ВОПРОСЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 119

УДК 519.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАЦИИ МОДУЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Ю.Е. Бессонов

В настоящей работе рассматривается задача поиска пересечений (т.е. наибольших общих подграфов) двух геометрических графов*) и предлагается метод ее решения, основанный на выделении клик в модульном произведении геометрических графов, определенном с учетом расстояний между парами их вершин.

Пусть $G = (U, X)$ и $H = (V, Y)$ – геометрические графы с множествами вершин U и V и множествами ребер X и Y. Графы G и H назовем <u>конгруэнтными</u> (обозначение $G \sim H$), если существует движение пространства, при котором G и H совмещаются как геометрические фигуры. Под движением пространства понимается либо параллельный перенос, либо поворот относительно неподвижного центра, либо зеркальное отражение, либо комбинация каких-либо из перечисленных преобразований.

Таким образом, если геометрические графы G и H конгруэнтны, то они изоморфны как графы $(G \cong H)$, но обратное неверно.

Подграфом будем в дальнейшем считать порожденный подграф. Граф G <u>конгруэнтно входит</u> в H, если в H существует подграф H' такой, что $G \sim H'$. <u>Пересечением</u> графов G и H назовем максимальный по включению подграф в G, конгруэнтно входящий в H. Наибольшим назовем пересечение с наибольшим числом вершин (среди всех других пересечений).

Известный [1,2] метод поиска пересечений абстрактных графов G и H состоит в построении модульного произведения графов G и H и выделении в нем клик. Каждая клика определяет пересечение графов G и H.

---

*) Вершинами геометрического графа являются точки евклидова пространства, а ребрами – отрезки прямых, соединяющие эти точки.

В отличие от [I,2] для поиска пересечений геометрических графов определим модульное произведение как граф $L = (W,Z)$ с множеством вершин $W = U \times V$ и множеством ребер

$$Z = \{\{w,w'\} \mid w = (u_i,v_j),\ \ w' = (u_k,v_l),$$

$$u_i \neq u_k \ \&\ v_j \neq v_l \ \&\ (u_i \dot{-} u_k \ \&\ v_j \dot{-} v_l \vee u_i \not\dot{-} u_k \ \&\ v_j \not\dot{-} v_l) \ \&$$

$$\&\ d(u_i,u_k) = d(v_j,v_l)\},$$

где $d(u_i,u_k)$, $d(v_j,v_l)$ – расстояния между вершинами u_i и u_k в G, а также между v_l и v_j в H. Таким образом, отличие от обычного модульного произведения в [I,2] состоит в том, что при соответствиях пар вершин G и H, помимо сохранения отношений смежности, накладывается условие сохранения расстояний между вершинами.

Это частный случай обобщенного модульного произведения, определенного в [3].

Каждая клика в L определяет соответствие подмножества вершин в G подмножеству вершин в H, сохраняющее отношения смежности и расстояние между вершинами.

ПРИМЕР. Пусть G и H есть конгруэнтные треугольники на плоскости (рис.I,а). На рис.I,б изображен граф L. Клика $\{w_1,w_2,w_3\}$ определяет соответствие $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, при котором сохраняются расстояния и смежность между вершинами.

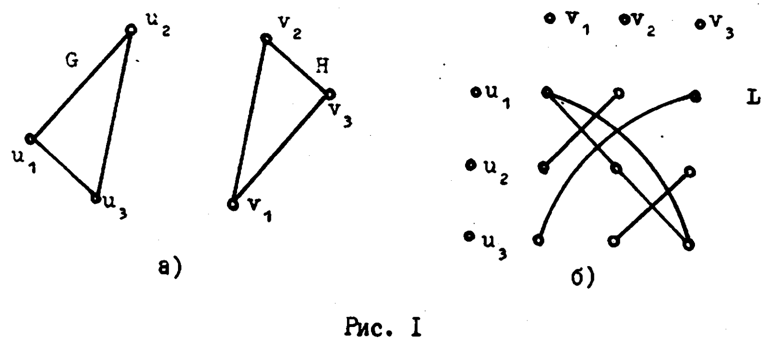

Рис. I

В геометрии есть теорема о том, что преобразование, сохраняющее расстояния между всеми точками, является движением пространства. Отсюда следует, что каждая клика в L определяет подграф в G, конгруэнтно входящий в H, т.е. пересечение графов G и H;

и обратно: каждому пересечению G и H соответствует некоторая клика в L.

Геометрический граф будем называть плоским, если всё его вершины располагаются в плоскости.

Далее мы приведем некоторые свойства графа L для случая плоских геометрических графов.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. В графе L общее ребро могут иметь не более двух клик.

Действительно, каждая клика определяет движение плоскости. Если какие-то клики имеют две общие вершины, то это значит, что имеются две неподвижные точки при соответствующих преобразованиях. Из геометрии известно, что если при движениях пространства две и более точек остаются неподвижными, то они лежат на одной прямой - оси, а все рассматриваемые движения являются поворотами вокруг этой оси. На плоскости можно сделать только один поворот вокруг оси - это будет зеркальным отражением, так как прямая делит плоскость на две части.

Утверждение I позволяет получить верхнюю оценку на число клик в графе L.

ТЕОРЕМА. Пусть q и n_k - соответственно число ребер и число клик порядка не менее k в графе L. Тогда справедливо неравенство

$$n_k \le \frac{4q}{k(k-1)}. \qquad (1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = \{C_1, C_2, \dots, C_{n_k}\}$ - множество всех клик порядка не менее k; все ребра графа L, принадлежащие кликам из K, занумерованы от I до q_1; A_j - множество ребер в клике C_j; m_i - число клик из K, содержащих i-е ребро, $i = \overline{1, q_1}$. Применяя известное комбинаторное тождество, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n_k} |A_j| = \sum_{i=1}^{q_1} m_i .$$

Поскольку $m_i \le 2$, $|A_j| \ge \frac{k(k-1)}{2}$, $q_1 \le q$, то (I) выполняется.

Полученная оценка показывает, что задача поиска пересечений графов, "труднорешаемая" в общем случае [4], для геометрических графов решается за полиномиальное время.

Учет особенностей графа L может быть положен в основу алгоритма поиска его клик, более эффективного по сравнению с общим случаем, благодаря следующим соображениям.

Полный подграф $K_3=\{(u_1,v_1),(u_2,v_2),(u_3,v_3)\}$ в L назовем базовым, если точки u_1, u_2 и u_3 (а значит, и v_1, v_2, v_3) не лежат на одной прямой. Рассмотрим некоторый базовый полный подграф в L, порожденный множеством $\{w_1, w_2, w_3\}$. Его содержит единственная клика графа L. (Это следует из того, что три неподвижные точки двух движений должны принадлежать одной прямой.) Таким образом, если две вершины w и w' смежны с w_1, w_2 и w_3, то они смежны между собой. Поэтому если найден базовый K_3, то клика, содержащая его, может быть выделена за $O(p)$ операций, где p – число вершин графа L. Для этого достаточно выделить пересечение окружений вершин w_1, w_2 и w_3. Отметим, что алгоритмы поиска клик, рассчитанные на общий случай, требуют по меньшей мере $O(p^2)$ операций на выделение одной клики.

Рассмотрим теперь модификации определения операции модульного произведения геометрических графов. Сначала определим модульное произведение, позволяющее выделять пересечения геометрических графов, получаемые только параллельными сдвигами плоскости.

Пусть $x(u_i), x(v_j)$ – абсциссы, а $y(u_i), y(v_j)$ – ординаты вершин $u_i \in U$, $i=\overline{1,p_G}$ и $v_j \in V$, $j=\overline{1,p_H}$ в некоторой системе координат. Преобразование параллельного сдвига, переводящее u_i в v_j, запишется следующим образом:

$$x(v_j) = x(u_i) + a,$$
$$y(v_j) = y(u_i) + b,$$

где a и b – некоторые константы.

Поэтому для преобразования, переводящего пару вершин $(u_i,u_k) \in U \times U$ в пару $(v_j,v_l) \in V \times V$, будут выполняться условия:

$$x(u_i) - x(u_k) = x(v_j) - x(v_l),$$
$$y(u_i) - y(u_k) = y(v_j) - y(v_l).$$

Определим в соответствии с этим условие смежности вершин (u_i, v_j) и (u_k, v_l) в модульном произведении следующим образом:

$$(u_i,v_j) \dot{-} (u_k,v_l) \Leftrightarrow u_i \neq u_k \;\&\; v_j \neq v_l \;\&\; (u_i \dot{-} u_k \;\&$$
$$\& \; v_j \dot{-} v_l \vee u_i \not\dot{-} u_k \;\&\; v_j \not\dot{-} v_l) \;\&\; (x(u_i)-x(u_k) = x(v_j)-x(v_l)) \;\&$$
$$\& \; (y(u_i) - y(u_k) = y(v_j) - y(v_l)).$$

Обозначим определенный таким образом граф через $L_{||}$. Для графов G и H (рис.2,а) граф $L_{||}$ (рис.2,б) состоит из двух не связанных между собой подграфов K_3 и девяти изолированных вершин.

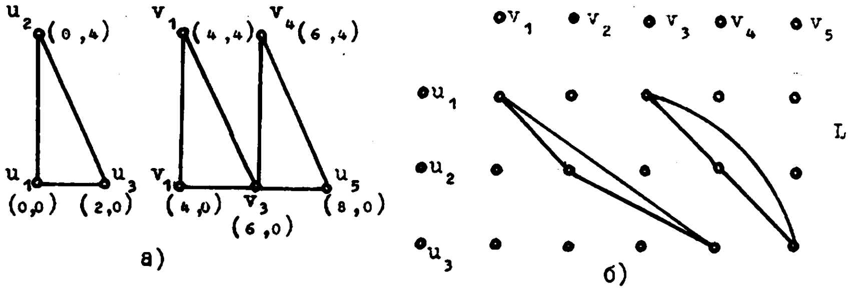

Рис. 2

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Клики графа $L_{||}$ не имеют общих вершин.

Справедливость утверждения 2 следует из того факта, что при параллельных сдвигах пространства отсутствуют неподвижные точки.

В силу утверждения 2 число клик графа $L_{||}$ не превосходит количества его вершин, т.е. $p_G \cdot p_H$. Поскольку для поиска максимальной клики в $L_{||}$ достаточно найти вершину максимальной степени и выделить ее окружение, то число операций, необходимых для этого, будет ограничено величиной $O(p_G \cdot p_H)$.

При этом нет необходимости сначала строить $L_{||}$, а затем искать его клики. Все клики графа $L_{||}$ или максимальная клика могут быть выделены в процессе его построения, и этим будет достигнута экономия объема оперативной памяти.

Рассмотрим теперь другую модификацию определения модульного произведения геометрических графов. В реальных условиях, при решении практических задач, координаты вершин могут быть заданы только с некоторым приближением. Пусть $\varepsilon/2 > 0$ – абсолютная погрешность задания координат вершин графов G и H. Тогда расстояния между парами вершин определяются с точностью до ε. Определим смежность вершин (u_i,v_j) и (u_k,v_l) модульного произведения, исходя из условия совпадения расстояний между парами u_i, u_k и v_j, v_l с точностью до ε: $(u_i,v_j) \dot{-} (u_k,v_l) \Leftrightarrow u_i \neq u_k \;\&\; v_j \neq v_l \;\&$
$\& \; (u_i \dot{-} u_k \;\&\; v_j \dot{-} v_l \vee u_i \not\dot{-} u_k \;\&\; v_j \not\dot{-} v_l) \;\&\; |d(u_i,u_k) - d(v_j,v_l)| < \varepsilon$.

Определенный таким образом граф обозначим через L_ε. Ясно, что при достаточно большом ε учет расстояний между парами вершин геометрических графов не будет играть роли. В частности, если ε таково, что всегда $|d(u_i,u_k)-d(v_j,v_l)|<\varepsilon$, то граф L_ε превращается в обычное модульное произведение.

Будем считать, что погрешность задания координат вершин графов G и H является допустимой, если выполняются неравенства:

$$\min_{\substack{1\le i<k\le p_G\\ 1\le r<s\le p_G\\ k\ne s}} |d(u_i,u_k)-d(u_r,u_s)|>2\varepsilon,$$

$$\min_{\substack{1\le j<l\le p_H\\ 1\le m<n\le p_H\\ l\ne n}} |d(v_j,v_l)-d(v_m,v_n)|>2\varepsilon.$$

Смысл этих требований состоит в том, чтобы при малых смещениях положений вершин графов G и H различные расстояния между парами вершин оставались различными.

Если ε допустимо, то для графа L_ε будет справедлива оценка (I).

Модульное произведение, отражающее только параллельные сдвиги пространства, можно также определить с учетом погрешности задания координат вершин.

Результаты настоящей работы могут применяться для распознавания специальных классов изображений, определения общих фрагментов химических структур и в других прикладных задачах.

Литература

I. ВИЗИНГ В.Г. Сведение проблемы изоморфизма и изоморфного вхождения к задаче нахождения неплотности графа //Ш Всесоюз. конф. по пробл. теорет. киберн., Новосибирск, 1974 г.: Тез. докл. - Новосибирск, 1974. - С.124.

2. LEVI G. A note on the derivation of maximal common subgraphs of two directed or undirected graphs//Calcolo.-1972.-N 9. p. 341-342.

3. БЕССОНОВ Ю.Е., СКОРОБОГАТОВ В.А. Обобщенные модульные произведения и структурное подобие графов //Алгоритмический анализ структурной информации. - Новосибирск, 1985. - Вып. 112: Вычислительные системы. - С.23-32.

4. ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 367 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
II февраля 1987 года