ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 120

УДК 510.51

СЕМЕЙСТВО РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ С КОНЕЧНЫМИ КЛАССАМИ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОДНОЗНАЧНЫХ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

Ю.Г. Венцов

Проблема существования конструктивизируемой модели без вычислимых последовательностей неэквивалентных конструктивизаций,но бесконечной алгоритмической размерности ($\dim_A \mathfrak{M} = \infty$) поставлена С.С. Гончаровым (см. [I , вопрос 34]. На основе метода конструирования семейств р.п.множеств из [3] предложена приоритетная конструкция с бесконечными нарушениями для построения семейства рекурсивно-перечислимых множеств (р.п.м.) без бесконечных вычислимых последовательностей попарно неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций (о.в.н.) (но с бесконечным числом неэквивалентных о.в.н.). Этот результат составляет содержание основной теоремы. Далее, применяя функтор F_S из категории Un_S о.в.н. семейства S в подкатегорию $K^\sigma(\mathfrak{M}_S)$ категории K^σ моделей некоторой ограниченной сигнатуры [2], устанавливаем существование конструктивизируемой модели бесконечной алгоритмической размерности без вычислимых бесконечных последовательностей неэквивалентных конструктивизаций.

Далее используется терминология и обозначения из [4]. Напомним, что если S - семейство р.п.м., а N - множество натуральных чисел, то нумерация ν: $N \to S$ называется вычислимой, если множество $\{\langle n,m\rangle \mid n \in \nu(m)\}$ рекурсивно-перечислимо, и однозначной,если $\nu(n) \neq \nu(m)$ для любых $n \neq m$. Для каждой вычислимой нумерации ν семейства р.п.м. S существует частично-рекурсивная функция (ч.р.ф.) $\lambda n\lambda x f(n,x)$ такая, что $\nu(n) = \{f(n,x) \mid x \in N\}$.Пусть K^2 и K^3 - клиниевские универсальные функции соответственно для семейств одно- и двуместных ч.р.ф. Пусть c, l, r - канторовские функции, нумерующие пары чисел. Значение частично-рекурсивной функции $f(x_0,\ldots, x_n)$, вычислимое меньше, чем за t шагов, обозначим через $f_t(x_0,\ldots, x_n)$.

Определим

$$\gamma_j(n) = \{ K^3(j,n,x) \mid x \in N\},$$

$$\gamma_j^t(n) = \{ K_t^3(j,n,x) \mid x \le t \}.$$

Для любой вычислимой нумерации ν некоторого семейства S рекурсивно-перечислимых множеств существует j такое, что $\nu = \gamma_j$. Через K_n обозначим вычислимый класс $\{\gamma_j \mid j \in W_n\}$ нумераций, в котором индексы j являются элементами р.п.м. W_n с постовским номером n .

Принадлежность нумерации γ_j вычислимому классу K_n указывается записью $\gamma_{n,j}$. Аналогично определим K_n^t как множество $\{\gamma_j^t \mid j \in W_n\}$.

Нумерация ν сводится к нумерации μ $(\nu \le \mu)$, если существует общерекурсивная функция (о.р.ф.) f такая, что $\nu(n) = \mu \circ f(n)$. Нумерации ν и μ называются эквивалентными, если $\nu \le \mu$ и $\mu \le \nu$.

ТЕОРЕМА 1. С у щ е с т в у е т в ы ч и с л и м о е с е м е й с т в о S р е к у р с и в н о-п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в, и м е ю щ е е б е с к о н е ч н о м н о г о н е э к в и в а л е н т н ы х о д н о з н а ч н ы х в ы ч и с л и м ы х н у м е р а ц и й, н о н е и м е ю щ е е б е с к о н е ч н ы х в ы ч и с л и м ы х к л а с с о в н е э к в и в а л е н т н ы х о д н о з н а ч н ы х в ы ч и с л и м ы х н у м е р а ц и й.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить искомое семейство S методом приоритета одновременно с построением для каждого натурального $k \ge 1$ множества $\{\mu_{1,k};\mu_{2,k};\ldots;\mu_{k,k}\}$ попарно неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций семейства S . На шаге t построения определим конечные подмножества $\mu_{i,k}^t(n)$ множеств из S так, чтобы выполнялись равенства $\{\bigcup_{t\ge 0} \mu_{i,k}^t(n) \mid n \in N\} = S$ и $\mu_{i,k}(n) = \bigcup_{t\ge 0} \mu_{i,k}^t(n)$ для всех $k \in N$ и $i \le k$. На шаге t будем также определять вспомогательные функции $\varphi^t[\mu_{i,k};\mu_{j,l}]: N \to N$, которые устанавливают эквивалентность нумераций $\mu^t_{i,k}$ и $\mu^t_{j,l}$, а функции

$$\varphi[\mu_{i,k};\ \mu_{j,l}] = \varliminf_{t\to\infty} \varphi^t[\mu_{i,k};\ \mu_{j,l}]$$

определяют сводимость нумераций $\mu_{i,k}$ и $\mu_{j,l}$. Значение $k^t(n, \mu_{i,k})$ указывает число попыток к шагу t нарушить сводимость нумерации $\mu_{i,k}$ к нумерациям $\mu_{j,k}$, $j \le k$, $j \ne i$, посредством функции $\lambda x K(n,x)$. Частичная функция $[\mu_{i,k}]^t_{j,l}$ будет сводить на шаге t нумерацию $\mu_{i,k}$ к нумерации $\gamma_{j,k}$ в l-й попытке. Значения $\Delta^i(\mu_{l,k}, n)$ и $\pi^i(\mu_{l,k}, n)$ указывают $\mu_{l,k}$-номера, на которых мы хотим нарушить сводимость $\mu_{l,k}$ к $\mu_{j,k}$, $j \le k$, $j \ne l$, посредством функции $\lambda x K(n,x)$ в i-й попытке.

Далее $\mu_{i,k}$ будем обозначать через $\varkappa$, возможно, с индексами. Функция $\lambda t s^t_\varkappa(k,j,i)$ стопорящая при сведении нумераций из класса $\{\mu_{i,k} \mid i \le k\}$ к нумерации $\gamma_{j,k}$ в i-й попытке при сохранении соответствующих условий для нумерации $\varkappa$, а $\lambda t d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k,j,i)$ задает значение в нумерации $\varkappa$, которое соответствует множеству с номером $s^t_{\varkappa'}(k,j,i)$ в нумерации $\varkappa'$. Функции $\lambda t r^t_\varkappa(k,j,i)$ и $\lambda t l^t_\varkappa(k,j,i)$ задают "соседние" значения. Множество $\Pi^i_{\mu_{l,k},n}(i)$ накапливает попытки сведения нумераций $\varkappa$ к соответствующим нумерациям γ , которые препятствуют нарушению сводимости $\mu_{l,k}$ к нумерациям из $\{\mu_{j,k}$, $j \ne l\}$ посредством функции $\lambda x K(n,x)$ в i-й попытке. Функция $p(t, \varkappa, k, j, i)$ определяет зацикливание в построении стопорящей функции, а функция $\lambda t D[\varkappa]^t_{j,i}$ определяет счетчик для функции $[\varkappa]^t_{j,i}$.

Далее используются метки нескольких типов. Метка $[k,j,i]$ соответствует i-й попытке свести нумерацию из $\{\mu_{i,k} \mid i \le k\}$ к нумерации $\gamma_{j,k}$. Метка $\langle \mu_{l,k}, n, i\rangle$ соответствует i-й попытке нарушить сводимость $\mu_{l,k}$ к любой нумерации из $\{\mu_{i,k}, i \le k,\ i \ne l\}$ посредством функции $\lambda x K(n,x)$. Метка $[+]$ ставится на метку $\langle \mu_{l,k}, n, i\rangle$ и на метку $\langle \mu_{l,k}, n\rangle$, если нарушилась сводимость $\mu_{l,k}$ к $\{\mu_{i,k}$, $i \ne l, i \le k\}$ посредством функции $\lambda x K(n,x)$ в i-й попытке. Метка $[\varkappa]$, стоящая на $[k,j,i]$, указывает на то, что рассматривается i-я попытка свести нумерацию $\varkappa$ к $\gamma_{j,k}$. Метка $[-]$ ставится на $[k,j,i]^{[\varkappa]}$, если i-я попытка свести $[\varkappa]$ к $\gamma_{j,k}$, $j \le k+1$, неудачна, и мы к ней больше не возвращаемся Метка $z_{j,k}$ на четверке $\langle \varkappa, l, l_1, l_2 \rangle$ указывает на неоднозначность нумерации $\gamma_{j,k}$ семейства S.

Обозначим через $M^t_{\varkappa}(k,j,i)$ множество

$$\{l^t_{\varkappa}(k,j,i),\ s^t_{\varkappa}(k,j,i),\ r^t_{\varkappa}(k,j,i),\ d^t_{\varkappa,\varkappa''}(k,j,i)\}.$$

Для каждой нумерации $\mu_{l,k}$ через $|\mu_{l,k}|$ обозначим число $p_l\ p_k$, где p_i - i-е простое число. Будем говорить, что функция $[\mu_{l,k}]^t_{j,i}$ вполне определена на n, если $n \in \delta[\mu_{l,k}]^t_{j,i}$ и

$$\mu^t_{l,k}(n) \subseteq \gamma^{t+1}_{j,k}([\mu_{l,k}]^t_{j,i}(n))$$

либо

$$n \in \bigcup_{t' \le t} M^{t'}_{\mu_{l,k}}(k',j',i') \cup \bigcup_{i' \le k^t(\varkappa,p)} \{\Delta^{i'}(\varkappa,p), \pi^{i'}(\varkappa,p)\}$$

для $[k',j',i'] \underset{\text{lex}}{\le} [k,j,i]$, $p \le t$, и что функция $[\mu_{l,k}]^t_{j,i}$ вполне определена на множестве $D \subseteq N$, если она вполне определена на каждом элементе множества D. Под $\langle \varkappa, m, i \rangle$-списком на шаге t для $i \le k^t(\varkappa,m)$ будем понимать линейно-упорядоченное множество

$$\mathbf{L}^t_{\varkappa,m,i} = \langle L^t_{\varkappa,m,i}, \preccurlyeq \rangle,$$

где

$$L^t_{\varkappa,m,i} = \{\Delta^i(\varkappa,m),\ \pi^i(\varkappa,m)\} \cup \{l^t_{\varkappa}(k,j,i),$$
$$s^t_{\varkappa}(k,j,i),\ r^t_{\varkappa}(k,j,i) \mid [k',j',i'] \in \Pi^i_{\varkappa,m}(t)\},$$

а порядок $\preccurlyeq$ на $L^t_{\varkappa,m,i}$ определим, полагая

$$l^t_{\varkappa}(k',j',i') \preccurlyeq s^t_{\varkappa}(k',j',i') \preccurlyeq r^t_{\varkappa}(k',j',i') \preccurlyeq \Delta^i(\varkappa,m) \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \pi^i(\varkappa,m) \preccurlyeq l^t_{\varkappa}(k'',j'',i'') \preccurlyeq s^t_{\varkappa}(k'',j'',i'') \preccurlyeq r^t_{\varkappa}(k'',j'',i''),$$

если на $[k',j',i']$ стоит $[\varkappa']$ и $\varkappa' \notin N_{\varkappa}$, а на $[k'',j'',i'']$ стоит $[\varkappa'']$ и $\varkappa'' \in N_{\varkappa}$, и полагая $f^t_{\varkappa}(k',j',i') \preccurlyeq g^t_{\varkappa}(k'',j'',i'')$ для $f, g \in \{l, s, r\}$ при $[\langle k',j' \rangle, i'] \underset{\text{lex}}{\le} [\langle k'',j'' \rangle, i'']$ в случае, когда для $[k',j',i']^{[\varkappa']}$ и $[k'',j'',i'']^{[\varkappa'']}$ нумерации $\varkappa'$ и $\varkappa''$ не принадлежат $N_\varkappa$, и при $[\langle k'',j''\rangle, i'] \underset{lex}{\leq} [\langle k',j'\rangle, i']$ – в противном случае.

Под $\langle \varkappa, m, i, j', i'\rangle$-списком на шаге t будем понимать подмодель $\mathbb{L}^t_{\langle \varkappa, m, i, j', i'\rangle}$ модели $\mathbb{L}^t_{\langle \varkappa, m, i\rangle}$, основное множество которой состоит из элементов x множества $L^t_{\langle \varkappa, m, i\rangle}$ таких, что $x = \Delta^i(\varkappa, m)$ или $x = \pi^i(\varkappa, m)$, или $x \in M^t_\varkappa(k'',j'',i'')$, где $[k'',j'',i''] \in$ $\in \Pi^i_{\varkappa,m}(t)$ и $[k',j',i'] \underset{lex}{\leq} [k'',j'',i'']$.

В процессе построения будем стремиться к тому, чтобы $\mathbb{L}^t_{\langle \varkappa, m, i\rangle} = \varphi^t(\varkappa_0, \varkappa)\, \mathbb{L}^t_{\langle \varkappa_0, m, i\rangle}$. Будем говорить, что оставляем на шаге $t+1$ без изменений объект $B(t)$, используемый в построении, если полагаем $B(t+1) = B(t)$.

Через δf будем обозначать область определения функции f, а через ρf – область значений f. Будем говорить, что $\varkappa$-номер n используется в конструкции на шаге t, если

$$\varkappa^{t-1}(n) \neq \varkappa^t(n) \vee n \in \delta[\varkappa]^t_{j,i} \cup D[\varkappa]^t_{j,i} \cup$$

$$\cup\{\Delta^i(\varkappa, m) \mid m \in N,\ i \leq k^t(\varkappa, m)\} \cup$$

$$\cup\{\pi^i(\varkappa, m) \mid m \in N,\ i \leq k^t(\varkappa, m)\} \cup M^t_\varkappa(k,j,i)$$

для некоторых $k,j,i \in N$.

Метка $\langle \varkappa, m, i\rangle$ используется на шаге t, если для этой метки проводится конструкция шага типа $5t+2$ (соответствующая случаям 2 или 3, см.с.118) или $5t+1$. Метка $[k,j,i]$ используется на шаге t, если она добавляется или извлекается из некоторого множества $\Pi^{i'}_{\varkappa,m}(t)$ либо для этой метки проводится конструкция шагов типа $5t+2$, $5t+3$, $5t+4$ и $5t+5$, либо на $[k,j,i]$ ставится метка $[-]$. Скажем, что метка $[k,j,i]$ определена на шаге t, если для некоторой $\varkappa$ значение $s^t_\varkappa(k,j,i)$ определено.

Перед тем как перейти к изложению конструкции, укажем неформальную идею построения искомого семейства.

Чтобы построить нужное нам семейство S и класс его нумераций $\bigcup_{k \in N} \{\mu_{i,k} \mid i \leq k\}$, необходимо удовлетворить следующие требования:

I) для каждого $k \geq 1$ все нумерации из $\{\mu_{i,k} | i \leq k\}$ однозначно нумеруют одно и то же семейство S ;

2) для каждого $k \geq 1$ все нумерации из $\{\mu_{i,k} | i \leq k\}$ попарно неэквивалентны друг другу;

3) для любого вычислимого класса K_n однозначных вычислимых нумераций семейства S, имеющего по крайней мере $k+1$ элемент, и любой нумерации $\gamma_{j,k}$ из $\{\gamma_{0,k};\gamma_{1,k};\ldots;\gamma_{k,k}\}$ одна нумерация $\varkappa$ из $\{\mu_{i,k} | i \leq k\}$ сводится к $\gamma_{j,k}$.

Заметим, что выполнение требований 2 и 3 обеспечивает эквивалентность по крайней мере двух однозначных вычислимых нумераций из $\{\gamma_{0,k},\gamma_{1,k},\ldots,\gamma_{k,k}\}$. Одновременное выполнение этих трех требований обеспечивается установлением приоритета между ними. Для удовлетворения требования I достаточно положить $\varkappa(n) = \{2n\}$ для всех $\varkappa$. Требование 2 выполняется, если для любого $k \geq 1$, для любой $\varkappa \in N_k$, где $N_k = \{\mu_{i,k} | i \leq k\}$, и любой функции $\lambda x K(n,x)$ в процессе построения будет выделена пара $\Delta(\varkappa,n)$, $\pi(\varkappa,n)$, на которой будем добиваться, чтобы $\lambda x K(n,x)$ не сводила $\varkappa$ к нумерациям из $N_k \setminus \{\varkappa\}$. Для этого достаточно дождаться, чтобы значения $K(n,\Delta(\varkappa,n))$ и $K(n,\pi(\varkappa,n))$ определились. После этого если $K(n,\Delta(\varkappa,n)) \neq \Delta(\varkappa,n)$ или $K(n,\pi(\varkappa,n)) \neq \pi(\varkappa,n)$, то функция, как легко заметить, уже не будет сводящей. Если же $K(n,\Delta(\varkappa,n)) = \Delta(\varkappa,n)$ и $K(n,\pi(\varkappa,n)) = \pi(\varkappa,n)$ и при этом мы заботимся, чтобы для $[\varkappa]^t_{j,i}$ не нарушалось условие сводимости: $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(l)) \geq \varkappa^t(l)$ для всех $t' \geq t$, где $\gamma^{t'}_{k,j}(s)$ – конечная часть множества $\gamma_{k,j}(s)$, вычисленная к шагу t в точках l из множества $\{a_1,\ldots,a_n\}$, включающего точки $\Delta(\varkappa,n)$ и $\pi(\varkappa,n)$, либо нарушалась на всех этих точках одновременно, выбираем новые, еще не использованные в конструкции числа $\delta_1,\ldots,\delta_n$. Теперь можно определить $\varphi^{t+1}(\varkappa,\varkappa')(a_i) = \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(a_{i+1})$ для всех $\varkappa' \in N_k \setminus \{\varkappa\}$ и положить

$$\varkappa^{t+1}(a_i) = (\varkappa')^{t+1}(\varphi^t(\varkappa,\varkappa')(a_{i+1})) = \varkappa^t(a_i) \cup \varkappa^t(a_{i+1}) \cup \{\delta_i\}$$

и

$$\varphi^{t+1}(\varkappa,\varkappa')(a_n) = \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(a_0),$$

$$\varkappa^{t+1}(a_n) = (\varkappa')^{t+1}(\varphi^t(\varkappa,\varkappa')(a_0)).$$

После такой перестановки нумерация $\varkappa$ уже не сводится к нумерациям из $N_k \setminus \{\varkappa\}$ посредством функции $\lambda x K(n,x)$. В качестве $\{a_1, \dots, a_n\}$ в нашей конструкции всегда выбираются элементы $\mathfrak{L}^t_{\varkappa,n,i}$ при соответствующем i .

Основная идея конструкции состоит в выборе для каждого строящегося сведения $[\varkappa]_{j,i}$ некоторой стопорящей функции $s_\varkappa(k,j,i)$ такой, что любое нарушение условия сводимости $\varkappa$ к $\gamma_{k,j}$ посредством функции $[\varkappa]_{j,i}$ обязательно имеет место и на стопорящем значении $s^t_\varkappa(k,j,i)$, а $a = [\varkappa]_{j,i}(s^t_\varkappa(k,j,i))$ не изменяется с изменением t (т.е. определяет один и тот же номер в нумерации $\gamma_{k,j}$). Если в этом случае $s^t_\varkappa(k,j,i)$ принимает бесконечно много значений, причем не возвращаясь к предыдущим, то в результате мы построим в нумерации $\gamma_{k,j}$ множество $\gamma_{k,j}(a)$, которое является предельным для построенного семейства $S = \{\varkappa(n) \mid n \in N\}$, но не лежит в нем. Таким образом, бесконечно часто встречающееся нарушение условия сводимости $\varkappa$ к $\gamma_{k,j}$ посредством $[\varkappa]_{j,i}$ будет гарантировать то, что $\gamma_{k,j}$ нумерует другое семейство множеств.

Мы строим множества на шаге t так, чтобы $\varkappa^t(m) \nsubseteq \bigcup_{i \neq m} \varkappa^t(i)$.

Возвращаясь к тому месту, где мы описывали "перемешивание" нумераций из N_k на множестве $\{a_1, \dots, a_n\}$, заметим,что если $\gamma_{k,j}$ нумерует то же семейство, что и $\varkappa$, то существует шаг $t' > t$ такой, что

$$\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]^{t'}_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^{t+1}(l)$$

либо

$$\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]^{t'}_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^{t+1}(l^*),$$

где

$$l^* = a_{i-1} \vee l^* = a_{i+1}, \quad l = a_i \ .$$

Это происходит из-за того, что кусок $\varkappa^t(l)$ содержится лишь в $\varkappa^{t+1}(l)$ и $\varkappa^{t+1}(l^*)$, а $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^t(l)$ следует из условия сводимости. Но в этом случае, если найдутся s и p такие, что $s \neq p$ и $\gamma^{t'}_{k,j}(s) \supseteq \varkappa^{t+1}(l)$ и $\gamma^{t''}_{k,j}(p) \supseteq \varkappa^{t+1}(l)$, то,не меняя больше $\varkappa^{t+1}(l)$, получим, что $\gamma_{k,j}$ либо не нумерует то же семейство, что и $\varkappa$, либо не однозначна и в этом случае о сводимости к ней беспокоиться не нужно. Если же $\gamma_{k,j}$ – однозначная нумерация и именно того же семейства, то либо для всех l выполнится $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^{t+1}(l)$ для подходящего t', либо для всех l выполнится $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^{t+1}(l^*)$, но в таком случае сводимость нарушена либо во всех точках a_i, $1 \le i \le n$, либо не нарушена нигде. Если $[\varkappa]_{j,i}(l)$ определена на начальном отрезке $a_1,\dots a_n$, то из того, что для некоторого $l \in \{a_1,\dots,a_n\}$ выполнено $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(l)) \supseteq \varkappa^{t+1}(l^*)$, т.е. сводимость нарушена, следует, что для всех a_i таких, что $i < i_0$, где $a_{i_0} = l$, также выполнено $\gamma^{t'}_{k,j}([\varkappa]_{j,i}(a_i)) \supseteq \varkappa^{t+1}(a_i^*)$, т.е. сводимость нарушена и на всех предшествующих l элементах списка $a_1,\dots,a_n$.

В конструкции будем использовать шаги пяти типов. На шагах типа $5t+1$ предпримем попытки нарушить сводимость $\mu_{i,k}$ к нумерациям из $N_k \setminus \{\mu_{i,k}\}$ посредством функции $\lambda x K(n,x)$. На шагах типа $5t+2$ определим сведение $\mu_{i,k}$ к $\gamma_{j,k}$ в точках, на которых нарушается сводимость. На шагах типа $5t+3$ определим счетчик $D[\varkappa]^t_{j,i}$, а на $5t+4$ доопределим $[\varkappa]^t_{j,i}$ на элементах из $D[\varkappa]^t_{j,i}$. На шагах типа $5t+5$ рассмотрим 0-ю попытку сведения $\mu_{1,k}$ к $\gamma_{t,k}$.

Опишем теперь конструкцию формально.

ШАГ 0.

$$\mu^0_{1,k}(n) = \{2n\},\ \varphi^0(\varkappa,\varkappa') = id,$$

$$\Delta^0(\varkappa, m) = 4m|\varkappa|,\quad \pi^0(\varkappa,m) = 4m|\varkappa| + 1,\quad k^0(\varkappa,m) - 0,$$

$$\Pi^0_{\varkappa,m} = \emptyset,\quad r^0_\varkappa(k,0,0) = 2p_k,\quad s^0_\varkappa(k,0,0) = 6p_k,$$

$$l^0_\varkappa(k,0,0) = 10p_k.$$

Все значения функции p положим равными 0.

ШАГ $5t+1$. $T = 5t$. Проверим существуют ли $|\varkappa|, n \le T$ такие, что $\langle\varkappa,n\rangle$ не отмечено $[+]$ и выполнен один из следующих случаев.

<u>Случай I</u>. Функция $\lambda x K_T(n,x)$ определена на $\Delta^k(\varkappa,n)$ и $\pi^k(\varkappa,n)$ и $K(n,\Delta^k(\varkappa,n)) = \Delta^k(\varkappa,n)$, $K(n,\pi^k(\varkappa,n)) = \pi^k(\varkappa,n)$, $\Pi^k_{\varkappa,n}(T) = \emptyset$ и ни $\Delta^k(\varkappa,n)$, ни $\pi^k(\varkappa,n)$ не принадлежат $D[\varkappa']^T_{j,i}$ для $\langle k',j\rangle < n$, если на $[k',j,i]^{[\varkappa']}$ нет $[-]$, и не являются второй координатой в четверке, отмеченной $z_{k',j'}$, где $\langle k',j'\rangle < n$ и $k = k^T(\varkappa,n)$.

Случай 2. Функция $\lambda x K_T(n,x)$ определена на $\Delta^k(\varkappa,n)$: $\pi^k(\varkappa,n)$ и $K(n,\Delta^k(\varkappa,n)) \neq \Delta^k(\varkappa,n)$ либо $K(n,\pi^k(\varkappa,n)) \neq \pi^k(\varkappa,n)$, где $k = k^T(\varkappa,n)$.

Случай 3. Условия предыдущих случаев не выполнены, но существует $i \le k^T(\varkappa,n)$ такое, что $\lambda x K_T(n,x)$ определена на $\{\Delta^i(\varkappa,n), \pi^i(\varkappa,n)\}$,

$$\Pi^i_{\varkappa,n}(T) = \{[k_0,j_0,i_0]^{[\varkappa_0]}, [k_1,j_1,i_1]^{[\varkappa_1]}, \dots, [k_l,j_l,i_l]^{[\varkappa_l]}\},$$

где $\langle k_0,j_0\rangle < \langle k_1,j_1\rangle < \dots < \langle k_l,j_l\rangle$ и выполнены следующие три условия:

а) для всех $\delta \le l$, если на $[k_\delta,j_\delta,i_\delta]^{[\varkappa_\delta]}$ не стоит $[-]$, то $[\varkappa_\delta]^T_{j_\delta,i_\delta}$ вполне определена на элементах множества $\varphi^T_{(\varkappa,\varkappa_\delta)} L^T_{\langle \varkappa,n,i,k_\delta,j_\delta,i_\delta\rangle}$;

б) не существует $[k',j',i']^{[\varkappa']}$ такой, что $\langle k',j'\rangle < n$, и существует δ', $0 \le \delta' \le l$, и

$$(\langle k',j'\rangle = \langle k_{\delta'},j_{\delta'}\rangle \;\&\; i' < i_{\delta'}) \vee$$
$$\vee (\langle k_{\delta'},j_{\delta'}\rangle < \langle k',j'\rangle < \langle k_{\delta'+1}, j_{\delta'+1}\rangle) \vee$$
$$\vee (\delta' = l \quad \langle k_l,j_l\rangle < \langle k',j'\rangle) \vee (\delta' = 0 \;\&\; \langle k',j'\rangle < \langle k_0,j_0\rangle),$$
$$\varphi^T(\varkappa,\varkappa')L^T_{\langle \varkappa,n,i,k',j',i'\rangle} \cap (\delta[\varkappa']^T_{j',i'} \cup D[\varkappa']^T_{j',i'}) \neq \emptyset$$

и на $[k',j',i']$ не стоит $[-]$;

в) нет $\langle k'',j''\rangle < n$ такого, что $z_{k'',j''}$ стоит на четверке, вторая координата которой входит в $\varphi^T(\varkappa,\varkappa')L^T_{\langle \varkappa,n,i\rangle}$ для $|\varkappa'| < n$, а первая координата $\varkappa'$.

Случай 4. Условия предыдущих случаев не выполнены, существует $i \le k^T(\varkappa,n)$ такое, что $\lambda x K_T(n,x)$ определена на $\{\Delta^i(\varkappa,n), \pi^i(\varkappa,n)\}$, и существует $[k',j',i']^{[\varkappa']}$, на которой нет $[-]$ и $\langle k',j'\rangle < n$, и число δ', $0 \le \delta' \le l+1$, где

$$\Pi^i_{\varkappa,n}(T) = \{[k_0,j_0,i_0]^{[\varkappa_0]}, \dots, [k_l,j_l,i_l]^{[\varkappa_l]}\},$$

$\langle k_0,j_0\rangle < \dots < \langle k_l,j_l\rangle$, $j_{l+1} = n$, $i_{l+1} = 0$, и $[\varkappa_{\delta'}]^T_{j_{\delta'},i_{\delta'}}$ вполне определена на $\varphi^T(\varkappa,\varkappa_{\delta'})L^T_{\langle \varkappa,n,i,k_{\delta'},j_{\delta'},i_{\delta'}\rangle}$, такие что а) $((\langle k_{\delta'-1}, j_{\delta'-1}\rangle < \langle k', j'\rangle < \langle k_{\delta'}, j_{\delta'}\rangle) \vee$

$\vee(\langle k', j'\rangle = \langle k_{\delta'}, j_{\delta'}\rangle \ \&\ i' < i_{\delta'})) \ \&\ (D[\varkappa']^{T}_{j', i'} \cup$

$\cup\, \delta[\varkappa']^{T}_{j', i'} \cap \varphi^{T}(\varkappa, \varkappa')L^{T}_{\langle \varkappa, n, i, k', j', i'\rangle} \neq \emptyset$,

и ни одно из чисел из $\varphi^{T}(\varkappa, \varkappa^{*})L^{T}_{\langle \varkappa^{*}, n, i\rangle}$ для $|\varkappa^{*}| < n$ не является второй координатой четверки, на которой стоит $Z_{k', j'}$ для $\langle k', j'\rangle < n$, а первая координата $\varkappa^{*}$; либо

б) $(\langle k', j'\rangle < \langle k_0, j_0\rangle \ \&\ \delta' = 0$ или $\Pi^{i}_{\varkappa, n}(T) = \emptyset$, и

$[k', j', i'] \in \Pi^{i^{*}}_{\varkappa^{*}, m^{*}}(T)$, причем $\langle\langle \varkappa^{*}, m^{*}\rangle, i^{*}\rangle \underset{lex}{\leq} \langle\langle \varkappa, n\rangle, i\rangle$

или на $\langle\langle \varkappa^{*}, m^{*}\rangle, i^{*}\rangle$ стоит $[+]$, и не существует $[k'', j'', i'']^{[\varkappa'']}$ такой, что

$$(D[\varkappa'']^{T}_{j'', i''} \cup \delta[\varkappa'']^{T}_{j'', i''}) \cap \varphi^{T}(\varkappa, \varkappa'')L^{T}_{\langle \varkappa, n, i, k'', j'', i''\rangle} \neq \emptyset,$$

и если $\langle k'', j''\rangle \neq \langle k', j'\rangle$, то

$$[k', j', i'] \underset{lex}{<} [k'', j'', i''] \underset{lex}{<} [k_{\delta'}, j_{\delta'}, i_{\delta'}] ,$$

если же $\langle k'', j''\rangle = \langle k', j'\rangle$, то $i'' < i'$, либо

в) $i = k^{T}(\varkappa, n)$ и $\Delta^{i}(\varkappa, n)$ или $\pi^{i}(\varkappa, n)$ является второй координатой некоторой четверки, на которой стоит $Z_{k', j'}$ для $\langle k', j'\rangle < n$, или не выполняются условия "а" и "б" ни для каких $[k', j', i']$ и существует $[k', j', i']^{[\varkappa']}$ такая, что

$$\{\Delta^{i}(\varkappa, n), \pi^{i}(\varkappa, n)\} \cap (D[\varkappa']^{T}_{j', i'} \cup \delta[\varkappa']^{T}_{j', i'}) \neq \emptyset,$$

и на $[k', j', i']^{[\varkappa']}$ нет метки $[-]$. Если таких $|\varkappa|$ и n нет, то оставляем все без изменений и переходим к следующему шагу. Если же n и $\varkappa$ с указанными свойствами существуют, то выберем наименьшую пару $(|\varkappa_0|, n_0)$. Если для этой пары выполнен случай I, то, взяв первые два нечетных числа $a < b$, еще не использованные в конструкции, определим $\Pi^{i'}_{\varkappa_0, n_0}(T+1) = \emptyset$ для $i' < k = k^{T}(\varkappa_0, n_0)$.

Если $\varkappa_0 = \mu_{k_0, l_0}$, то положим

$$\mu^{T+1}_{k', l'}(\pi^{k}(\varkappa_0, n_0)) = \mu^{T+1}_{k_0, l_0}(\pi^{k}(\varkappa_0, n_0)) = \mu^{T+1}_{k, l}(\Delta^{k}(\varkappa_0, n_0)) =$$

$$= \mu^T_{k_0,l_0}(\pi^k) \cup \mu^T_{k_0,l_0}(\Delta^k) \cup \{a\};$$

$$\mu^{T+1}_{k',l'}(\Delta^k(\varkappa_0,n_0)) = \mu^{T+1}_{k_0,l_0}(\Delta^k) = \mu^{T+1}_{k,l}(\pi^k) =$$

$$= \mu^T_{k_0,l_0}(\pi^k) \cup \mu^T_{k_0,l_0}(\Delta^k) \cup \{b\};$$

$$\varphi^{T+1}(\mu_{k_0,l_0};\ \mu_{k,l})(\Delta^k) = \pi^k, \quad \varphi^{T+1}(\mu_{k_0,l_0};\ \mu_{k,l})(\pi^k) = \Delta^k,$$

на $\langle \varkappa_0,n_0\rangle$ и на $\langle\varkappa_0,n_0,k_0\rangle$ поставим метку $[+]$, все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу. Если для $(\varkappa_0,n_0)$ выполнены условия случая 2, то поставим на $\langle \varkappa_0,n_0\rangle$ и $\langle\varkappa_0,n_0,k_0\rangle$ метку $[+]$, определим $\Pi^{i'}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = \emptyset$ для $i' < k = k^T(\varkappa_0,n_0)$ и, оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу. Если для $\langle\varkappa_0,n_0\rangle$ выполнены условия случая 3, то рассмотрим наименьшее i, для которого этот случай выполняется, и проделаем следующее построение.

Пусть $m_0 < m_1 < \ldots < m_l$ – все элементы $L^T_{\langle\varkappa_0,n_0,i_0\rangle}$ в указанном порядке. Для i, $0 \le i \le l$, определим $\varphi^{T+1}(\varkappa_0,\varkappa')(m_i) = \varphi^T(\varkappa_0,\varkappa')(m_{i+1})$, где $\varkappa' \ne \varkappa_0$ из того же класса $N_{\varkappa_0}$, что и $\varkappa_0$, и $\varkappa \in N_{\varkappa_0}$,

$$\varkappa^{T+1}(m_i) = \varkappa_0^{T+1}(m_i) = (\varkappa')^{T+1}(\varphi^T(\varkappa_0,\varkappa')(m_{i+1})) =$$

$$= \varkappa_0^T(m_i) \cup \varkappa_0^T(m_{i+1}) \cup \{a_i\}$$

и

$$\varkappa^{T+1}(m_l) = \varkappa_0^{T+1}(\varphi^T(m_0)) = \varkappa_0^T(m_l) \cup \varkappa_0^T(m_0) \cup \{a_l\},$$

$$\varphi^{T+1}(\varkappa_0,\varkappa')(m_l) = \varphi^T(m_0),$$

где $T < a_0 < a_1 < \ldots < a_l$ – первые числа, не использованные в конструкции. На $\langle\varkappa_0,n_0\rangle$ и $\langle\varkappa_0,n_0,i_0\rangle$ поставим метку $[+]$. Для всех меток $[k,j,i] \in \Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T)$ и $[k,j,i'] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$ таких, что

$$(*)\quad \begin{cases} i < i', \text{ на } [k,j,i'] \text{ нет метки } [-] \text{ и на } \langle \varkappa^*, m^*, i^*\rangle \\ \qquad\qquad \text{стоит } [+], \end{cases}$$

на $[k,j,i']$ поставим метку $[-]$ и положим

$$\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T+1) = \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)\setminus\{[k'',j'',i''] \mid [k'',j'',i''] \underset{lex}{\le} [k,j,i']\},$$

где $[k,j,i'] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$ имеет наибольшую координату среди всех меток, удовлетворяющих условию $(*)$. На все $[k,j,i']$, где $i' > i_0$ и $[k,j,i']$ определена, поставим $[-]$. Взяв для каждой метки $[k,j,i] \in \Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T)$ число i' такое, что $s^T_{\varkappa_0}(k,j,i')$ не определено, и первые три номера $a < b < c$, большие T и еще не использованные в конструкции, определим

$$l^{T+1}_{\varkappa_0}(k,j,i') = a, \qquad s^{T+1}_{\varkappa_0}(k,j,i') = b,$$

$$r^{T+1}_{\varkappa_0}(k,j,i') = c, \qquad \Pi^{i''}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = \emptyset,$$

где $i'' \ne i_0$ и $i'' \le k^T(\varkappa_0,n_0)$ и, оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу. Если для $\langle \varkappa_0,n_0\rangle$ выполнены условия случая 4, то выберем наименьшее i_0, для которого выполнено одно из условий этого случая. Выберем наименьшее $\langle k',j'\rangle$, для которого существует такое i', что для $[k',j',i']$ выполняется один из случаев; пусть i' – наименьшее число с этим условием. Если для $[k',j',i']$ выполнено условие "а" и $[k',j',i'] \notin \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$ для $\langle |\varkappa^*|, m^*, i^*\rangle \underset{lex}{<} \langle |\varkappa_0|, n_0, i_0\rangle$ или на $\langle \varkappa^*, m^*, i^*\rangle$ стоит $[+]$, либо выполнено условие "б", то определим

$$\Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = (\Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T)\cup\{[k',j',i']\})\setminus\{[k_{\delta''},j_{\delta''},i_{\delta''}] \mid \delta'' < \delta'\},$$

и для всех $\langle \varkappa^*, m^*, i^*\rangle \underset{lex}{>} \langle \varkappa_0, n_0, i_0\rangle$, если

$$[k',j',i'] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T),$$

положим

$$\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T+1) = \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)\setminus\{[k'',j'',i''] \mid [k'',j'',i''] \underset{lex}{\le} [k',j',i']\}.$$

На все $[k',j',i'']$ такие, что $i'' > i'$ и $s^T_{\varkappa_0}(k',j',i'') \in N$, поставим $[-]$, рассмотрим первые $T<a<b<c$ три номера, еще не использованные в конструкции, и определим

$$l^{T+1}_{\varkappa_0}(k',j',i^*) = a,$$

$$s^{T+1}_{\varkappa_0}(k',j',i^*) = b,$$

$$r^{T+1}_{\varkappa_0}(k',j',i^*) = c,$$

где i^* – первое число такое, что $s^T_{\varkappa_0}(k',j',i^*)$ не определено.

Если $i_0 = k^T(\varkappa_0,n_0)$, то определим $k^{T+1}(\varkappa_0,n_0) = k^T(\varkappa_0,n_0) + 1$ и, взяв первые два номера $a<b$, еще не использованные в конструкции, положим

$$\Delta^{i_0+1}(\varkappa_0,n_0) = a, \quad \pi^{i_0+1}(\varkappa_0,n_0) = b, \quad \Pi^{i_0+1}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = \emptyset .$$

Если же для $[k',j',i']$ выполнено условие "а", но существует $\langle \varkappa^*,m^*,i^* \rangle$ такое, что $[k',j',i'] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$, для которого $\langle |\varkappa^*|,m^*,i^* \rangle \underset{lex}{<} \langle |\varkappa_0|,n_0,i_0 \rangle$ или на $\langle \varkappa^*,m^*,i^* \rangle$ стоит $[+]$, то определим

$$\Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = \Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T)\setminus\{[k_{\delta''},j_{\delta''},i_{\delta''}] \mid \delta''^{*} < \delta'\}$$

и, оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

Если же для $[k',j',i']$ выполнено условие "в", то, взяв первые два числа $a<b$, еще не использованные в конструкции, определим $\Pi^{i_0}_{\varkappa_0,n_0}(T+1) = \emptyset$, $k^{T+1}(\varkappa_0,n_0) = k^T(\varkappa_0,n_0)+1$ и $\Delta^{i_0+1}(\varkappa_0,n_0) = a$, $\pi^{i_0+1}(\varkappa_0,n_0) = b$, все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу.

ШАГ $5t+2$. Полагаем $T = 5t+1$, $k = l(t)$, $j = r(t)(\mathrm{mod}\ k)$ и ищем $\varkappa \in N_k, i^*, |\varkappa^*|, n^*, |\varkappa|$ и $i \le T$ без метки $Z_{k,j}$, $\langle k,j\rangle < n$, для которых выполнено одно из следующих условий.

<u>Случай I</u>. Существуют l, l_1, l_2 такие, что $l_1 \ne l_2$,

$$\varkappa^T(l) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}(l_1), \quad \varkappa^T(l) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}(l_2),$$

$$l \notin \bigcup_{t' \le T} M^{t'}_{\varkappa}(k',j',i'),$$

где $\langle k',j'\rangle < \langle k,j\rangle$ и

$$l \notin \{\Delta^i(\varkappa',m),\ \pi^i(\varkappa',m) \mid i \le k^T(\varkappa',m) \text{ и } \langle \varkappa',m\rangle < \langle \varkappa,j\rangle\}.$$

<u>Случай 2</u>. Метка $[k,j,i]$ – элемент с наименьшей $\langle k,j\rangle$ из $\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T)$, на $\langle \varkappa^*, n^*, i^*\rangle$ стоит $[+]$, а на $[k,j,i]$ метка $[\varkappa]$. Случай I не выполнен, но выполнен один из подслучаев.

<u>Подслучай 2.I</u>. Для всех элементов $k_0 < k_1 < \ldots < k_q$ из $\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle \varkappa^*,n^*,i^*,k,j,i\rangle}$, если $0 \le i \le q$, то $\varkappa^T(k_i) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}([\varkappa]^T_{j,i}(k_i))$ и существует d_0 такое, что $\varkappa^T(k_0) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}(d_0)$.

<u>Подслучай 2.2</u>. $\varkappa^T(k_0) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}([\varkappa]^T_{j,i}(k_1))$.

<u>Подслучай 2.3</u>. На $[k,j,i]$ стоит $[-]$.

<u>Случай 3</u>. Метка $[k\ j\ i] \notin \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$, где $\langle |\varkappa^{**}|, m^{**}, i^{**}\rangle \underset{\mathrm{lex}}{<} \langle \varkappa^*, n^*, i^*\rangle$, для любого $i'' < i'$, если $[k,j,i''] \in \Pi^{i'}_{\varkappa',n'}(T)$ с наименьшей $\langle k,j\rangle$ в $\Pi^{i'}_{\varkappa',n'}(T)$, то $[\varkappa]^T_{j,i}$ вполне определена на $\varphi^T(\varkappa',\varkappa)L^T_{\langle \varkappa',n',i',k,j,i''\rangle}$, и нет $i'' < i$ такого, что $[k,j,i] \notin \Pi^{i'}_{\varkappa',n'}(T)$ для всех $\langle |\varkappa'|, n', i'\rangle \underset{\mathrm{lex}}{<} \langle |\varkappa^*|, n^*, i^*\rangle$, и предыдущие случаи не выполнены; на $\langle \varkappa^*, n^*, i^*\rangle$ нет $[+]$ или $[k,j,i] \notin \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T)$ и для всех l из $\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle \varkappa^*,n^*,i^*,k,j,i\rangle}$ существует d_l такое, что $\varkappa^T(l) \subseteq \gamma^{T+1}_{k,j}(d_l)$; если $[\varkappa]^T_{j,i}(l)$ определено, то $[\varkappa]^T_{j,i}(l) = d_l$, и $[\varkappa]^T_{j,i}$ вполне определена на элементах $\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle \varkappa^{**},n^{**},i^{**}\rangle}$ для $\langle |\varkappa^{**}|, m^{**}, i^{**}\rangle \underset{\mathrm{lex}}{<} \langle |\varkappa^*|, n^*, i^*\rangle$

и не вполне определена на $\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle\varkappa^*,n^*,i^*\rangle}$. Если $n^*, |\varkappa^*|, i^*$, $|\varkappa|$ и i с указанными свойствами не существуют, то оставляем все без изменений и переходим к следующему шагу.

Если же такие числа существуют, то выберем наименьшую относительно лексикографического порядка пятерку таких чисел. Если для нее выполнен случай I, то поставим на $\langle\varkappa, l, l_1, l_2\rangle$ метку $Z_{k,j}$. Если $l \in \bigcup_{t\le T} M^t_\varkappa(k',j',i')$, где $\langle k',j'\rangle > \langle k,j\rangle$, то поставим на $[k',j',i']$ метку $[-]$ и, взяв наименьшее i'' такое, что $s^T_\varkappa(k',j',i'')$ не определено, и три еще не использованные номера $T<a<b<c$, определим

$$l^{T+1}_\varkappa(k',j',i'') = a,$$

$$s^{T+1}_\varkappa(k',j',i'') = b,$$

$$r^{T+1}_\varkappa(k',j',i'') = c.$$

Для $\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ такого, что $[k',j',i'] \in \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$, определим

$$\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T+1)=\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)\setminus\{[k'',j'',i'']\ [\langle k'',j''\rangle,i'']\underset{lex}{<}[\langle k',j'\rangle,i']\},$$

если на $\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ нет метки $[+]$, на все $[k,j,i']$ поставим $[-]$, определим

$$\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T+1)=\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)\setminus\{[k'',j'',i'']\mid[\langle k'',j''\rangle,i'']\underset{lex}{\le}[\langle k,j\rangle,i']\},$$

если $[k,j,i'] \in \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$ и на $\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ нет $[+]$, и перейдем к этапу A. Если для пятерки $(n^*,i^*,|\varkappa^*|,|\varkappa|,i)$ выполнены случай 2 и подслучай 2.I, то положим $[\varkappa]^{T+1}_{j,i}(k_0) = d_0$ и в зависимости от значения $p(T,\varkappa,k,j,i)$, полагая $\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T+1) = \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T)\setminus\{[k,j,i]\}$, поступим следующим образом:

I) при $p(T,\varkappa,k,j,i) = 0$, если $\varkappa^* \notin N_k$, причем $\varkappa \in N_k$ или $\varkappa^* = \varkappa$, то положим

$$d^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = s^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^T_{\varkappa'}(k,j,i);$$

$$d^{T+1}_{\varkappa,\varkappa^*}(k,j,i) = s^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = s^{T}_{\varkappa}(k,j,i); \quad s^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = s^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i)$$

для $\varkappa'$ из класса N_k, содержащего $\varkappa^*$. Если $\varkappa^* \in N_k$ и $\varkappa^* \neq \varkappa$, то $d^{T+1}_{\varkappa,\varkappa^*}(k,j,i) = s^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i)$; $d^{T+1}_{\varkappa^*,\varkappa}(k,j,i) = s^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = s^{T}_{\varkappa}(k,j,i)$ и аналогично для всех $\varkappa' \in N_k$, кроме $\varkappa^*$. Взяв первые два номера a и b, еще не использованные в конструкции, определим

$$l^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = a;$$

$$r^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = b,$$

$$p(T+1,\varkappa,k,j,i) = p(T,\varkappa,k,j,i) + 1$$

и перейдем на этап А;

2) при $p(T,\varkappa,k,j,i) = 1$, если $(\varkappa^* \notin N_k \vee \varkappa^* = \varkappa)$, то полагаем

$$d^{T+1}_{\varkappa',\varkappa}(k,j,i) = s^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T}_{\varkappa'}(k,j,i), \quad d^{T+1}_{\varkappa^*,\varkappa}(k,j,i) = s^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i),$$

если же $\varkappa^* \in N_k$ & $\varkappa^* \neq \varkappa$, то полагаем

$$s^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = d^{T+1}_{\varkappa^*,\varkappa}(k,j,i) = l^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i),$$

$$d^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = s^{T}_{\varkappa'}(k,j,i).$$

Взяв первые два номера $T < a < b$, еще не использованные в конструкции, определим:

$$l^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = a,$$

$$r^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = b,$$

$$p(T+1,\varkappa,k,j,i) = 2,$$

и перейдем на этап А;

3) при $p(T,\varkappa,k,j,i) = 2$, если $(\varkappa^* \notin N_k \vee \varkappa^* = \varkappa)$, то $s^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T}_{\varkappa'}(k,j,i)$, если же $(\varkappa^* \in N_k$ и $\varkappa^* \neq \varkappa)$, то $s^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i)$. Взяв первые два номера $T < a < b$, еще

не использованные в конструкции, определим

$$l^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = a;$$

$$r^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = b;$$

$$p(T+1,\varkappa,k,j,i) = 3$$

и перейдем на этап А;

4) при $p(T,\varkappa,k,j,i)= 3$, если $(\varkappa^* \notin N_k \vee \varkappa^* = \varkappa)$, то

$$s^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T}_{\varkappa'}(k,j,i),$$

$$r^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = d^{T}_{\varkappa'}(k,j,i),$$

$$r^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = d^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i);$$

$$l^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = a;$$

если $(\varkappa^* \in N_k$ и $\varkappa^* \neq \varkappa)$, то

$$s^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = l^{T}_{\varkappa^*}(k,j,i);$$

$$l^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = d^{T}_{\varkappa^*,\varkappa}(k,j,i),$$

$$l^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = d^{T}_{\varkappa',\varkappa}(k,j,i),$$

$$r^{T+1}_{\varkappa^*}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa'}(k,j,i) = r^{T+1}_{\varkappa}(k,j,i) = a,$$

где $T < a$ – первый, еще не использованный номер, $p(T+1,\varkappa,k,j,i) =$ $= 1$, и перейдем на этап А.

Если для выбранной пятерки выполнены случай 2 и подслучай 2.2, то полагаем $p(T+1,\varkappa,k,j,i) = 0$, на $[k,j,i]$ ставим метку $[\hat{\varkappa}]$ (где $\hat{\varkappa} = \mu_{l+1,k}$ при $\varkappa = \mu_{l,k}$ и $\hat{\varkappa} = \mu_{0,k}$ при $\varkappa = \mu_{k,k}$), а метку $[\varkappa]$ снимем, $s^{T+1}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i) = d^{T+1}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i) = l^{T}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i)$, если $(\varkappa^* \notin N_k \vee \varkappa^* = \varkappa)$; в противном случае $s^{T+1}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i) =$ $= d^{T+1}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i) = r^{T}_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i)$, положим

$$[\hat{\varkappa}]^{T+1}_{j,i}(\varphi^T(\varkappa,\hat{\varkappa})(k_1)) = [\varkappa]^T_{j,i}(k_1),$$

$$D[\hat{\varkappa}]^{T+1}_{j,i} = \emptyset ,$$

$$\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T+1) = \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(T)\setminus \{[k,j,i]\}$$

и перейдем к этапу A. Если для пятерки выполняется случай 3,то доопределим $[\varkappa]^T_{j,i}$,положив для l ,указанных в условии $[\varkappa]^{T+1}_{j,i}(l) = d_l$, и перейдем на этап A.

ЭТАП A. Оставив все еще неопределенные объекты без изменений, переходим к следующему шагу.

ШАГ $5t+3$. Положив $T = 5t+2$ и $k = l(t)$, $j = r(t) (\mathrm{mod}\ k)$, проверим, существует ли i такое, что на $[k,j,i]$ нет $[-]$,а стоит $[\varkappa]$, функция $[\varkappa]^T_{j,i}$ вполне определена на $D[\varkappa]^T_{j,i}$ и $[k,j,i] \notin \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$, причем $\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle \varkappa^*,m^*,i^*\rangle} \subseteq D[\varkappa]^T_{j,i}$. Если такие i существуют, то выберем i_0 – наименьшее среди них. Определим

$$D[\varkappa]^{T+1}_{j,i_0} = D[\varkappa]^T_{j,i_0} \cup \{l\} \cup L^T_{\langle \varkappa',m,i\rangle} ,$$

где l – наименьшее число такое, что $l \notin D[\varkappa]^T_{j,i_0}$, $\langle|\varkappa'|,m,i\rangle$ – наименьшая относительно лексикографического порядка метка,для которой $[\varkappa]^T_{j,i_0}$ не вполне определена на $\varphi^T(\varkappa,\varkappa')L^T_{\langle \varkappa',m,i\rangle}$. Для всех $i'>i$ таких, что $s^T_{\varkappa}(k,j,i')$ определено, и $\langle \varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ таких, что $[k,j,i'] \in \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$, положим

$$\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T+1) = \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)\setminus\{[k'',j'',i'']\,|\,[k'',j'',i''] \underset{lex}{<} [k,j,i']\},$$

если на $\langle \varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ нет $[+]$, а на $[k,j,i']$ поставим $[-]$.Оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

ШАГ $5t+4$. Положим $T = 5t+3$, $k = l(t)$, $j = r(t) (\mathrm{mod}\ k)$, проверим,существует ли i такое, что на $[k,j,i]$ нет $[-]$,но стоит $[\varkappa]$; не существует $i' < i$ такого, что $[k\ j\ i']$ – тройка с наименьшей $\langle k,j\rangle$ в некотором $\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$ и $[\varkappa']^T_{j,i}$, не вполне определена на $\varphi^T(\varkappa^{**},\varkappa')L^T_{\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle}$, причем на $[k,j,i']$

стоит $[\varkappa']$, либо $[k,j,i']\notin \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$ для всех $\varkappa^{**},m^{**},i^{**}$;

существуют $l\in D[\varkappa]^T_{j,i}$ и $d_l\in N$ такие, что $[\varkappa]^T_{j,i}(l)$ не определено,

$$l\notin \bigcup_{[k'',j'',i'']\underset{lex}{\le}[k,j,i]} \ \bigcup_{t\le T} M^T_{\varkappa}(k'',j'',i'') \cup \{\Delta^i(\varkappa',m),$$

$$\pi^i(\varkappa',m) \mid [\,|\varkappa'|,m] \le [k,j] \ \text{ и } \ i\le k^T(\varkappa',m)\}$$

и $\varkappa^T(l)\subseteq \varphi^{T+1}_{k,j}(d_l)$, и если $[k,j,i]\in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$, то $[\varkappa]^T_{j,i}$ вполне определена на

$$\varphi^T(\varkappa^*,\varkappa)L^T_{\langle\varkappa^*,m^*,i^*\rangle} \vee (l<m^*)\vee$$

$$\vee\, l\in \bigcup_{\langle\varkappa'',m'',i''\rangle\le\langle\varkappa^*,m^*,i^*\rangle}\varphi^T(\varkappa'',\varkappa)L^T_{\langle\varkappa'',m'',i''\rangle} .$$

Если такие i,l,d_l существуют, то определим $[\varkappa]^{T+1}_{j,i}(l) = d_l$,а для всех $i'>i$ таких, что $s^T_{\varkappa^{**}}(k,j,i')$ определено, на $[k,j,i']$ поставим $[-]$, и для $\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ такой,что $[k,j,i']\in\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)$ и на $\langle\varkappa^{**},m^{**},i^{**}\rangle$ нет $[+]$, положим

$$\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T+1)=\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(T)\setminus\{[k'',j'',i'']\ [k'',j'',i'']\underset{lex}{\le}[k,j,i']\ \}.$$

Оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

ШАГ $5t+5$. Положим $T = 5t+4$, выберем три номера $T<a<b<c$, еще не использованные в конструкции,и для всех $|\varkappa|<T$ положим $l^{T+1}_{\varkappa}(c^{-1}(t),0) = a$, $s^{T+1}_{\varkappa}(c^{-1}(t),0) = b$, $r^{T+1}_{\varkappa}(c^{-1}(t),0) = c$. Все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шаге.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для любых $n,t,\varkappa$ и $\varkappa'$ выполнено равенство $\varkappa^t(n) = (\varkappa')^t(\varphi^t(\varkappa,\varkappa')(n))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любых n,t и $\varkappa$ существует элемент $a\in\varkappa^t(n)$ такой, что $a\notin \varkappa^t(m)$ для всех $m\ne n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любых $t,\varkappa$ и $n\ne m$ не выполнено включение $\varkappa^t(n)\subseteq\varkappa^t(m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любых k,i,j и t, если на $\langle \varkappa^*, m^*, i^* \rangle$ такой, что $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(T)$ не стоит $[+]$, а на $[k,j,i]^{[\varkappa]}$ не стоит $[-]$, то выполнены равенства:

$$(\varkappa^*)^t f^t_{\varkappa^*}(k,j,i) = \tilde{\varkappa}^t f^t_{\tilde{\varkappa}}(k,j,i),$$

$$\varphi^t(\varkappa^*,\tilde{\varkappa}) f^t_{\varkappa^*}(k,j,i) = f^t_{\tilde{\varkappa}}(k,j,i), \quad \tilde{\varkappa} \in \{\varkappa, \varkappa'\}, \quad f \in \{l,s,r,d\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для любых $t, \varkappa$ значение $k^t(\varkappa,0)$ равно 0 и $\Pi^0_{\varkappa,0}(t) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ для всех $t \geq t_0$, то, начиная с некоторого $t' \geq t_0$, множества $\delta[\varkappa]^t_{j,i}$ и $D[\varkappa]^t_{j,i}$ не изменяются, где $\varkappa \in N_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ для всех $t \geq t_0$, то $[k,j,i]$ может использоваться в конструкции лишь конечное число раз.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ для $t_1 \leq t \leq t_2$, то на всех шагах t метка $[k,j,i]$ не меняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если на $[k,j,i]$ постоянно, с некоторого шага стоит $[\varkappa]$, то $\lambda t s^t_{\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i)$ и $\lambda t d^t_{\varkappa',\varkappa(\varkappa^*)}(k,j,i)$ стабилизируются, где $\varkappa^*$ такая, что $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ постоянно с этого же шага, а $\varkappa'$ – произвольная нумерация.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Для любых $\varkappa, k$ существует не более одного i такого, что на $\langle \varkappa, k, i \rangle$ ставится и больше не снимается метка $[+]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если на шаге t на $[k,j,i]$ стоит $[\varkappa]$, $l \notin \varphi^T(\varkappa,\varkappa^*) L^t_{\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle}$, где $[k,j,i] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t)$ и на $\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$ стоит $[+]$, а $[\varkappa]^t_{j,i}(l)$ определено, то $\varkappa^t(l) \subseteq \gamma^t_{k,j}([\varkappa]^t_{j,i}(l))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Если после шага t_0 множество $\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ не изменяется и на $\langle \varkappa^*, m^*, i^* \rangle$ не ставится $[+]$, то $\varkappa^t(l) = \varkappa^{t_0}(l)$ для всех $l \in \varphi^t(\varkappa,\varkappa^*) L^{t_0}_{\langle \varkappa^*, m^*, i^* \rangle}$.

Определим $M^{\varkappa}_{k,j,i} = \bigcup_{t\geq 0} M^t_{\varkappa}(k,j,i)$, $M^t_{\varkappa,\varkappa'}(k,j,i) = \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(M^t_{\varkappa}(k,j,i))$. Аналогично леммам I–8 из [3] могут быть доказаны следующие леммы.

ЛЕММА I. Для любых неравных $[k,j,i]$ и $[k',j',i']$ и любой $\varkappa$ множества $M^{\varkappa}_{k,j,i}$ и $M^{\varkappa}_{k',j',i'}$ не пересекаются.

ЛЕММА 2. Для любых $\varkappa, n$ и i существуют $\lim\limits_{t\to\infty} k^t(\varkappa,n) < \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \Pi^i_{\varkappa,n+1}(t)$ и множество $X_{\varkappa,n} = \{[k',j',i'] \mid \in \lim\limits_{t\to\infty} \Pi^{i''}_{\varkappa'',m''}(t)$, где $\langle|\varkappa''|,m''\rangle \underset{\text{lex}}{\leq} \langle|\varkappa|,n+1\rangle$ и $i''\in N\}$ конечно.

СЛЕДСТВИЕ I. Для любой $\langle\varkappa,m,i\rangle$ лишь конечное число $[k',j',i']$ может попасть в $\bigcup_{t\geq 0} \Pi^i_{\varkappa,m}(t)$.

ЛЕММА 3. Если на $[k,j,i]$ бесконечно часто меняется метка, то существует $\lim\limits_{t\to\infty} f^t_{\varkappa,\varkappa'}(k,j,i)=\infty$ для $f\in\{l,s,r,d\}$, где $\varkappa\in N_k$, а $\varkappa'$ – такая нумерация, что $[k,j,i]$ удаляется из $\Pi^{i'}_{\varkappa',n'}(t)$ бесконечно часто.

ЛЕММА 4. Для любой пары $[k,j]$, $k>j$, существует лишь конечное число элементов i, для которых $[k,j,i]\in \lim\limits_{t\to\infty} \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ для подходящей $\langle\varkappa^*, m^*, i^*\rangle$.

ЛЕММА 5. Для любой пары $[k,j]$, $k>j$, и нумерации $\varkappa_0$ выполняется лишь одна из следующих возможностей:

а) Множество $I_{[k,j]}$ чисел i таких, что $s^t_{\varkappa_0}(k,j,i)$ определено для некоторого t, конечно и все функции $l^t_{\varkappa_0}(k,j,i)$, $r^t_{\varkappa_0}(k,j,i)$, $s^t_{\varkappa_0}(k,j,i)$, $d^t_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i)$, $l^t_{\varkappa,\varkappa_0}(k,j,i)$, $r^t_{\varkappa,\varkappa_0}(k,j,i)$, $s^t_{\varkappa,\varkappa_0}(k,j,i)$, $d^t_{\varkappa,\varkappa_0}(k,j,i)$, где $\varkappa\in N_k$, стабилизируются.

б) Существует i_0 такое, что для некоторого t множество $s^t_{\varkappa_0}(k\,j\,i_0)$ определено, на $[k,j,i_0]$ не ставится $[-]$. Эта метка используется в конструкции бесконечно часто, для всех $i'<i_0$ метка $[k,j,i']$ используется в конструкции лишь конечное число раз, а для всех $i'>i_0$ на $[k,j,i']$ или ставится метка $[-]$ или $s^t_{\varkappa_0}(k,j,i')$ не определено для всех t.

ЛЕММА 6. Если на $[k,j,i]$, начиная с шага t_0, ставится и стоит постоянно метка $[\varkappa]$ и $[k,j,i]$ используется в конструкции бесконечно часто, а элемент $a_0 \in \varkappa^{t_0}(s^{t_0}_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i))$ и $a_0 \notin \varkappa^{t_0}(1)$ для всех $1 \neq$ $\neq s^{t_0}_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i)$, то для любого $t \geq t_0$ и $1 \neq$ $\neq s^{t_0}_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i)$, если $a_0 \in \varkappa^t(1)$, то существует такое t_1, $t_0 \leq t_1 \leq t$, что $1 = 1^{t_1}_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i)$, если $(\varkappa^0 \notin N_k \vee \varkappa_0 = \varkappa)$, либо $1 = r^{t_1}_{\varkappa_0,\varkappa}(k,j,i)$, в противном случае, и на шаге t_1 для $[k,j,i]$ выполнен случай 3 шага типа $5t+1$.

ЛЕММА 7. Для любых $\varkappa$, $\varkappa'$ и 1 существует $\varphi(\varkappa,\varkappa')(1) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(1)$ и $\varkappa(1) = \varkappa'(\varphi(\varkappa,\varkappa')(1))$ и только одно значение $\varphi(\varkappa,\varkappa')(1)$ принимается функцией $\lambda t \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(1)$ бесконечно часто.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $1 \in N$ существует $1' \in N$ такое, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi^t(\varkappa,\varkappa')(1') = 1$.

Нужно рассмотреть $\varphi^t(\varkappa',\varkappa)$, а доказывается аналогично доказательству леммы 7.

ЛЕММА 8. Для любых $n \neq m$ и $\varkappa$ существует t_1, для которого $\overset{t}{\varkappa}{}^1(n) \not\subseteq \varkappa(m)$ и $\overset{t}{\varkappa}{}^1(m) \not\subseteq$ $\not\subseteq \varkappa(n)$ и, следовательно, $\varkappa(n) \not\subseteq \varkappa(m)$.

ЛЕММА 9. Отображения $\mu_{1,k}$, $1,k \in N$, $1 \leq k$, нумеруют одно и то же семейство и однозначны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_\varkappa = \{\varkappa(n) \mid n \in N\}$ и $S_{\varkappa'} = \{\varkappa'(n) \mid n \in N\}$. Покажем, что $S_{\varkappa'} \subseteq S_\varkappa$. Второе включение доказывается аналогично. Пусть $A \in S_{\varkappa'}$. Тогда существует 1 такое, что $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(\varkappa,\varkappa')(1') =$ $= 1$ и $\varkappa(') = \varkappa'\varphi(\varkappa,\varkappa')(1') = \varkappa'(1)$. Таким образом, $\varkappa(1') = A$ и $A \in S_\varkappa$.

Однозначность $\varkappa,\varkappa'$ непосредственно следует из леммы 8.

ЛЕММА 10. Для любых $1,k \in N$ таких, что $1 \leq k$, нумерация $\mu_{1,k}$ неэквивалентна нумерациям $\mu_{1,k},\dots,\mu_{1-1,k},\mu_{1+1,k},\dots,\mu_{k,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда существуют n_0 и $\mu_{1_0,k}$ такие, что функция $\lambda x K(n_0,x)$ общерекурсивная и для всех x выполнено равенство $\mu_{1,k}(x) = \mu_{1_0,k} \circ K(n_0,x)$. Рассмотрим метку $\langle \mu_{1,k}, n_0 \rangle$. Если на нее ставится $[+]$, то существует i такое, что на $\langle \mu_{1,k}, n_0, i \rangle$ поставлена $[+]$, но в этом случае выполняются:

$$\text{а)}\quad (K(n, \Delta^i(\mu_{1,k},n_0)) \neq \Delta^i(\mu_{1,k},n_0) \vee K(n_0,\pi^i(\mu_{1,k},n_0)) \neq$$

$$\neq \pi^i(\mu_{1,k},n_0)) \,\&\, \mu_{1,k}(\Delta^i(\mu_{1,k},n_0)) = \mu_{1',k}(\Delta^i(\mu_{1,k},n_0)) \,\&$$

$$\&\, \mu_{1,k}(\pi^i(\mu_{1,k},n_0)) = \mu_{1',k}(\pi^i(\mu_{1,k},n_0))$$

для всех $1' \leq k$, в том числе и для 1_0; или

$$\text{б)}\quad K(n_0,\Delta^i(\mu_{1,k},n_0)) = \Delta^i(\mu_{1,k},n_0) \,\&\, K(n_0,\pi^i(\mu_{1,k},n_0)) =$$

$$= \pi^i(\mu_{1,k},n_0) \,\&\, \mu_{1,k}(\pi^i(\mu_{1,k},n_0)) = \mu_{1',k}(\Delta^i(\mu_{1,k},n_0))$$

для всех $1' \neq 1$, $1' \leq k$, так как метка $[+]$ может ставиться лишь в случаях I,2 или 3 шага типа $5t+1$. Но в случаях "а" и "б" функция $\lambda x K(n_0,x)$ уже не может быть сводящей, поскольку все нумерации однозначны. Значит, $[+]$ на $\langle \mu_{1,k}, n_0 \rangle$ не ставится.

Рассмотрим $i_0 = \lim_{t\to\infty} k^t(\mu_{1,k}, n_0)$, который существует по лемме 2. Выберем шаг t_0 такой, что $\lambda t \Pi^i_{\varkappa,m}(t)$, $\langle|\varkappa|,m,i\rangle \underset{lex}{\le} \langle|\mu_{1,k}|,n_0,i_0\rangle$, $\lambda t K^t(\mu_{1,k}\ n_0)$, после него уже не изменяются и на $\langle|\varkappa|,m,i\rangle \underset{lex}{\le} \langle|\mu_{1,k}|,n_0,i_0\rangle$ не ставится никаких меток. Такое t_0 существует в силу определения предела, леммы 2 и свойства конструкции. Рассмотрим шаг $t_1 \ge t_0$ такой, что $K_{t_1}(n_0, \Delta^i(\mu_{1,k},n_0))$ и $K_{t_1}(n_0, \pi^i(\mu_{1,k},n_0))$, $i \le i_0$, определены. Если

$K(n_0, \Delta^{i_0}(\mu_{1,k},n_0)) \ne \Delta^{i_0}(\mu_{1,k},n_0)$ либо $K(n_0,\pi^{i_0}(\mu_{1,k},n_0)) \ne$ $\ne \pi^i(\mu_{1,k},n_0)$, то по случаю 2 шага типа $5t+1$, на $\langle \mu_{1,k},n_0\rangle$ поставится метка $[+]$, а это, как было замечено выше, невозможно. Значит,

$$K(n_0,\Delta^{i_0}(\mu_{1,k},n_0)) = \Delta^{i_0}(\mu_{1,k},n_0); K(n_0,\pi^{i_0}(\mu_{1,k},n_0)) = \pi^{i_0}(\mu_{1,k},n_0).$$

В силу выбора t_1, после этого шага ни для какой метки $\langle\varkappa,m,i\rangle \underset{lex}{\le} \langle\mu_{1,k},n_0,i_0\rangle$ не выполняется шаг типа $5t+1$. Рассмотрим шаг $t_2 \ge t_1$ типа $5t+1$. На этом шаге для $\langle\mu_{1,k};n_0;i_0\rangle$ выполняется либо случай I, либо 4. Но в первом случае на $\langle\mu_{1,k}; n_0\rangle$ должна поставиться $[+]$, а во втором – определиться метка $\langle\mu_{1,k},n_0,i+1\rangle$, что противоречит выбору i_0. Следовательно, наше предположение неверно и тем самым лемма доказана.

ЛЕММА II. Если $\gamma_{k,0},\dots,\gamma_{k,k}$ – первые $k+1$ нумерации из вычислимого класса K_k являются однозначными вычислимыми нумерациями семейства $S = \{\varkappa(n) | n\in N\}$, то для каждой нумерации $\gamma_{k,j}$, $j\le k$, существует рекурсивная функция g, такая что $\mu_{i,k}(m) = \gamma_{k,j}(g(m))$ для любого $m\in N$ при подходящем $i\in\{1,2,\dots,k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим о.в.н. $\gamma_{k,j}$ семейства S. В силу леммы 5 возможны следующие случаи.

<u>Случай А</u>. Существует i_0 такое, что $[k,j,i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто и, начиная с некоторого шага, на ней

стоит и уже больше не снимается $[\varkappa]$.

<u>Случай Б</u>. Существует i_0 такое, что $[k,j,i_0]$ используется бесконечно часто и метки на ней меняются бесконечно часто.

<u>Случай В</u>. Существует лишь конечное число i таких, что $[k,j,i]$ используется в конструкции и каждая такая метка используется в конструкции лишь конечное число раз.

В случае А указанное i_0 единственно в силу леммы 5. Выберем шаг t_0, после которого ни одна $[k,j,i]$, где $i < i_0$, больше не используется в конструкции. Такой шаг существует, так как в противном случае на $[k,j,i_0]$ была бы поставлена $[-]$ и она не смогла бы использоваться в дальнейшей конструкции бесконечно часто. Покажем, что для $[k,j,i_0]$ бесконечно часто выполняется шаг типа $5t+3$. Предположим противное, тогда существует шаг $t_1 \geq t_0$, после которого шаг типа $5t+3$ не выполняется для $[k,j,i_0]$.Тогда, начиная с этого шага, $D[\varkappa]^t_{k,j,i_0}$ больше не изменяется. Рассмотрим наименьшее $l_0 \in D[\varkappa]^t_{j,i_0}$ такое, что $[\varkappa]^t_{j,i_0}(l_0)$ не определено для всех t и

$$l_0 \notin \hat{D}_{k,j,i_0} = \bigcup_{t\geq 0} \bigcup_{[k',j',i'] \underset{lex}{\leq} [k,j,i_0]} M^t_{\varkappa}(k',j',i') \cup \{\Delta^i(\varkappa',m),$$

$$\pi^i(\varkappa',m) \mid \langle \varkappa',m\rangle \leq [k,j] \ \&\ i \leq \lim_{t\to\infty} k^t(\varkappa',m)\},$$

где на $[k,j,i_0]$ постоянно стоит $[\varkappa]$. Выберем шаг $t_2 \geq t_1$ такой, что $[\varkappa]^{t_2}_{j,i_0}$ определено на всех $l' < l_0$, которые не принадлежат множеству $\hat{D}^t_{k,j,i_0}$ $(t < t_2)$, и $[\varkappa]^{t_2}_{j,i_0}$ на этих числах не изменяется. После шага t_2 не будет больше выполняться и случай шага типа $5t+4$. Таким образом, для $[k,j,i_0]$ после шага t_2 могут выполняться лишь шаги типа $5t+1$ и $5t+2$. После шага t_2 множество $\varkappa^t(l_0)$ уже больше не изменяется, так как оно может изменяться лишь в случае, когда $l_0 \in \varphi^t(\varkappa^*,\varkappa)L^t_{\langle\varkappa^*,m^*,i^*\rangle}$ для некоторых $\varkappa^*, m^*$ и i^*, и на шаге t на $\langle\varkappa^*, m^*, i^*\rangle$ ставится $[+]$. Но в этом случае, поскольку $l_0 \in \varphi^t(\varkappa^*,\varkappa)L^t_{\langle\varkappa^*,m^*,i^*\rangle}$ и $l_0 \in D[\varkappa]^t_{j,i_0}$, то в $\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ входят либо $[k,j,i_0]$, либо

$[k,j,i']$, где $i'<i_0$. Но так как $t \ge t_2 \ge t_0$, то никакая метка $[k,j,i']$, $i'<i_0$, больше в конструкции не используется. Следовательно, $[k,j,i_0]\in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$. Но чтобы поставилась $[+]$ на шаге t на $\langle \varkappa^*, m^*, i^* \rangle$, необходимо, чтобы $[\varkappa]^t_{j,i_0}$ была вполне определена на $\varphi^t(\varkappa^*,\varkappa)L^t_{\langle \varkappa^*,m^*,i^*\rangle}$ и, следовательно, на l_0 . Противоречие нашему предположению. Таким образом, $\varkappa^t(l_0)$ после шага t_2 больше не изменяется. Рассмотрим $\varkappa(l_0) = \varkappa^{t_2}(l_0)$. Так как $\gamma_{k,j}$ – нумерация S , то существуют $t_3 \ge t_2$ и d_0 такие, что $\gamma^{t_3}_{k,j}(d_0) = \varkappa(l_0)$. Но $[k,j,i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто, поэтому после шага t_0 для всех $i'<i_0$ на $[k,j,i']$ стоит $[-]$ или $[k,j,i']\in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,m^*}(t)$ для всех $t \ge t_0$. Тогда для $[k,j,i_0]$ выполнятся на шаге $T = 5t'_3+4$ условия этого шага для $[k,j,i_0]$ и для l_0 , где t'_3 такое, что $k = l(t'_3)$, $j = t_3 (\mathrm{mod}\ k)$, и $[\varkappa]^T_{j,i_0}(l)$ определится. Противоречие нашему предположению. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} D[\varkappa]^t_{j,i_0} = N$, и так как шаг типа $5t+3$ выполняется бесконечно часто, то $\bigcup\limits_{t\ge 0}[\varkappa]^t_{j,i_0}$ определено на всех $l\in N\setminus\widehat{D}_{k,j,i_0}$. Из нашей конструкции следует, что $[\varkappa]^t_{j,i_0}(l)$ может изменяться, если $l = l^t_\varkappa(k,j,i_0)$ или $l = r^t_\varkappa(k,j,i_0)$, в зависимости от значения $\varkappa$ и на шаге t для $[k,j,i_0]$ выполнятся подслучай I случая 2 шага типа $5t+2$. Поэтому если

а) $\lambda t l^t_\varkappa(k,j,i_0)$ стабилизируется, то рассмотрим шаг $t_4 \ge t_2$, после которого она стабилизируется, и тогда после этого шага $[\varkappa]^t_{j,i_0}(l)$ не будет больше меняться. Полагаем $t_1 = t_4$. Если же

б) $\lambda t l^t_\varkappa(k,j,i_0)$ не стабилизируется, то это означает, что $[k,j,i_0]$ используется в конструкции по случаю 3 шага $5t+1$ бесконечно часто. Для любого l находим шаг t_1 такой, что $l \notin M^{t_1}_\varkappa(k,j,i_0)\,\&\,([\varkappa]^{t_1}_{j,i_0}(l)$ определено) либо $l = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_\varkappa(k,j,i_0)\&$

$\&[\varkappa]^{t_1}_{j,i_0}(l)$ определено. После этого шага l уже не может стать равным $l^t_\varkappa(k,j,i_0)$ для $t \geq t_0$, так как $l^t_\varkappa(k,j,i_0)$ принимает только значение из $M^{t-1}_\varkappa(k,j,i_0)$ или еще ни разу не использованные в конструкции.

Опишем теперь алгоритм сводящей функции g.

Чтобы определить значение g в точке l, мы ищем шаг t'_1 такой, что либо

I) $\varkappa^{t'_1}(l)$ определено и $t'_1 \geq t_1$, либо

2) $$l \in \bigcup_{\substack{\langle \varkappa^*,n\rangle < [k,j] \\ i \leq \lim\limits_{t\to\infty} k^t(\varkappa^*,n)}} \varphi^{t_5}(\varkappa^*,\varkappa) L^{t_5}_{\langle \varkappa^*,n,i\rangle} \quad \text{и} \quad t'_1 = t_5,$$

где после шага t_5 для $\langle\varkappa^*,n\rangle \leq [k,j]$ и $i \leq \lim\limits_{t\to\infty} k^t(\varkappa^*,n\rangle$ множества $\Pi^i_{\varkappa^*,n}(t)$ уже не изменяются и на $\langle\varkappa^*,n,i\rangle$ не ставится $[+]$, либо

3) $l \in M^{t'_1}_\varkappa(k',j',i')$, где $[k',j',i'] \underset{lex}{<} [k,j,i_0]$.

Предварительно для каждого $[k',j'] < [k,j]$ такого, что существует $i_{k',j'}$, для которого $[k',j']$ используется в конструкции бесконечно часто, зафиксируем это $i_{k',j'}$. Пусть J – все такие пары $[k',j'] < [k,j]$, для которых $i_{k',j'}$ существуют. Для каждой $[k',j'] < [k,j]$ зафиксирует шаг $t^0_{k',j'}$ такой, что после него никакая $[k',j',i']$, где $([k',j'] < [k,j]) \& (i' < i_{k',j'} \vee$ $\vee [k',j'] \in J)$, больше не используется в конструкции. Рассмотрим $J_0 = \{[k',j'] \in J \mid$ на $[k',j',i_{k',j'}]$, начиная с некоторого шага, постоянно стоит $[\varkappa_{k',j'}]\}$. Для каждого $[k',j'] \in J_0$ рассмотрим шаг $t'_{k',j'}$ такой, что на $[k',j',i_{k',j'}]$ после этого шага постоянно стоит $[\varkappa']$ и $p(t'_{k',j'},\varkappa';k',j',i_{k',j'}) > 0$.

Теперь, в зависимости от условий для $\varkappa$, после шага $t'_{k',j'}$ стабилизируется либо $\lambda t s^t_\varkappa(k',j',i_{k',j'})$, либо $\lambda t d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i_{k',j'})$. В первом случае зафиксируем $l_{k',j'} = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_\varkappa(k',j',i_{k',j'})$, а во втором $l_{k',j'} = \lim_{t\to\infty} d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i_{k',j'})$ и найдем $d_{k',j'}$ такое, что $\varkappa(l_{k',j'}) = \gamma_{k,j}(d_{k',j'})$. Для каждого $l \in \bigcup_{n\le k}(L^{t_5}_{\langle\varkappa, n, i\rangle} \mid i \le \lim_{t\to\infty} k^t(\varkappa, n))$ рассмотрим число d^*_l такое, что $\varkappa(l) = \gamma_{k,j}(d^*_l)$.

Так как множество

$$\bigcup_{\substack{n\le k \\ i\le\lim_{t\to\infty} k^t(\varkappa,n)}} L^{t_5}_{\langle\varkappa,n,i\rangle}$$

конечно, то это не будет влиять на рекурсивность g . Теперь определим функцию g. Если выполняется случай I), то полагаем $g(l) = [\varkappa]^{t'_1}_{j,i_0}(l)$. Если выполнен случай 2), то полагаем $g(l) = d^*_l$. Если выполняется случай 3), то рассматриваем несколько подслучаев.

<u>Подслучай 3.I</u>. Если

$$l\in M^{t'_1}_{\varkappa}(k',j',i') \;\&\; ([k',j']=[k,j] \;\&\; i'<i) \vee ([k',j']<[k,j] \;\&$$
$$\& [k',j']\notin J) \vee ([k',j']<[k,j] \;\& [k',j']\in J \;\& i'<i_{k',j'}),$$

то рассмотрим шаг $t' = \max\{t'_1, t^0_{k',j'}, t_5\}$, найдем d_l и t''_1 такие, что $\varkappa^{t'}(l)\subseteq \gamma^{t''_1}_{k,j}(d_l)$, и положим $g(l) = d_l$.

<u>Подслучай 3.2</u>. Если $l\in M^{t'_1}_{\varkappa}(k',j',i')$ и $[k',j'] \le [k,j] \;\&$ $\& \;[k',j']\in J \;\& \; i_{k',j'} < i'$, то найдем d_l и шаги $t',t'',t''> t' \ge$ $\ge \max\{t'_1, t^0_{k',j'}\}$ такие, что на $[k',j',i']$ на шаге t' ставится $[-]$, $\varkappa^{t'}(l)\subseteq \gamma^{t''}_{k,j}(d_l)$, и положим $g(l) = d_l$.

<u>Подслучай 3.3</u>. Если $l\in M^{t'_1}_{\varkappa}(k',j',i_{k',j'})$, $[k',j']\in J_0$, то найдем d_l и шаги $t'' \ge t' > t'_1$ такие, что $l\in M^{t'}_{\varkappa}(k',j',i_{k',j'})$ и $\varkappa^{t'}(l)\subseteq \gamma^{t''}_{k,j}(d_l)$, и положим $g(l) = d_l$.

<u>Подслучай 3.4</u>. Если $l\in M^{t'_1}_{\varkappa}(k',j',i'_{k',j'})$, $[k',j']\in J_0$ и $\lambda t M^t_{\varkappa}(k',j',i_{k',j'})$ не стабилизируется, то положим $g(l)= d_{k',j'}$,

если $l = l_{k',j'}$. В противном случае, найдем $t'' \geq t' > t_l$ и число d_l такие, что $l \notin M_{\varkappa}^{t'}(k',j',i_{k',j'})$ и $\varkappa^{t'}(l) \subseteq \gamma_{k,j}^{t''}(d_l)$, и полагаем $g(l) = d_l$.

Подслучай 3.5. Если $\lambda t M_{\varkappa}^{t}(k',j',i_{k',j'})$ стабилизируется и не выполнены условия предыдущих подпунктов, то рассмотрим шаг $t^2_{k',j'}$, после которого для метки $[k',j',i_{k',j'}]$ не выполняется случай 3 шага типа $5t + 1$, найдем d_l и $t'' > t^2_{k',j'}$ такие, что $t'' \geq t'_l$ и $\varkappa^{t''}(l) \subseteq \gamma_{k,j}^{t''}(d_l)$, и положим $g(l) = d_l$.

Докажем теперь, что построенная таким образом функция всюду определена и является сводящей. Ее рекурсивность следует из описания алгоритма ее вычисления. Покажем, что для любого l значение $g(l)$ определено и $\varkappa(l) = \gamma_{k,j}(g(l))$. Пусть это не так. Рассмотрим наименьшее l, для которого это не так. Если для l выполняется случай I), то $g(l)$ определено. Значит, $\varkappa(l) \neq \gamma_{k,j}(g(l))$. Но так как для $[k,j,i_0]$ бесконечно часто выполняется шаг типа $5t + 3$, то для бесконечно многих t имеет место $\varkappa^{t}(l) \subseteq \subseteq \gamma_{k,j}^{t+1}([\varkappa]^{t}_{j,i_0}(l))$, а, как мы заметили, после шага t'_l значение $[\varkappa]^{t}_{j,i_0}(l)$ не изменяется и равно $g(l)$, поэтому $\varkappa^{t}(l) \subseteq \subseteq \gamma_{k,j}^{t+1}(g(l))$ для бесконечно многих t, а, следовательно, $\varkappa(l) \subseteq \subseteq \gamma_{k,j}(g(l))$. Но так как для элемента из S, в силу леммы 8, нет собственных включений, то $\varkappa(l) = \gamma_{k,j}(g(l))$. Таким образом, случай I выполниться не может. Случай 2 очевидно выполниться не может, поэтому остался последний случай. В подслучае 3.3, поскольку $[k',j'] \notin J_0$, в силу леммы 3 найдется t' такое, что $l \notin \notin M_{\varkappa}^{t'}(k',j',i_{k',j'})$ и $t' \geq t'_l$. Тогда так же, как и в подслучаях 3.I и 3.2, после t' множество $\varkappa^{t}(l)$ уже не изменяется и конечно и найдутся t'' и d_l, так как $\gamma_{k,j}$ – нумерация S, такие, что $\varkappa^{t'}(l) \subseteq \gamma_{k,j}^{t''}(d_l)$. Поэтому $g(l)$ определено и $\varkappa(l) \subseteq \gamma_{k,j}(g(l))$. Но так как между элементами S не может быть, в силу леммы 8, собственных включений, то $\varkappa(l) = \gamma_{k,j}(g(l))$.

Если выполняется для l подслучай 3.4 или 3.5, то $l \neq l_{k',j'}$.

Если постоянно стоит метка $[\varkappa']$ на $[k',j',i_{k',j'}]$ и $\lambda t M^{t}(k',j',i_{k',j'})$ стабилизируется, то $[k',j',i_{k',j'}]$ уже не используется с шага $t''_{k',j'}$ по случаю шага типа $5t+1$. Поэтому $\varkappa^t(1)$ после этого шага не изменяется, и тогда, как и раньше, $g(1)$ определено и $\varkappa(1)=\gamma_{k,j}(g(1))$. Если же $\lambda t M^t_\varkappa(k',j',i_{k',j'})$ не стабилизируется, но постоянно стоит $[\varkappa']$, то, как видно из описания конструкции, все элементы в $M^t_\varkappa(k',j',i_{k',j'})$, кроме $1_{k',j'}$, будут через некоторое время обновляться. Поэтому найдется шаг $t'>t'_1$ такой, что $1\in M^{t'}_\varkappa(k',j',i_{k',j'})$, но тогда 1 больше не не будет использоваться в конструкции и $\varkappa^t(1)$ не изменяется. Следовательно, найдутся t'' и d_1 такие, что $\varkappa^{t'}(1)\subseteq\gamma^{t''}_{k,j}(d_1)$, но тогда, как и раньше, $g(1)$ определена и $\varkappa(1)=\gamma_{k,j}(g(1))$. Рассмотрим случай Б. В силу леммы 5 в этом случае метки $[k,j,i]$, где $i<i_0$, используются в конструкции лишь конечное число раз. Рассмотрим шаг t_0, после которого ни одна из таких меток больше не используется в конструкции, и все шаги $t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$, на которых на $[k,j,i_0]$ меняется метка и $t_0<t_1$. Обозначим через $\varkappa_t$ значение из N_k такое, что на шаге t на $[k,j,i_0]$ стоит метка $[\varkappa_t]$. Рассмотрим число d такое, что $[\varkappa_t]^t_{j,i_0}(s^{t_1}_{\varkappa_{t_1}}(k,j,i_0))=$

$=d$, и покажем, что $[\varkappa_t]^t_{j,i_0}(s^t_{\varkappa_t}(k,j,i_0))=d$ для всех $t\geq t_1$.

Рассмотрим наименьший шаг $t>t_1$, на котором это условие нарушено. Тогда $[\varkappa_{t-1}]^{t-1}_{j,i_0}(s^{t-1}_{\varkappa_{t-1}}(k,j,i_0))=d$. Если $t_{k-1}<t<t_k$,

то так как на шаге t на $[k,j,i_0]$ остается метка $[\varkappa_{t-1}]$, то $s^t_{\varkappa_t}(k,j,i_0)=s^{t-1}_{\varkappa_{t-1}}(k,j,i_0)$, $\varkappa_t=\varkappa_{t-1}$ и $[\varkappa_t]^t_{j,i_0}(s^{t-1}_{\varkappa_{t-1}}(k,j,i_0))$ не изменяет своего значения. Поэтому наше предположение ложно. Следовательно, $t=t_k$, и на шаге t_k метка $[\varkappa_{t-1}]$ изменялась на $[\hat{\varkappa}_{t-1}]$. Но в таком случае $s^{t-1}_{\varkappa_t}(k,j,i_0)=s^t_{\varkappa_t}(k,j,i_0)$ и

$$[\varkappa_t]^t_{j,i_0}(s^t_{\varkappa_t}(k,j,i_0))=[\varkappa_{t-1}]^{t-1}_{j,i_0}(s^{t-1}_{\varkappa_{t-1}}(k,j,i_0))=d\ .$$

В силу нашей конструкции, если на шаге t на $[k,j,i_0]$ меняется метка и ставится $[\varkappa]$, то

$$\gamma^{t+1}_{k,j}([\varkappa]^t_{j,i_0}(s^t_\varkappa(k,j,i_0)))\supseteq\varkappa^t(s^t_\varkappa(k,j,i_0))\,.$$

Таким образом, $\gamma_{k,j}(d) \supseteq \varkappa^{t_i}(s^{t_i}_{\varkappa_{t_i}}(k,j,i_0))$ для всех $i > 0$.

Поскольку все $\varkappa^0(l)$, $l \in N$, попарно различны и непусты, то в силу леммы 3, $\gamma_{k,j}(d)$ – бесконечное множество. Так как $\gamma_{k,j}$ – нумерация S, то существует l_1 такое, что $\gamma_{k,j}(d) = \varkappa(l_1)$. Но $\varkappa(l_1)$ может быть бесконечно только в том случае, когда на метке $[k',j',i']$ постоянно с некоторого шага t' стоит метка $[\varkappa']$ и $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_{\varkappa}(k',j',i')$ или $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i')$, а, кроме того, $[k',j',i']$ бесконечно часто используется по случаю 3 шага типа $5t+1$. Пусть $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_{\varkappa}(k',j',i')$, рассмотрим шаг t_0, после которого $s^t_{\varkappa}(k',j',i')$ уже не изменяется, на $[k',j',i']$ стоит постоянно метка $[\varkappa']$ и $p(t_0,\varkappa',k',j',i') > 0$. Выберем шаг $t_1 > t_0$ такой, что на $\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$ на шаге t_1 поставлена $[+]$ и $[k',j',i'] \in$ $\in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t_1)$. Для каждого $l' \notin \bigcup\limits_{t\geq 0} M^t_{\varkappa}(k',j',i')$ рассмотрим такой элемент $a_{l'}$, что $a_{l'} \in \varkappa^{t_1}(l')$ и $a_{l'} \notin \varkappa^{t_1}(l'')$ для всех $l'' \neq l'$. Докажем, что для всех $t \geq t_1$ будут выполняться следующие условия:

(1) $a_{l'} \notin \varkappa^t(s^t_{\varkappa}(k',j',i')) \cup \varkappa^t(l^t_{\varkappa}(k',j',i'))$;

(2) если не существуют шаги $t_1' < t_2'$ такие, что

$$(**)\left\{\begin{array}{l} t_1' \leq t \leq t_2' \text{ и на шпге } t_1' \text{, на } \langle \varkappa^{**}, n^{**}, i^{**} \rangle \text{ ставится метка } [+] \text{ и } [k',j',i'] \in \Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},n^{**}}(t_1') \text{, а на} \\ \text{шаге } t_2' \text{ для } [k',j',i'] \text{ выполняется случай 2 шага типа } 5t+2 \text{ на } \langle \varkappa^{**}, n^{**}, i^{**} \rangle \text{, то} \\ a_{l'} \notin \varkappa^t(r^t(k',j',i')) \cup \varkappa^t(d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i')); \end{array}\right.$$

(3) если же существуют шаги $t_1' < t_2'$ с условиями $(**)$, но $p(t,\varkappa',k',j',i') \neq 1$, то $a_{l'} \notin \varkappa^t(d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i'))$.

Докажем последнее утверждение индукцией по t. Пусть для всех $t' < t$ наше утверждение уже доказано. Докажем его для t. Если не существуют $t_1' < t_2'$ с условиями $(**)$ или существуют, но $t_1' < t <$ $< t_2'$, то $M^t_{\varkappa}(k',j',i') = M^{t-1}_{\varkappa}(k',j',i')$ и для всех $x \in M^t_{\varkappa}(k',j',i')$

справедливо $\varkappa^t(x) = \varkappa^{t-1}(x)$. Следовательно, по индукционному предположению все условия будут выполнены и для t. Если существуют $t_1' < t_2'$ с условиями (**) и $t_1' = t$, то для $t-1$ нет пары $t_1'' < t_2''$ с условиями (**), а, следовательно, $a_{1'} \notin \varkappa^{t-1}(x)$ для всех $x \in M_\varkappa^{t-1}(k',j',i')$. Поскольку на шаге t_1', когда ставится метка $[+]$, ни для каких меток $[k'',j'',i'']$ значения $s_\varkappa^{t_1'}(k'',j'',i'')$, $d_{\varkappa,\varkappa'}^{t_1'}(k'',j'',i'')$, $r_\varkappa^{t_1'}(k'',j'',i'')$ и $l_\varkappa^{t_1'}(k'',j'',i'')$ не изменяются и

$$\varkappa^t(l_\varkappa^t(k',j',i')) = \varkappa^{t-1}(l_\varkappa^t(k',j',i')) \cup \varkappa^{t-1}(s_\varkappa^t(k',j',i')) \cup \{a\},$$

$$\varkappa^t(s_\varkappa^t(k',j',i')) = \varkappa^{t-1}(s_\varkappa^t(k',j',i')) \cup \varkappa^{t-1}(r_\varkappa^t(k',j',i')) \cup \{b\},$$

где $a \neq b$ - числа, не лежащие еще ни в одном множестве, то условие (I) выполнено. Условие (2) также выполнено, так как в нем посылка ложна.

Докажем условие (3). Если $p(t',\varkappa',k',j',i') \neq 1$, то $d_{\varkappa,\varkappa'}^t(k',j',i')$ равно либо $s_\varkappa^t(k',j',i')$, либо $d_{\varkappa,\varkappa'}^{t-1}(k',j',i')$ и $\varkappa^t(d_{\varkappa,\varkappa'}^{t-1}(k',j',i')) = \varkappa^t(d_{\varkappa,\varkappa'}^t(k',j',i'))$.

Из вышедоказанного и предположения индукции во всех случаях $a_{1'} \notin \varkappa^t(d_{\varkappa,\varkappa'}^t(k',j',i'))$, и утверждение доказано. Из этого утверждения следует, что для всех $t \geqslant t_1$ и $1' \notin \bigcup_{t\geq 0} M_\varkappa^t(k',j',i')$ выполнено $\varkappa^t(1') \nsubseteq \varkappa^t(s_\varkappa^t(k',j',i'))$, а так как $l_1 = \lim_{t\to\infty} s_\varkappa^t(k',j',i')$, то $\varkappa(1') \nsubseteq \varkappa(l_1)$. Но для всех k имеет место

$$\varkappa^{t_k}(s_{\varkappa_{t_k}}^{t_k}(k,j,i_0)) \subseteq \gamma_{k,j}(d) = \varkappa^t(l_1).$$

Поэтому существует k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$ при $\varkappa_{t_k} = \varkappa$ выполняется $s_\varkappa^{t_k}(k,j,i_0) \in \bigcup_{t\geq 0} M_\varkappa^t(k',j',i')$. Для разных меток, в силу леммы I, множества $M_{k,j,i}^\varkappa$ не пересекаются, следовательно, $[k,j] = [k',j']$ и $i' = i_0$. Но, по предположению, на $[k',j',i']$ с некоторого шага постоянно стоит метка $[\varkappa']$, а для $[k,j,i_0]$ это не так. Противоречие доказывает, что этот случай выполниться не может.

Пусть $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} d^t_{\varkappa,\varkappa'}(k',j',i')$. Тогда существует $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_{\varkappa'}(k',j',i')$ и, начиная с некоторого t_0, $\varphi^t(\varkappa,\varkappa')(l_1) = l_1'$. Аналогично тому, как это делалось для случая, когда $l_1 = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_{\varkappa}(k',j',i')$, можно показать, что существует шаг t_1 такой, что для всех $t \geq t_1$ и $l' \notin \bigcup\limits_{t\geq 0} M^t_{\varkappa'}(k',j',i')$ выполнено $(\varkappa')^t(l') \not\subseteq \not\subseteq (\varkappa')^t(s^t_{\varkappa'}(k',j',i'))$, а так как $l_1' = \lim\limits_{t\to\infty} s^t_{\varkappa'}(k',j',i')$, то $\varkappa'(l') \not\subseteq \varkappa'(l_1')$. Но для всех k, начиная с некоторого k_0, имеет место

$$(\varkappa')^{t_k}(s^{t_k}_{\varkappa'}(k,j,i_0)) = (\varkappa')^{t_k}(\varphi^{t_k}(\varkappa,\varkappa')s^{t_k}_{\varkappa_{t_k}}(k,j,i_0)) =$$

$$= \varkappa^{t_k}(s^{t_k}_{\varkappa_{t_k}}(k,j,i_0)) \subseteq \gamma_{k,j}(d) = \varkappa(l_1) = \varkappa'(\varphi(\varkappa,\varkappa')(l_1)) = \varkappa'(l_1).$$

Следовательно, существует k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$ выполняется $s^{t_k}_{\varkappa'}(k,j,i_0) \in \bigcup\limits_{t\geq 0} M^t_{\varkappa'}(k',j',i')$. Но для разных меток, в силу леммы I, множества $M^{\varkappa'}_{k',j',i'}$ не пересекаются, следовательно, $[k',j'] = [k,j]$ и $i' = i_0$. По предположению, на $[k',j',i']$ с некоторого шага постоянно стоит $[\varkappa']$, а для $[k,j,i_0]$ это не так. Противоречие показывает, что случай Б невозможен.

Рассмотрим теперь случай В. Покажем, что он тоже не может выполниться. Для этого рассмотрим шаг t_0, после которого в конструкции не используется ни одна $[k,j,i]$, $i \in N$. Заметим, что после шага $5c^{-1}([k,j])+5$ всегда существует $[k,j,i]$, на которой нет $[-]$, если не стоит с некоторого шага $Z_{k,j}$. Если, начиная с шага t_1, на $\langle \varkappa,l,l_1,l_2 \rangle$ стоит $Z_{k,j}$, но $\varkappa^{t_1}(l) \subseteq \subseteq \gamma^{t_1+1}_{k,j}(l_1)$ и $\varkappa^{t_1}(l) \subseteq \gamma^{t_1+1}_{k,j}(l_2)$ и номер l больше в конструкции не используется, то $\varkappa^t(l) = \varkappa^{t_1}(l)$ для всех $t \geq t_1$.

Таким образом, $\varkappa(1) \subseteq \gamma_{k,j}(1_1)$ и $\varkappa(1) \subseteq \gamma_{k,j}(1_2)$, но $\gamma_{k,j}$ - нумерация S, а в S, в силу леммы 8, собственных включений быть не может, поэтому $\gamma_{k,j}(1_1) = \gamma_{k,j}(1_2) = \varkappa(1)$. Но $1_1 \neq 1_2$, а $\gamma_{k,j}$ - однозначная нумерация, поэтому $Z_{k,j}$ не стоит ни на каком шаге. Выберем $[k,j,i_0]$ такую, что на ней нет $[-]$ и i_0 - наибольшее число с таким свойством. Для него не существует $\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$ такой, что $[k,j,i_0] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t_0)$, так как в противном случае определилась бы метка большая, без $[-]$, так как $Z_{k,j}$ не ставится, то $[-]$ может быть поставлена лишь за счет $[k,j,i]$ с наименьшим i, но координата i у нее должна быть больше i_0, так как иначе на $[k,j,i_0]$ была бы поставлена $[-]$. Выберем теперь наименьшее $i_0' \leq i_0$ такое, что на $[k,j,i_0')$ нет $[-]$ & $[k,j,i_0'] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t_0)$ ни для какой $\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$. Если существует t такое, что $[\varkappa]^t_{j,i_0'}$ вполне определена на $D[\varkappa]^{t_0}_{j,i_0'}$, то либо выполнится шаг типа $5t+3$ для $[k,j,i_0']$ после шага t_0, либо существует $i_0'' < i_0'$ такое, что

$$(***) \quad \text{на } [k,j,i_0''] \text{ нет } [-], \ [k,j,i_0''] \in \Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t_0)$$

для некоторой $\langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$, функция $[\varkappa]^t_{j,i_0''}$ не вполне определена на $\varphi^t(\varkappa^*,\varkappa) L^t_{\langle \varkappa^*,n^*,i^* \rangle}$, где на $[k,j,i_0'']$ стоит $[\varkappa]$. Так как после t_0 метки $[k,j,i]$ не используются, то остается только второй случай. Выберем наименьшее i_0'', удовлетворяющее условию $(***)$. Рассмотрим шаг $t_1 > t_0$ такой, что множества $\Pi^{i^{**}}_{\varkappa^{**},m^{**}}(t)$ для $\langle \varkappa^{**}, m^{**}, i^{**} \rangle \underset{lex}{\leq} \langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$ после шага t_1 уже не изменяются и $\langle \varkappa^{**}, m^{**}, i^{**} \rangle$ больше не используется в конструкции. Это возможно в силу леммы 2. Заметим, что $[\varkappa]^t_{j,i_0''}$ вполне определена на $\varphi^t(\varkappa^{**},\varkappa) L^t_{\langle \varkappa^{**},m^{**},i^{**} \rangle}$ для любой $\langle \varkappa^{**}, m^{**}, i^{**} \rangle \underset{lex}{<} \langle \varkappa^*, n^*, i^* \rangle$. Предположим, что это не так, и рассмотрим наименьшую метку $\langle \varkappa^{**}, m^{**}, i^{**} \rangle$, для которой $[\varkappa]^{t_1}_{j,i_0''}$ не вполне определена на $\varphi^{t_1}(\varkappa^{**},\varkappa) L^{t_1}_{\langle \varkappa^{**},m^{**},i^{**} \rangle}$.

Рассмотрим $l_1,\ldots,l_k$ из $L^{t_1}_{\langle \varkappa,m^{**},i^{**},k,j,i_0''\rangle}$. Если значение $[\varkappa]^{t_1}_{j,i_0''}(l_i)$, $1\le i\le k$, определено, то, в силу замечаний II и I2, $\varkappa^{t_1}(l_i)\subseteq \gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_1}_{j,i_0''}(l_i))$ и $\varkappa^t(l_i)=\varkappa^{t_1}(l_i)$ для всех $t\ge t_1$ и $1\le i\le k$. Так как $\gamma_{k,j}$ - нумерация S, то для всех l_i найдутся d_i такие, что $\varkappa^{t_1}(l_i)\subseteq\gamma_{k,j}(d_i)$. Рассмотрим шаг $t_2\ge$ $\ge t_1$ такой, что $\gamma^{t_2}_{k,j}(d_i)\supseteq\varkappa^{t_1}(l_i)$, и шаг $T=5t+2$, где $k=$ $=l(t)$, $j=r(t)\ (\mathrm{mod}\ k)$, $t>t_2$. Тогда на этом шаге для $[k,j,i_0'']$ выполняются условия случая 3 или случая I. Но $z_{k,j}$ не может ставиться, следовательно, $[\varkappa]^T_{j,i_0''}$ определится на $L^{t_1}_{\langle \varkappa,m^{**},i^{**},k,j,i_0''\rangle}$, но это противоречит тому, что никакая $[k,j,i]$ больше не участвует в конструкции. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Если на $\langle \varkappa^*,n^*,i^*\rangle$ нет $[+]$, то аналогично можно показать, что $[\varkappa]^t_{j,i_0''}$ вполне определена на $L^{t_1}_{\langle \varkappa,n^*,i^*\rangle}$. Таким образом, осталось рассмотреть лишь случай, когда на $\langle \varkappa^*,n^*,i^*\rangle$ стоит метка $[+]$.

Пусть $l_1<l_2<\ldots<l_k$ - все элементы из $\mathbb{L}^{t_1}_{\langle \varkappa,n^*,i^*\rangle}$. Рассмотрим шаг $t_2\le t_1$, на котором на $\langle \varkappa^*,n^*,i^*\rangle$ поставлена $[+]$. Тогда $l_1=l^{t_1}_{\varkappa}(k,j,i_0'')$, $l_2=s^{t_1}_{\varkappa}(k,j,i_0'')$, $l_3=r^{t_1}_{\varkappa}(k,j,i_0'')$. Заметим, что, в силу определения случая 3 шага типа $5t+1$, $\varkappa^{t_2-1}(l_{i+1})\subseteq\varkappa^{t_2}(l_{i+1})$ и $\varkappa^{t_2-1}(l_{i+1})\subseteq\varkappa^{t_2}(l_i)$, где $0<i<k$, и $\varkappa^t(l_i)$ для всех $i\le k$ после шага t_2 уже больше не меняется. Так как на $\langle \varkappa^*,n^*,i^*\rangle$ поставлена $[+]$ и $[k,j,i_0'']\in\Pi^{i^*}_{\varkappa^*,n^*}(t_2)$, и $[\varkappa]^{t_2-1}_{j,i_0''}(l_i)$ определено для всех i и

$$\varkappa^{t_2-1}(l_i)\subseteq\gamma^{t_2}_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i_0''}(l_i)) .$$

Так как $\varkappa$ - номера $l_1,l_2,\ldots,l_k$ после шага t_2 больше в конструкции не используются, то нет $l\notin\{l_1,\ldots,l_k\}$ таких, что

$\varkappa^{t}(1) \supseteq \varkappa^{t_2-1}(1_i)$, где $1< i\le k$ и $t \ge t_2$, а поэтому множество $\gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i''_0}(1_i))$ для $1< i\le k$ может содержать лишь один из двух элементов $\varkappa(1_i)$ либо $\varkappa(1_{i-1})$. Если для всех $0< i\le k$ выполняется $\varkappa^{t}(1_i) \subseteq \gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i''_0}(1_i))$, то найдем d_0 и $t_3 > t_1$ такие, что $\varkappa^{t_2}(1_i) \subseteq \gamma^{t_3}_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i_0}(1_i))$ для $1< i\le k$ и $\varkappa^{t_2}(1_i) \subseteq \gamma^{t_3}_{k,j}(d_0)$. Тогда на шаге $T = 5t + 2$ таком, что $k = l(t)$, $j = r(t)(\mathrm{mod}\ k)$ и $t \ge \max\{d_0, t_3\}$, для $[k,j,i''_0]$ выполнится случай 2 и будет проведена конструкция для некоторой $[k,j,i']$, что невозможно. Если же для некоторого i , $1< i\le k$,выполнено $\varkappa^{t_2}(1_{i-1}) \subseteq \gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_2}_{j,i''_0}(1_i))$, то рассмотрим такое наибеньшее i . Если $i>2$, то

$$\gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i''_0}(1_i)) = \varkappa^{t_2}(1_{i-1})$$

и

$$\gamma_{k,j}([\varkappa]^{t_2-1}_{j,i''_0}(1_{i-1})) = \varkappa^{t_2}(1_{i-1}).$$

Но $[\varkappa]^{t_2-1}_{j,i''_0}(1_i) \ne [\varkappa]^{t_2-1}_{j,i_0}(1_{i-1})$, что противоречит однозначности нумерации $\gamma_{k,j}$. Следовательно, $i = 2$. Но тогда рассмотрим шаг $t_3 \ge t_1$ такой, что $\varkappa^{t_2}(1_1) \subseteq \gamma^{t_3}_{k,j}([\varkappa]^{t_2}_{j,i''_0}(1_2))$.На шаге $T = 5t + 2$ таком, что $l(t) = k$, $j = r(t)(\mathrm{mod}\ k)$ и $t\ge t_3$, для $[k,j,i''_0]$ выполнится случай 2 и будет использована в конструкции $[k,j,i]$, что невозможно в силу выбора t_0 . Полученое противоречие завершает доказательство леммы.

Закончим теперь доказательство основной теоремы. Определим $S = \{\mu_{1,1}(n) \mid n \in N\}$. В силу леммы 9, все $\mu_{1,k}$ являются однозначными вычислимыми нумерациями S . Для каждого $n \ge 0$, в силу леммы 10, все нумерации $\mu_{1,n}; \mu_{2,n}; \dots ; \mu_{n,n}$ не эквивалентны друг другу. Таким образом, S имеет бесконечно много неэквивалентных о.в.н. Предположим, что у S есть бесконечный вычислимый класс неэквивалентных между собой о.в.н. Тогда этот класс имеет некоторый номер, пусть это $K_m = \{\gamma_{0,m}; \gamma_{1,m}; \dots\}$. Но тогда, в силу леммы II, для каждой $\gamma_{i,m}$ из первых $m+1$ нумераций $\gamma_{0,m}; \gamma_{1,m}; \dots$ $\dots; \gamma_{m,m}$ существует о.р.ф., которая сводит $\gamma_{i,m}$ к какой-нибудь нумерации из $\{\mu_{1,m}; \mu_{2,m}; \dots; \mu_{m,m}\}$. Следовательно, среди нумераций $\gamma_{0,m}; \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{m,m}$ хотя бы две нумерации эквивалентны, что противоречит выбору класса K_m . Полученное противоречие доказывает теорему.

Используя функтор F_S из категории Un_S в подкатегорию $K^{\sigma}(\mathfrak{M}_S)$ категории K^{σ} [2], нетрудно установить справедливость следующих утверждений.

СЛЕДСТВИЕ I. Существует конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$ такая, что $\dim_A(\mathfrak{A}) = \omega$, но класс всех конструктивизаций не эффективно бесконечен.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$ такая, что $\dim_A(\mathfrak{A}) = \omega$, но не существует бесконечных вычислимых классов неэквивалентных конструктивизаций.

Модификация метода, используемого при доказательстве предыдущей теоремы, позволяет построить пример автоустойчивой, но не "равномерно автоустойчивой" конструктивизируемой модели.

ТЕОРЕМА 2. Существует жесткая конструктивизируемая автоустойчивая модель $\mathfrak{A}$ и вычислимая последовательность $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ конструктивизаций модели $\mathfrak{A}$, для которых не существует эффективной процедуры $P(x,y,z)$, выдающей по номерам i и j конструктивизаций μ_i и μ_j из π и номеру m частичного конечного автоморфизма α_m номер о.р.ф f, расширяющей α_m до сведения μ_i к μ_j.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существуют жесткая конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$, отношение R на модели $\mathfrak{A}$ и вычислимая последовательность $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ конструктивизаций модели , для которых не существует эффективной процедуры $P(x)$, выдающей по номеру i конструктивизации μ_i номер о.р.ф., перечисляющей $\mu_i^{-1}(R(\alpha))$.

Автор благодарен С.С.Гончарову за плодотворное обсуждение и постоянное внимание к работе.

Литература

I. Логическая тетрадь: Нерешенные вопросы математической логики (оперативно-информационный материал).- Новосибирск. - 1986.- 4I с. - (АН СССР.Сиб.отд-ние. Ин-т математики).

2. ГОНЧАРОВ С.С. Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций// Алгебра и логика.- 1980.- Т.19,№ 6. - С.621-639.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Вычислимые однозначные нумерации//Алгебра и логика. - 1980. - Т.19, № 5. - С.507-551.

4. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции.-М.: Наука.- 1965. - 39I с.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 января 1987 года