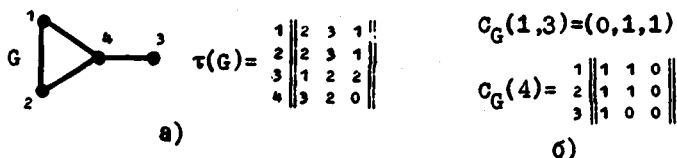


Рис. 1

соответствующих строкам $\tau(G)$. Для матрицы $\tau(G)$ будем использовать линейную запись, указывая только попарно различные строки и соответствующие им вершины в G . Нули, расположенные после последней ненулевой компоненты строки, для краткости также не указываем. Матрица $\tau(G)$ на рис. 1, а запишется в виде $\tau(G) = \|1, 2(2, 3, 1); 3(1, 2, 2); 4(3, 2)\|$. Если номера вершин в линейной записи $\tau(G)$ не важны, то указываем только кратность строки в цепной матрице слоев $\tau(G) = \|2 \cdot (2, 3, 1); (1, 2, 2); (3, 2)\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Цепным распределением $C_G(i, j)$ между вершинами i, j графа G называется вектор $C_G(i, j) = (c_1, c_2, \dots, c_{p-1})$, где c_k есть число всех цепей длины k , соединяющих вершины i и j в графе G .

Очевидно, что для любых вершин i, j графа G выполняется $C_G(i, j) = C_G(j, i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Цепным распределением $C_G(i)$ вершины i в графе G называется матрица

$$C_G(i) = \begin{pmatrix} C_G(i,1) \\ C_G(i,2) \\ \dots \\ C_G(i,i-1) \\ C_G(i,i+1) \\ \dots \\ C_G(i,p) \end{pmatrix}.$$

На рис. 1,б приводятся цепное распределение между вершинами 1 и 3 графа G и цепное распределение $C_G(4)$.

Проблема однозначности представления графов цепными матрицами слоев изучалась в [2-6]. Примеры неизоморфных деревьев с совпадающими цепными матрицами слоев построены в [2,4,5]. Наименьший известный порядок деревьев с этим свойством равен 18. С помощью таких деревьев в [2] построены графы, не являющиеся деревьями и имеющие порядок $p \geq 19$. Кроме того, в [6] утверждается, что для $p \leq 11$ равенство цепных матриц слоев двух графов порядка p является достаточным условием для их изоморфизма. Следующий результат дает ответ на вопрос о существовании графов порядка p с совпадающими цепными матрицами слоев для $14 \leq p \leq 18$. Утверждение будет сформулировано и доказано для более общего случая.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $p \geq 14$ существуют пары неизоморфных графов порядка p с совпадающими цепными матрицами слоев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим графы G и H порядка 14 на рис. 2. Очевидно, что G и H являются неизоморфными, а их цепные матрицы

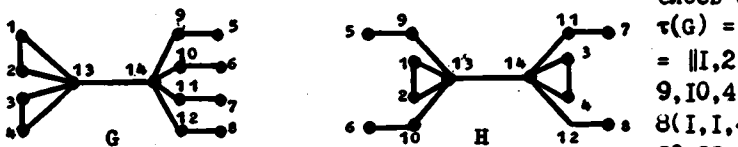


Рис. 2

слоев совпадают
 $\tau(G) = \tau(H) =$
 $= \parallel 1, 2, 3, 4(2, 5,$
 $9, 10, 4); 5, 6, 7,$
 $8(1, 1, 4, 7, 4); 9,$
 $10, 11, 12(2, 4, 7,$
 $4); 13, 14(5, 8,$
 $4) \parallel$. Построим

семейство графов $\{G_k, H_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 3). Так как $C_0 \neq H_0$, то по построению $G_k \neq H_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Порядок графов G_k и H_k

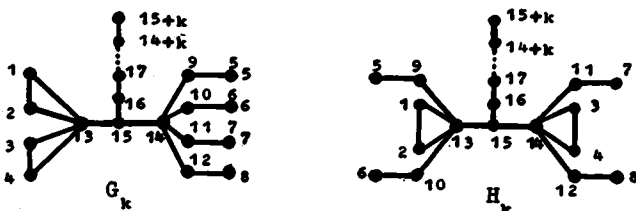


Рис.3

равен $k+15$. Далее будет показано, что для любого $k > 0$ $\tau_{ij}(G_k) = f(\tau_{ij}(G_0), C_{G_0}(15), k)$ и $\tau_{ij}(H_k) = f(\tau_{ij}(H_0), C_{H_0}(15), k)$ для всех i и j , где f - некоторая функция, т.е. элементы матриц $\tau(G_k)$ и $\tau(H_k)$ будут в явном виде выражены через элементы матриц $\tau(G_0)$, $\tau(H_0)$ и цепных распределений $C_{G_0}(15)$, $C_{H_0}(15)$. Графы G_0 и H_0 имеют совпадающую цепную матрицу слоев $\tau(G_0) = \tau(H_0) = \| I, 2, 3, 4(2, 5, 6, 7, 8, 4); 5, 6, 7, 8(I, I, 4, 4, 4, 4); 9, 10, 11, 12(2, 4, 4, 4, 4); I3, I4(5, 5, 4, 4); I5(2, 8, 8) \|$. Цепные распределения для вершины 15 в графах G_0 и H_0 также совпадают и в линейной записи имеют вид $C_{G_0}(15) = C_{H_0}(15) = \| I, 2, 3, 4(0, I, I); 5, 6, 7, 8(0, 0, I); 9, 10, 11, 12(0, I); I3, I4(I) \|$. Отсюда следует, что $\tau(G_k) = \tau(H_k)$ для $k = 1, 2, 3, \dots$

Обозначим элементы цепного распределения $C_{G_0}(15)$ следующим образом:

$$C_{G_0}(15) = \begin{pmatrix} C_{G_0}(15,1) \\ C_{G_0}(15,2) \\ \dots \\ C_{G_0}(15,14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,14} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{14,1} & C_{14,2} & \dots & C_{14,14} \end{pmatrix}$$

где $C_{i,j}$ есть число простых цепей длины j , соединяющих вершины i и i в графе G_0 . Рассмотрим вначале графы G_k при нечетных значениях k , $k > 0$.

Далее для доказательства нам потребуются утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Для вершины $i \in \{1, 2, \dots, 14\}$ графа G_k компоненты его цепной матрицы слоев можно представить в виде

$$\tau_{ij}(G_k) = \begin{cases} \tau_{ij}(G_0) + C_{i,1,j-1} & \text{при } j = 1, 2, \dots, k+1; \\ \tau_{ij}(G_0) + C_{i,j-k,j-1} & \text{при } j = k+2, k+3, \dots, 14; \\ C_{i,j-k,14} & \text{при } j = 15, 16, \dots, 14+k, \end{cases}$$

где $C_{i,m,n} = \sum_{r=m}^n c_{ir}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепное распределение вершины $i \in \{1, 2, 4, \dots, 14\}$ в графе G_k . Из построения графа G_k следует, что для вершины $j \in \{1, 2, \dots, 15\}$ выполняется $C_{G_k}^k(i, j) = C_{G_0}(i, j)$. Для вершины $j \in \{16, 17, \dots, 15+k\}$ распределение $C_{G_k}^k(i, j)$ можно выразить через $C_{G_0}(15)$. Пусть $j = 14+t$, $t \leq k$, тогда $C_{G_k}^k(i, j) = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{C_{G_0}(15, i)}_t)$. Запишем в явном виде распределение $C_{G_k}^k(i)$:

$$C_{G_k}^k(15) = \begin{pmatrix} C_{G_k}^k(i, 1) \\ \dots \\ C_{G_k}^k(i, i-1) \\ C_{G_k}^k(i, i+1) \\ \dots \\ C_{G_k}^k(i, 15) \\ C_{G_k}^k(i, 16) \\ C_{G_k}^k(i, 17) \\ \dots \\ C_{G_k}^k(i, 15+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{G_0}(i, 1) \\ \dots \\ C_{G_0}(i, i-1) \\ C_{G_0}(i, i+1) \\ \dots \\ C_{G_0}(i, 15) \\ C_{G_k}(16, i) \\ C_{G_k}(17, i) \\ \dots \\ C_{G_k}(15+k, i) \end{pmatrix} =$$

1	2	3	...	14	15	...	14+k
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$...	$a_{1,14}$	0		
...			
$a_{i-1,1}$	$a_{i-1,2}$	$a_{i-1,3}$...	$a_{i-1,14}$			
$a_{i+1,1}$	$a_{i+1,2}$	$a_{i+1,3}$...	$a_{i+1,14}$			
$a_{15,1}$	$a_{15,2}$	$a_{15,3}$...	$a_{15,14}$	$c_{1,14}$ 0 ... 0 $c_{1,13}$ $c_{1,14}$ \vdots \dots $c_{1,13}$ $c_{1,14}$ 0 \dots $c_{1,13}$ $c_{1,14}$		
0	$c_{i,1}$	$c_{i,2}$...	$c_{i,13}$			
0	0	$c_{i,1}$	$c_{i,2}$...			
...	0	...	0	$c_{i,1}$			

$k+1$

Элемент $a_{n,m}$ равен количеству цепей длины n , соединяющих вершины i и n . Сумма j -го столбца матрицы $C_{G_k}(i)$ есть компонента $\tau_{ij}(G_k)$ в цепной матрице слоев графа G_k . Имеем

$$1) \text{ если } j=1,2,\dots,k+1, \text{ то } \tau_{ij}(G_k) = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{15} a_{rj} + \sum_{r=1}^{j-1} c_{ir} = \\ = \tau_{ij}(G_0) + c_{i,j-1};$$

$$2) \text{ если } j=k+2,\dots,14, \text{ то } \tau_{ij}(G_k) = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{15} a_{rj} + \sum_{r=j-k}^{j-1} c_{ir} = \\ = \tau_{ij}(G_0) + c_{i,j-k,j-1};$$

$$3) \text{ если } j=15,16,\dots,14+k, \text{ то } \tau_{ij}(G_k) = \sum_{r=j-k}^{14} c_{ir} = c_{i,j-k,14}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для вершины $15+i \in \{16,17,\dots,15+k\}$ графа G_k компоненты цепной матрицы слоев можно представить в виде:

1) если $15+i \in \{16,17,\dots,15+(k-1)/2\}$, то

$$\tau_{15+i,j}(G_k) = \begin{cases} 2 & \text{при } j=1,2,\dots,1, \\ \tau_{15,j}(G_0)+1 & \text{при } j=i+1,\dots,k-1, \\ \tau_{15,j}(G_0) & \text{при } j=k-i+1,\dots,14+i, \\ 0 & \text{при } j=15+i,\dots,14+k; \end{cases}$$

2) е с л я $15+i \in \{15 + (k+1)/2, \dots, 15+k\}$, т о

$$\tau_{15+i,j}(G_k) = \begin{cases} 2 & \text{п р и } j = 1, 2, \dots, k-i, \\ 1 & \text{п р и } j = k-i+1, \dots, i, \\ \tau_{15,j}(G_0) & \text{п р и } j = i+1, \dots, 14+i, \\ 0 & \text{п р и } j = 15+i, \dots, 14+k. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепное распределение для вершины $15+i \in \{16, 17, \dots, 15+(k-1)/2\}$ в графе G_k . По построению графа G_k для $j \in \{1, 2, \dots, 14\}$ $c_{G_k}(15+i, j) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i}, c_{G_0}(15, j))$, сле -
довательно,

$$c_{G_k}(15+i) = \begin{pmatrix} c_{G_k}(15+i, 1) \\ c_{G_k}(15+i, 2) \\ \dots \\ c_{G_k}(15+i, 14) \\ c_{G_k}(15+i, 15) \\ \dots \\ c_{G_k}(15+i, 15+i-1) \\ c_{G_k}(15+i, 15+i+1) \\ \dots \\ c_{G_k}(15+i, 15+k) \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cc|c|c} & \overset{1 \dots 1}{c_{1,1}} & \overset{i+1}{c_{1,1}} & \dots & \overset{14+i}{c_{1,14}} & \dots & \overset{14+k}{0} \\ \hline 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,14} & & 0 \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \hline c_{14,1} & c_{14,2} & \dots & c_{14,14} & & & \\ \hline 0 \dots 0 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \dots 0 \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} / \\ \\ / \\ \backslash \end{array} & \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{к-1}$$

Суммируя элементы столбцов матрицы $c_{G_k}(15+i)$, получаем соответствующие элементы цепной матрицы слоев графа G_k для вершины $15+i$.

Цепное распределение для вершины $15+i \in \{15+(k+1)/2, \dots, 15+k\}$ имеет вид:

$$C_{G_k}(15+i) =$$

	1	...	i	i+1	...	14+i	...	14+k
1				$c_{1,1}$	$c_{1,2}$...	$c_{1,14}$	
2				$c_{2,1}$	$c_{2,2}$...	$c_{2,14}$	
...			0	⋮	⋮	⋮	⋮	0
14				$c_{14,1}$	$c_{14,2}$...	$c_{14,14}$	
15	0	...	0	1	0	0	...	0
16	0		1					
...								
15+i-1	1							
15+i+1	1		0			0		
...								
15+k	0			1				

$k-1$

Из матрицы $C_{G_k}(15+i)$ указанным выше способом получаем компоненты строки, соответствующей в $\tau(G_k)$ вершине $15+i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для вершины 15 графа G_k компоненты строки в цепной матрице слоев $\tau(G_k)$ могут быть представлены в виде:

$$\tau_{15,j}(G_k) = \begin{cases} \tau_{15,j}(G_0) + 1 & \text{при } j = 1, 2, \dots, k; \\ \tau_{15,j}(G_0) & \text{при } j = k+1, \dots, 14; \\ 0 & \text{при } j = 15, 16, \dots, 14+k. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепное распределение для вершины 15 в графе G_k . По построению графа G_k для вершины $j \in \{1, 2, \dots, 14\}$ имеем $C_{G_k}(15, j) = C_{G_0}(15, j)$, тогда

$$C_{G_k}(15) = \begin{pmatrix} C_{G_k}(15,1) \\ C_{G_k}(15,2) \\ \dots \\ C_{G_k}(15,14) \\ C_{G_k}(15,16) \\ \dots \\ C_{G_k}(15,14+k) \\ C_{G_k}(15,15+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{G_0}(15,1) \\ C_{G_0}(15,2) \\ \dots \\ C_{G_0}(15,14) \\ C_{G_k}(15,16) \\ \dots \\ C_{G_k}(15,14+k) \\ C_{G_k}(15,15+k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \dots & 14 & 15 & \dots & 14+k \\ \hline c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,14} & & & \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,14} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ c_{14,1} & c_{14,2} & \dots & c_{14,14} & & & \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|ccc} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & 0 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 \end{array} \end{array}$$

k

Суммируя элементы столбцов матрицы $C_{G_k}(15)$, получим требуемые выражения для элементов строки, соответствующей вершине 15 в матрице $\tau(G_k)$.

Теперь продолжим доказательство теоремы I.

Для четных значений k все рассуждения проводятся аналогично, за исключением того, что для вершины $15+k/2$ компоненты в строке $\tau(G_k)$ представляются в виде:

$$\tau_{15+k/2, j}(G_k) = \begin{cases} 2 & \text{при } j = 1, 2, \dots, k/2, \\ \tau_{15, j}(G_0) & \text{при } j = k/2+1, \dots, k/2+14, \\ 0 & \text{при } j = k/2+15, \dots, k+14. \end{cases}$$

Итак, для графа G_k в явном виде получено выражение компонент его цепной матрицы слоев $\tau(G_k)$ через компоненты цепной матрицы слоев $\tau(G_0)$ и цепного распределения $G_{G_0}(15)$. Повторив все рас-

суждения для графа H_k , получим такие же выражения для элементов $\tau(H_k)$ через элементы $\tau(H_0)$ и $C_{H_0}(15)$. Так как ранее показано, что $\tau(G_0) = \tau(H_0)$ и $C_{G_0}(15) = C_{H_0}(15)$, следовательно, для любого $k > 0$ выполняется $\tau(G_k) = \tau(H_k)$. Теорема I доказана.

Заметим, что существует, по крайней мере, еще пара неизоморфных графов порядка 14, отличных от графов на рис. 2, с совпадающими цепными матрицами слоев. Вопрос о существовании неизоморфных графов порядка 12 и 13 с совпадающими цепными матрицами слоев остается открытым. Для построенных примеров графов с совпадающими цепными матрицами слоев группа автоморфизмов графа не является тождественной. Неизоморфные деревья порядка 24 и графы порядка 21

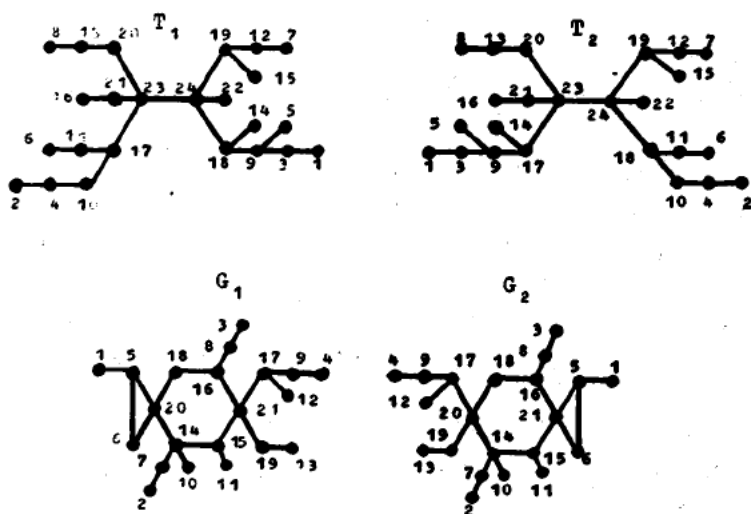


Рис. 4

на рис. 4 имеют тождественную группу автоморфизмов и совпадающие цепные матрицы слоев. Действительно, $\tau(T_1) = \tau(T_2) = \{I(1,1,2,2,3,5,5,3,1); 2(I,1,1,2,4,5,5,3,1); 3(2,2,2,3,5,5,3,1); 4(2,1,2,4,5,5,3,1); 5(1,2,3,3,5,5,3,1); 6(I,1,2,4,6,5,3,1); 7(I,1,2,3,5,6,4,1); 8(I,1,1,3,6,6,4,1); 9(3,3,3,5,5,3,1); 10(2,3,4,5,5,3,1); 11(2,2,4,6,5,3,1); 12(2,2,3,5,6,4,1); 13(2,1,3,6,6,4,1); 14(1,2,5,6,5,3,1); 15(1,2,4,5,6,4,1); 16(I,1,3,6,7,4,1); 17,18(3,5,6,5,3,1); 19(3,4,5,6,4,1); 20(2,4,6,6,4,1); 21(2,3,6,7,4,1); 22(I,3,7,7,4,1)\}$

23, 24(4, 7, 7, 4, 1) || и $\tau(G_1) = \tau(G_2) =$; I(1, 2, 4, 6, 9, 12, 17, 15, 6, 1); 2(1, 1, 3, 5, 7, 8, 7, 6, 4, 1); 3(1, 1, 2, 4, 8, 10, 8, 5, 4, 1); 4(1, 1, 2, 3, 5, 5, 7, 10, 5, 1); 5(3, 4, 6, 9, 12, 17, 15, 6, 1); 6(2, 5, 7, 9, 12, 17, 15, 6, 1); 7(2, 3, 5, 7, 8, 7, 8, 7, 6, 4, 1); 8(2, 2, 4, 8, 10, 8, 5, 4, 1); 9(2, 2, 3, 5, 5, 7, 10, 5, 1); 10(1, 3, 6, 7, 8, 7, 6, 4, 1); 11(1, 2, 6, 9, 7, 8, 5, 1); 12(1, 2, 4, 5, 5, 7, 10, 5, 1); 13(1, 1, 3, 6, 6, 7, 10, 5, 1); 14(4, 6, 7, 8, 7, 6, 4, 1); 15(3, 6, 9, 7, 6, 8, 5, 1); 16(3, 5, 8, 10, 8, 5, 4, 1); 17(3, 4, 5, 5, 7, 10, 5, 1); 18(2, 5, 10, 9, 7, 7, 5, 1); 19(2, 3, 6, 6, 7, 10, 5, 1); 20, 21(4, 7, 6, 7, 10, 5, 1) || . Для графов G_1 и G_2 порядка 21 цепная матрица слоев содержит 20 попарно различных строк. Представляют интерес примеры графов, в которых все строки цепной матрицы слоев являются попарно различными.

2. Регулярные графы с совпадающими цепными матрицами слоев. В работе [2] был поставлен вопрос о существовании неизоморфных регулярных графов с совпадающей цепной матрицей слоев. В настоящем разделе будут конструктивно построены регулярные графы с совпадающей цепной матрицей слоев.

Обозначим $\tau_G(v)$ строку, соответствующую вершине $v \in V(G)$, в цепной матрице слоев $\tau(G)$ графа G .

ТЕОРЕМА 2. Для любого $r \geq 3$ существует бесконечное количество пар неизоморфных регулярных графов степени r с совпадающими цепными матрицами слоев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим четыре случая: а) $r > 4$, r четно, б) $r = 4$, в) $r > 3$, r нечетно, г) $r = 3$.

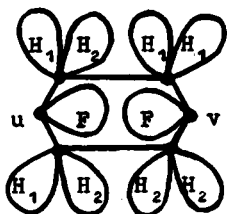


Рис. 5

Докажем п. "а". Пусть $r > 4$ и r четно. Рассмотрим граф G на рис. 5, образованный присоединением графов H_1, H_2 и F к вершинам цикла C_6 , $n_1 \neq n_2$. Пусть граф H_1 присоединяется к C_6 вершиной $v_1 \in V(H_1)$, граф H_2 — вершиной $v_2 \in V(H_2)$ и $k_1 = \deg(v_1)$, $k_2 = \deg(v_2)$, где $\deg(v)$ — степень вершины v . Граф G обладает свойством \mathcal{G} : вершины $u, v \in V(G)$ принадлежат различным орбитам группы автоморфизмов

графа G и $\tau_G(u) = \tau_G(v)$, что следует из построения графа G . Образуем графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 6, из трех копий графа G , отождествляя вершины, помеченные λ .

Предварительно докажем несколько лемм.

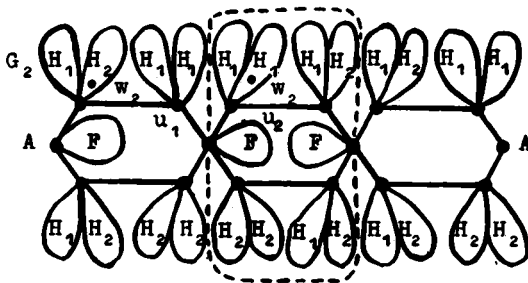
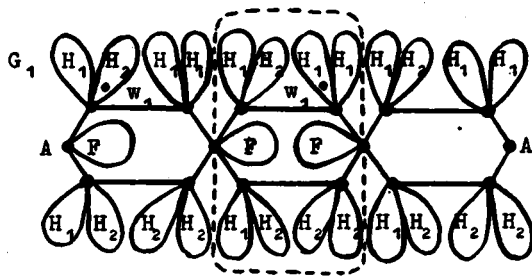


Рис. 6

ЛЕММА I. Графы G_1 и G_2 являются не изоморфными и $\tau(G_1) = \tau(G_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим, что графы G_1 и G_2 образованы различным присоединением двух изоморфных графов. Действительно, подграфы, расположенные внутри пунктирной линии и вне ее на рис. 6, являются изоморфными. По построению графы G_1 и G_2 будут неизоморфными. Для наглядности укажем на структурное отличие графов G_1 и G_2 . Например, в графе G_2

существуют вершины u_1 и u_2 на расстоянии два друг от друга, к которым присоединено по два графа H_1 , а в графе G_1 вершин с таким свойством не существует. Покажем, что $\tau(G_1) = \tau(G_2)$. Равенство цепных матриц слоев следует из построения графов G_1 и G_2 и того, что для графа G на рис. 5 выполняется $\tau_G(u) = \tau_G(v)$. Не составляет труда указать вершины $w_1 \in V(G_1)$ и $w_2 \in V(G_2)$, для которых выполняется $\tau_{G_1}(w_1) = \tau_{G_2}(w_2)$, так как G_1 и G_2 образованы из пар изоморфных графов. На рис. 6 показаны такие вершины для соответствующих изоморфных подграфов. Лемма доказана.

Для завершения доказательства для случая "а" необходимо подобрать такие графы H_1 , H_2 и F , чтобы графы G_1 и G_2 стали регулярными степени r . Из условия $\tau_G(u) = \tau_G(v)$ для графа на рис. 5 следует, что $k_1 = k_2 = (r-2)/2$. Значения k_1 и k_2 одновременно являются либо четными, либо нечетными. Пусть k_1 и k_2 четные, т.е. $k = k_1 = k_2 = 2m$ и $r = 2(2m+1)$, $m=1,2,3,\dots$. Рассмотрим регулярные графы K_{r+1} и K_{r+3}^* , где K_{r+3}^* образован из K_{r+3} удалением ребер некоторого гамильтонова цикла. Получим два неизо-

морфных регулярных графа степени r . Выделим в графах K_{r+1} и K_{r+3} цепь, состоящую из вершин v_1, v_2, \dots, v_k . Такая цепь всегда существует, так как в графах K_{r+1} и K_{r+3} , очевидно, существует гамильтонов цикл. Удалим из графов ребра (v_i, v_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, k-1$, а вершины v_1, v_2, \dots, v_k соединим с новой вершиной v . В получившиеся графы добавим удаленные ранее ребра (v_{2i}, v_{2i+1}) , $i = 1, 2, \dots, (k-2)/2$. В результате этих построений получим графы, в которых одна вершина имеет степень, равную k , а все остальные имеют степень, равную r . В качестве H_1 и H_2 возьмем построенные графы. По построению, $p(H_1) = r+2$ и $p(H_2) = r+4$. Граф F можно строить аналогичным образом, так как степень вершины присоединения графа F равна $r-4$ и является четной, $p(F) = r+2$. Таким образом, для значений $r = 2(2m+1)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ регулярные графы с совпадающей цепной матрицей слоев построены. Пусть значение k является нечетным, т.е. $r = 4(m+1)$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Для таких значений r рассмотрим граф на рис.7,а, для которого выполняется свой-

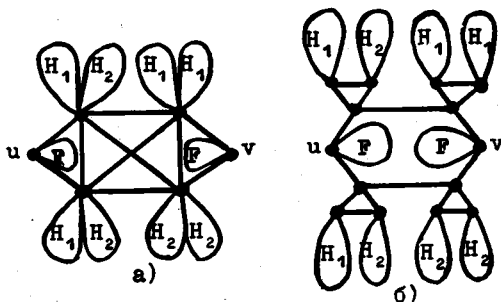


Рис.7

ство Q , и образуем из него графы G'_1 и G'_2 так, как были образованы графы G_1 и G_2 . Для графов G'_1 и G'_2 также будет справедлива лемма I. Тогда $k_1 = k_2 = (r-4)/2 = (4(m+1)-4)/2 = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т.е. степени вершин присоединения графов H_1 и H_2 будут четными и для построения графов H_1 , H_2 и F можем использовать описанный выше метод. Следовательно, для случая $r > 4$, r четно, п. "а" теоремы 2 доказан.

Докажем п. "б". Пусть $r = 4$. Описанный в п. "а" способ здесь применить нельзя, так как должно выполняться $k_1 = k_2 = 1$, но в графе число вершин с нечетными степенями должно быть четно. Все же и для этого случая можно применить построение H_1 и H_2 из п. "а", используя для образования регулярных графов G_1 и G_2 граф на рис.7,б. Легко заметить, что для графа на рис.7,б выполняется свойство Q и для графов G_1 и G_2 справедлива лемма I. Степени вершин присоединения графов H_1 и H_2 при этом будут четными.

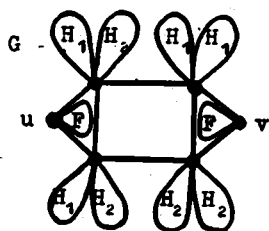


Рис. 8

Пункт "в". Пусть $r > 3$, r нечетно. Для нечетных значений доказательство во многом аналогично, поэтому ряд условий будет опущен; а некоторые утверждения будут сформулированы без доказательства. Рассмотрим граф G на рис. 8, для которого выполняется свойство Q , и образуем из него графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 9.

ЛЕММА 2. Графы G_1 и G_2 являются неизоморфными и $\tau(G_1) = \tau(G_2)$.

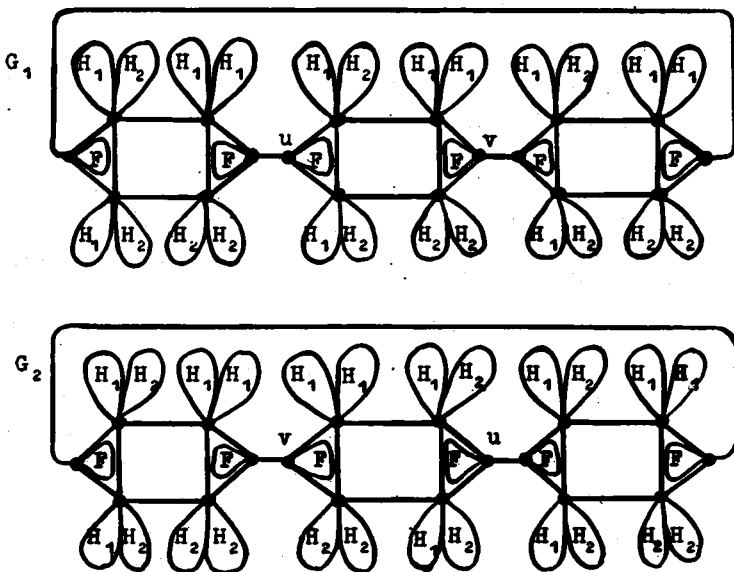


Рис. 9

Построим такие графы H_1 , H_2 и F , чтобы графы G_1 и G_2 стали регулярными степени r . Для степеней вершин присоединения графов H_1 , H_2 выполняется $k = (r-3)/2$, для графа F степень вершины присоединения равна $r-3$ и является четной. Значения k могут быть как четными, так и нечетными. Для четных значений k можно

воспользоваться процедурой построения графов H_1, H_2 и F из п. "а". Для нечетных значений k будем строить H_1 и H_2 следующим образом. Рассмотрим регулярные графы K_{r+1} и K_{r+3}^* , где K_{r+3}^* получен из графа K_{r+3} удалением ребер некоторого гамильтонова цикла. Выберем в графах K_{r+1} и K_{r+3}^* цепь, состоящую из вершин v_1, v_2, \dots, v_{r-1} . Такая цепь в графах существует, так как в K_{r+1} и K_{r+3}^* существует гамильтонов цикл. Удалим из графов ребра цепи v_1, v_2, \dots, v_{r-1} и соединим все вершины цепи с новой вершиной v . Далее вершины v_2, v_3, \dots, v_k, v соединим с другой новой вершиной u . В получившихся графах осталось $(r-3)-(k-1) = r-k-2$ вершин $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{r-2}$ степени $r-1$. Так как $r-k-2$ является четным, то, соединив пары этих вершин ребрами (v_{k+2i-1}, v_{k+2i}) , $i = 1, 2, \dots, (r-k-2)/2$, получим графы, в которых вершина u имеет степень k , а остальные вершины имеют степень r . Построенные графы возьмем в качестве графов H_1 и H_2 . Графы H_1 и H_2 имеют порядки $p(H_1) = r+3$, $p(H_2) = r+5$. Для случая нечетных r , $r > 3$, регулярные графы степени r с совпадающими матрицами слоев построены.

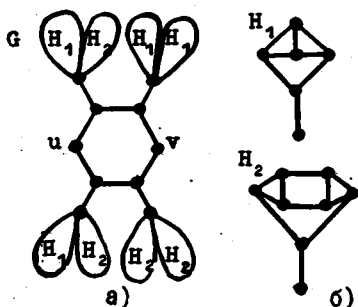


Рис. 10

Рассмотрим п. "г". Пусть $r = 3$. На рис. 10, а изображен граф G , обладающий свойством \mathcal{G} , который можно использовать для построения регулярных графов G_1 и G_2 . Допустимые графы H_1 и H_2 приведены на рис. 10, б.

Бесконечность пар неизоморфных регулярных графов степени r с совпадающими цепными матрицами слоев следует из того, что для образования графов G_1 и G_2 можно использовать не три, а любое количество копий

графов, представленных на рис. 5, 7, 8, 10. Теорема 2 полностью доказана.

Так как все регулярные графы степени r в доказательстве теоремы 2 построены конструктивно, то можно определить их порядки.

СЛЕДСТВИЕ. Существуют неизоморфные регулярные графы степени r порядка p с совпадающими цепными матрицами слоев, где

$$p \geq \begin{cases} 174 & \text{при } r = 3, \\ 183 & \text{при } r = 4, \\ 27r + 66 & \text{при } r = 4, r \text{ четно}, \\ 30r + 96 & \text{при } r = 4m+5, m = 0, 1, 2, \dots, \\ 30r + 72 & \text{при } r = 4m+3, m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из построений графов в доказательстве теоремы 2 следует, что их минимальный порядок $p(r)$ равен

1) если $r > 4$ и r четно, то $p(N_1) = p(F) = r+2$, $p(N_2) = r+4$ и $p(r) = 12(p(N_1) + p(N_2)) + 3p(F) - 12 = 27r + 66$,

2) если $r > 3$ и r нечетно, то при $r = 4m+5, m = 0, 1, 2, \dots$, $p(N_1) = p(F) = r+2$, $p(N_2) = r+4$, а при $r = 4m+3, m = 1, 2, 3, \dots$, $p(N_1) = r+3$, $p(N_2) = r+5$, $p(F) = r+2$, тогда

$$p(r) = 12(p(N_1) + p(N_2)) + 6p(F) - 12 = \begin{cases} 30r + 72 & \text{при } r = 4m+5, m = 0, 1, 2, \dots, \\ 30r + 96 & \text{при } r = 4m+3, m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

3) если $r = 3$, то $p(r) = 12(p(N_1) + p(N_2)) + 6 = 174$,

4) если $r = 4$, то $p(r) = 12(p(N_1) + p(N_2)) + 15 = 183$.

Порядок рассматриваемых графов можно в некоторых случаях еще понизить, если граф N_2 из доказательства теоремы 2 строить другим способом. Например, для четных значений r вместо графа K_{r+3}^* можно использовать другой регулярный граф степени r - K_{r+2}^* , полученный из K_{r+2} удалением $(r+2)/2$ попарно неинцидентных ребер. В этом случае $p(N_2) = r+3$ и $p(r) = 27r + 54$ при $r > 4$, r четно и $p(r) = 171$ при $r = 4$.

3. Изотопичность, структурная изотопичность и цепная матрица слоев графа. В [1] для изучения цепных свойств графов были предложены понятия изотопичности и структурной изотопичности графов. Изотопичные графы обладают таким свойством, что их можно отобразить друг на друга так, что характеристики цепей, соединяющих вершины графа, будут сохраняться.

Пусть графы G и H имеют одинаковый порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [1]. Граф H изотопичен из графа G , если для каждой вершины $v \in V(G)$ существует биективное отображение $\phi_v : V(G) \rightarrow V(H)$ такое, что для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется

$C_G(v,u) = C_H(\varphi_v(v), \varphi_v(u))$, где $C_G(u,v)$ есть цепное распределение между вершинами u и v в графе G .

Графы G и H называются изотопичными, если каждый изотопичен из другого. Изотопичность графов G и H будем обозначать $G \Leftrightarrow H$. Не для всякого графа существует изотопичный неизоморфный ему граф. Такими графами являются, например, полный граф K_p , цикл C_p порядка p . Множество всех графов разбивается на классы эквивалентности по отношению "быть изотопичным", а отображения φ_v определяют подстановки на множестве вершин графов из класса эквивалентности. Для деревьев понятие изотопичности равносильно понятию изометричности [7], так как в дереве любые две вершины соединены единственной цепью.

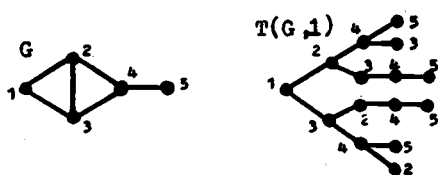


Рис. II

Под структурой цепей, выходящих из вершины $v \in V(G)$, будем понимать непомеченное корневое дерево $T(G,v)$ с корнем в вершине v . Дерево $T(G,v)$ является деревом обхода всех цепей графа, выходящих из вершин v . На рис. II при-

водится пример дерева $T(G,v)$, в котором для наглядности указаны номера вершин графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1]. Граф H структурно-изотопичен из графа G , если для каждой вершины $v \in V(G)$ существует вершина $u \in V(H)$ такая, что $T(G,v) \cong T(H,u)$.

Графы G и H называются структурно-изотопичными, если каждый структурно-изотопичен из другого. Структурная изотопичность графов G и H будет обозначаться $G \Leftrightarrow H$. Отношение, определяемое структурной изотопичностью, также является отношением эквивалентности на графах.

Рассмотрим множества графов D_T, D_I и D_{SI} . Элементами этих множеств являются пары графов (G,H) , $G \neq H$. Если $(G,H) \in D_T$ (или D_I, D_{SI}), то для графов G и H выполняется $\tau(G) = \tau(H)$ (или $G \Leftrightarrow H, G \Leftrightarrow H$). Ниже будут изучаться пересечения множеств D_T, D_I, D_{SI} , что соответствует нахождению графов, обладающих сочетаниями свойств изотопичности, структурной изотопичности и равенства цепной матрицы слов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. В классе деревьев выполняются $D_\tau \subset D_I$ и $D_{SI} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изотопичность деревьев эквивалентна их изометричности, и цепная матрица слоев дерева совпадает с матрицей слоев. В [7] показано, что для изометричности двух графов необходимым и достаточным условием является совпадение наборов попарно различных строк в их матрицах слоев. Следовательно, полное совпадение матриц слоев является частным случаем критерия изометричности, т.е. $D_\tau \subset D_I$. Для деревьев G и H на рис.12 выполняются $G \not\leftrightarrow H$ и $\tau(G) \neq \tau(H)$, так как $\tau(G) = \parallel 2 \cdot (1, 2, 5, 4); 4 \cdot (1, 1, 5, 5); (3, 5, 4); 2 \cdot (2, 5, 5); (1, 5, 6); (6, 6) \parallel$ и $\tau(H) = \parallel 4 \cdot (1, 2, 5, 4); 2 \cdot (1, 1, 5, 5); 2 \cdot (3, 5, 4); 2 \cdot (2, 5, 5); 2 \cdot (1, 5, 6); (6, 6) \parallel$. Если бы существовал элемент $(G, H) \in D_{SI}$, то из определения структурной изотопичности графов следовало бы $G \cong H$.

Далее строятся графы, принадлежащие только попарным пересечениям D_τ , D_I и D_{SI} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Множества D_τ и D_I не содержат друг друга, и существуют графы G, H такие, что $(G, H) \in (D_\tau \cap D_I) \setminus D_{SI}$.

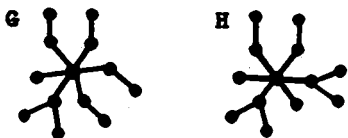
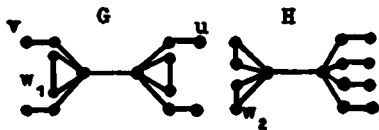


Рис.12

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 4 следует, что $D_\tau \cap D_I \neq \emptyset$ и $D_I \not\subset D_\tau$. Очевидно, что деревья (рис.4) не являются структурно-изотопичными. Для графов на рис.13, а выполняется $\tau(G) = \tau(H) = \parallel 4 \cdot (2, 5, 9, 10, 4); 4 \cdot (1, 1, 4, 7, 4); 4 \cdot (2, 4, 7, 4); 2 \cdot (5, 8, 4) \parallel$, но $G \not\leftrightarrow H$. Действительно, для вершины $v \in V(G)$ не существует соответствующего отображения Φ_v , так как в графе H не существует вершин v_1 и v_2 таких, что $C_G(u, v) = C_H(v_1, v_2)$, где $C_G(u, v) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$.



а)

$$\tau(G, w_1) \cong \tau(H, w_2)$$



б)

Рис.13

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Множества D_τ и D_{SI} не содержат друг друга, и существуют графы G, H такие, что $(G, H) \in (D_\tau \cap D_{SI}) \setminus D_I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для графов G и H на рис. 13,а выполняются $\tau(G) = \tau(H)$ и $G \leftrightarrow H$. На рис. 13,б приводится пример структуры цепей графа, выходящих из вершин $w_1 \in V(G)$ и $w_2 \in V(H)$. Все вершины степени один в графах G и H также имеют совпадающую структуру цепей и т.д. Из утверждения 4 следует, что $D_\tau \not\subseteq D_{SI}$. Для графов

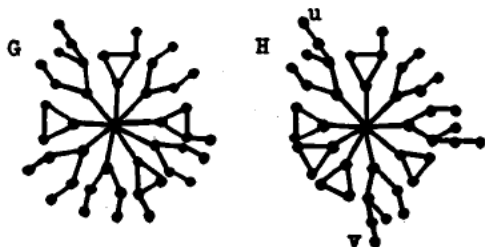


Рис.14

на рис. 14 выполняются $\tau(G) \neq \tau(H)$, $G \leftrightarrow H$ и $G \not\leftrightarrow H$. Действительно, несоответствие цепных матриц слоев следует из того, что в графе G имеются, например, 14 вершин степени один, а в графе H — только 12. То, что G и H не являются изотопичными графами, вытекает из существования в графе H вершин u и v таких, что $S_H(u,v) = (0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,\dots,0)$, так как в графе G пары вершин с таким цепным распределением не существует. Графы G и H по построению содержат одни и те же виды подграфов, но в разном количестве. Вершины графов G и H , выбранные из соответствующих изоморфных подграфов, будут обладать изоморфными деревьями цепей, что можно проверить непосредственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Множества D_{SI} и D_I не содержат друг друга, и существуют графы G, H такие, что $(G,H) \in (D_{SI} \cap D_I) \setminus D_\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 4 следует $D_I \not\subseteq D_{SI}$, а $D_{SI} \not\subseteq D_I$ следует из примера графов на рис. 13,а, для которых выполняются $G \not\leftrightarrow H$ и $G \leftrightarrow H$. Графы G и H на рис. 15 обладают свойствами $G \leftrightarrow H$, $G \leftrightarrow H$ и $\tau(G) \neq \tau(H)$. Действительно, $\tau(G) = \parallel 2 \cdot (2,5, 10, 21, 28, 14); 4 \cdot (2, 3, 6, 21, 32, 16); 10 \cdot (1, 1, 4, 8, 14, 14); 2 \cdot (1, 1, 2, 6, 16, 16); 10 \cdot (2, 4, 8, 14, 14); 2 \cdot (2, 2, 6, 16, 16); 3 \cdot (5, 9, 14, 14); 3 \cdot (3, 7, 16, 16); (6, 18, 18) \parallel$ и $\tau(H) =$

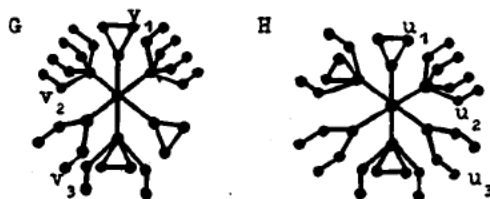


Рис.15

$= \parallel 4 \cdot (2, 5, 10, 21, 28, 14); 2 \cdot (2, 3, 6, 21, 32, 16); 8 \cdot (1, 1, 4, 8, 14, 14); 4 \cdot (1, 1, 2, 6, 16, 16); 8 \cdot (2, 4, 8, 14, 14); 4 \cdot (2, 2, 6, 16, 16); 3 \cdot (5, 9, 14, 14); 3 \cdot (3, 7, 16, 16); (16, 18, 18) \parallel$. Графы G и H построены из одинаковых видов подграфов таким образом, что вершины $v \in V(G)$ и $u \in V(H)$ для

установления $\tau(G, v) \cong \tau(H, u)$ или определения φ_v такого, что $u = \varphi_v(v)$, следует выбирать из изоморфных подграфов в графах G и H . Например, вершинам $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ на рис. 15 будут соответствовать вершины $u_1, u_2, u_3 \in V(H)$ и т.д.

Из полученных результатов следует, что всевозможные попарные пересечения множеств D_τ, D_I и D_{SI} не являются пустыми. Оказывается, пересечение всех указанных множеств также не является пустым.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Существуют графы G и H такие, что $(G, H) \in D_\tau \cap D_I \cap D_{SI}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для графов на рис. 16 выполняются $\tau(G) = \tau(H)$,

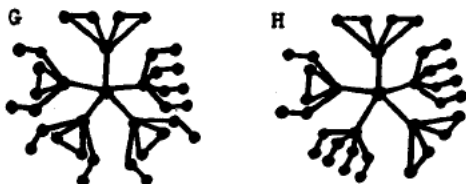


Рис. 16

$G \leftrightarrow H$ и $G \leftrightarrow H$. Имеем $\tau(G) = \tau(H) = \parallel 10 \cdot (2, 5, 9, 22, 32, 16); 10 \cdot (1, 1, 4, 7, 16, 16); 10 \cdot (2, 4, 7, 16, 16); 5 \cdot (5, 8, 16, 16); (5, 20, 20) \parallel$. Изотопичность и структурная изотопичность следуют из способа построения графов G, H и могут быть проверены

непосредственно. Соответствующие вершины в графах G и H следует выбирать из изоморфных подграфов. Утверждение 8 доказано.

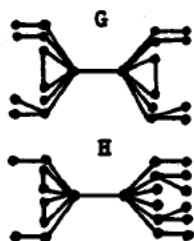


Рис. 17

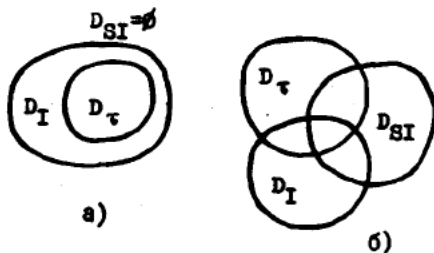


Рис. 18

Графы G и H на рис. 17 обладают свойствами $(G, H) \in D_\tau$ и $(G, H) \notin D_I \cup D_{SI}$. Множества D_τ, D_I и D_{SI} изображены в виде диаграмм на рис. 18, а для деревьев и на рис. 18, б — для произвольных графов. Из построения графов, лежащих в пересечениях этих множеств, следует, что всевозможные пересечения D_τ, D_I и D_{SI} являются бесконечными.

З а к л ю ч е н и е

В работе рассматривались графы с совпадающей цепной матрицей слоев. Показано, что существуют неизоморфные графы порядка p , $14 \leq p \leq 18$, с совпадающими цепными матрицами слоев. Для значений $p = 12, 13$ вопрос остается открытым. Решена проблема существования неизоморфных регулярных графов степени $r \geq 3$ с совпадающими цепными матрицами слоев. Построены графы, обладающие всевозможными сочетаниями свойств изотопичности, структурной изотопичности и равенства цепной матрицы слоев.

Л и т е р а т у р а

1. ДОБРЫНИН А.А., СКОРОБОГАТОВ В.А. Свойства цепей графов и изотопичность //Алгоритмический анализ структурной информации. -Новосибирск, 1985. - Вып. II2: Вычислительные системы. - С. 33-45.
2. QUINTAS L.V., SLATER P.J. Pairs of non-isomorphic graphs having the same Path Degree Sequence//MATCH.-1981.-№ 12.-P.75-86.
3. BLOOM G.S., KENNEDY J.W., QUINTAS L.V. Some problems concerning Distance and Path Degree Sequences// Graph Theory: Proc./Conference in Lagów, Poland, feb.1981.- Berlin a.o.:Springer.1983. - P.179-190. (Lecture Notes in Mathematics, 1018).
4. КАЦ А.О. Исследование системы векторов расстояний графа //Латв. мат. ежегодник. - Рига, 1976. - Т.20. - С. 170-179.
5. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои графов //Вопросы обработки информации при проектировании систем. - Новосибирск, 1977. - Вып. 69: Вычислительные системы. - С. 3-10.
6. RANDIĆ M. Characterizations of atoms, molecules, and classes of molecules based on path enumeration//MATCH.-1979.-№7.-P.5-64.
7. СКОРОБОГАТОВ В.А. Матрицы слоев и изометричность графов //Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы. - Новосибирск, 1978.-Вып.77: Вычислительные системы. - С. 20-24.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 февраля 1987 года