АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 121

УДК 519.65

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Ю.С. Волков

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах сетки $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения $f_i = f(x_i), i = 0,1,\ldots,N$, функции $f(x)$. Предположим также, что в некоторых узлах сетки Δ известны значения производной функции f.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о построении кубического сплайна $S(x)$ класса C^2, интерполирующего заданные значения функции и ее производной. Решение задачи достигается путем введения дополнительных узлов сплайна в окрестности точек, в которых заданы значения производных. Показывается, что построение такого сплайна сводится к решению системы уравнений, имеющей трехдиагональную матрицу с диагональным преобладанием. Отметим, что как частный случай предлагаемая конструкция содержит обычные кубические сплайны класса C^2 (когда производные не заданы во внутренних узлах сетки Δ) и кубические сплайны с дополнительными узлами (производные заданы во всех узлах сетки Δ) [1].

Пусть J - множество индексов j узлов сетки Δ, в которых заданы значения производной $f'_j = f'(x_j)$. Таким образом, перед нами стоит задача построения кубического сплайна $S(x) \in C^2[a,b]$, удовлетворяющего условиям $S(x_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,N$; $S'(x_j) = f'_j$, $j \in J$.

Обозначим $M_i = S''(x_i)$, $i=0,\ldots,N$; $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\ldots,N-1$; $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$, $i=1,\ldots,N-1$. Введем сетку

$$\delta = \{x_i \mid i \notin J\} \cup \{x_j + \alpha h_j \mid j \in J\setminus\{N\}\} \cup \{x_j - \alpha h_{j-1} \mid j \in J\setminus\{0\}\} \cup \{x_0, x_N\},$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, и будем строить сплайн $S(x)$ с узлами на δ. Следовательно, если в точке x_j задано значение f'_j, то в этой точке $S'''(x)$ непрерывна.

Кусочно-кубический полином $p(t)$ на отрезке $[0,1]$ с разрывами третьей производной в точках α и $\beta=1-\alpha$ можно записать через значения $p(0)$, $p(1)$, $p'(0)$, $p'(1)$, $p''(0)$, $p''(1)$ в виде:

$$p(t)=\frac{1}{6}At^3+\frac{1}{2}p''(0)t^2+p'(0)t+p(0)+c_1(t-\alpha)_+^3+c_2(t-\beta)_+^3, \quad (1)$$

где

$$c_1=\frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}\{p(0)-p(1)+\frac{1}{3}[(1+\beta)p'(0)+(1+\alpha)p'(1)]+\frac{1}{6}[\beta p''(0)-\alpha p''(1)]\},$$

$c_2(\alpha,\beta)=c_1(\beta,\alpha)$, $A=p''(1)-p''(0)-6\beta c_1-6\alpha c_2$, $t_+=(t+|t|)/2$.

Если в точке α или β третья производная непрерывна, то должно выполняться равенство $c_1=0$ или $c_2=0$ соответственно.

На каждом интервале $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,N-1$, в зависимости от того, известны ли f'_i и f'_{i+1}, сплайн $S(x)$ можно представить формулой (1), заменив t на $(x-x_i)/h_i$ и $p(0)$, $p(1)$, $p'(0)$, $p'(1)$, $p''(0)$, $p''(1)$ на f_i, f_{i+1}, f'_i, f'_{i+1}, M_i, M_{i+1} соответственно. Причем, естественно, если f'_i не задано, то должно выполняться условие $c_1=0$, которое позволяет выразить $p'(0)$ в виде

$$p'(0)=\frac{1}{1+\beta}[3p(1)-3p(0)-(1+\alpha)p'(1)-\frac{\beta}{2}p''(0)+\frac{\alpha}{2}p''(1)]$$

и исключить его из (1). Аналогично в случае, когда не задано f'_{i+1}, исключаем

$$p'(1)=\frac{1}{1+\beta}[3p(1)-3p(0)-(1+\alpha)p'(0)-\frac{\alpha}{2}p''(0)+\frac{\beta}{2}p''(1)].$$

Наконец, когда не заданы и f'_i и f'_{i+1}, имеем

$$p'(0)=p(1)-p(0)-\frac{1}{3}p''(0)-\frac{1}{6}p''(1),$$

$$p'(1)=p(1)-p(0)+\frac{1}{6}p''(0)+\frac{1}{3}p''(1).$$

В итоге при $x\in[x_i,x_{i+1}]$ для $S(x)$ получаем представление

$$S(x)=\left(\frac{1}{6}\frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}-\beta c_{1i}-\alpha c_{2i}\right)\cdot(x-x_i)^3+\frac{1}{2}M_i(x-x_i)^2+$$

$$+F_i(x-x_i)+f_i+c_{1i}(x-x_i-\alpha h_i)_+^3+c_{2i}(x-x_i-\beta h_i)_+^3, \quad (2)$$

где

$$c_{1i}=\frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)h_i^2}\left\{\frac{f_i-f_{i+1}}{h_i}+\frac{1}{3}\left[(1+\beta)F_i+(1+\alpha)G_i\right]+\frac{h_i}{6}(\beta M_i-\alpha M_{i+1})\right\},$$

$$c_{2i}=\frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)h_i^2}\left\{\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{1}{3}\left[(1+\alpha)F_i+(1+\beta)G_i\right]-\frac{h_i}{6}(\alpha M_i-\beta M_{i+1})\right\},$$

а коэффициенты F_i, G_i выражаются в зависимости от наличия информации о значениях производных в узлах сетки Δ следующим образом:

I) $i,i+1\in J$ (f_i' и f_{i+1}' заданы): $F_i=f_i'$, $G_i=f_{i+1}'$;

2) $i\in J$, $i+1\notin J$ (задано f_i'):

$$F_i=f_i',\quad G_i=\frac{1}{1+\beta}\left[3\,\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-(1+\alpha)f_i'-\frac{\alpha}{2}M_ih_i+\frac{\beta}{2}M_{i+1}h_i\right];$$

3) $i\notin J$, $i+1\in J$ (задано f_{i+1}'):

$$F_i=\frac{1}{1+\beta}\left[3\,\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-(1+\alpha)f_{i+1}'-\frac{\beta}{2}M_ih_i+\frac{\alpha}{2}M_{i+1}h_i\right],\quad G_i=f_{i+1}';$$

4) $i,i+1\notin J$ (f_i' и f_{i+1}' не заданы):

$$F_i=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{1}{3}M_ih_i-\frac{1}{6}M_{i+1}h_i,\quad G_i=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}+\frac{1}{6}M_ih_i+\frac{1}{3}M_{i+1}h_i.$$

Функция $S(x)$, определяемая формулой (2), удовлетворяет всем интерполяционным условиям. Потребуем, чтобы $S(x)\in C^2[a,b]$. Пусть $i\notin J\cup\{0,N\}$, тогда $x_i\in\delta$ и f_i' не задано. Приравнивая $S'(x_i-0)$ и $S'(x_i+0)$, получаем

1) $i-1\notin J$, $i+1\notin J$:

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right); \qquad (3)$$

2) $i-1\notin J$, $i+1\in J$:

$$\mu_iM_{i-1}+\left(2\mu_i+3\frac{\beta}{1+\beta}\lambda_i\right)M_i-3\frac{\alpha}{1+\beta}\lambda_iM_{i+1}=$$

$$=\frac{6}{h_i+h_{i-1}}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{1+\alpha}{1+\beta}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-f_{i+1}'\right)\right]; \qquad (4)$$

3) $i-1 \in J,\ i+1 \notin J$:

$$-3\frac{\alpha}{1+\beta}\mu_i M_{i-1}+\left(3\frac{\beta}{1+\beta}\mu_i+2\lambda_i\right)M_i+\lambda_i M_{i+1}=$$

$$=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{1+\alpha}{1+\beta}\left(f'_{i-1}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\right];\quad(5)$$

4) $i-1 \in J,\ i+1 \in J$:

$$-\alpha\mu_i M_{i-1}+\beta M_i-\alpha\lambda_i M_{i+1}=\frac{2}{h_{i-1}+h_i}\left[(1+\beta)\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+(1+\alpha)\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-f'_{i+1}+f'_{i-1}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\right].\quad(6)$$

Пусть теперь $i \in J\setminus\{0,N\}$. В этом случае $x_i \notin \delta$, следовательно, необходимо потребовать равенство значений $S'''(x_i-0)$ и $S'''(x_i+0)$. Возможны следующие ситуации:

1) $i-1 \in J,\ i+1 \in J$:

$$-\alpha\beta\lambda_i M_{i-1}+(1+\alpha\beta)M_i-\alpha\beta\mu_i M_{i+1}=6\left[\frac{\mu_i}{h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f'_{i+1}+2f'_i}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{2f'_i+f'_{i-1}}{3}\right)\right];\quad(7)$$

2) $i-1 \notin J,\ i+1 \in J$:

$$\frac{\beta^3}{1+\beta}\lambda_i M_{i-1}+\left(\alpha\beta+\frac{2\beta}{1+\beta}\lambda_i+\mu_i\right)M_i-\alpha\beta\mu_i M_{i+1}=$$

$$=6\left[\frac{\mu_i}{h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f'_{i+1}+2f'_i}{3}\right)-\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}\cdot\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}-f'_i\right)\right];\quad(8)$$

3) $i-1 \in J,\ i+1 \notin J$:

$$-\alpha\beta\lambda_i M_{i-1}+\left(\alpha\beta+\frac{2\beta}{1+\beta}\mu_i+\lambda_i\right)M_i+\frac{\beta^3}{1+\beta}\mu_i M_{i+1}=$$

$$=6\left[\frac{\mu_i}{h_i}\cdot\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-f'_i\right)-\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{2f'_i+f'_{i-1}}{3}\right)\right];\quad(9)$$

4) $i-1 \notin J$, $i+1 \notin J$:

$$\beta^2\lambda_i M_{i-1} + (3-\beta^2)M_i + \beta^2\mu_i M_{i+1} =$$

$$= 6\left[\frac{\mu_i}{h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - f_i'\right) - \frac{\lambda_i}{h_{i-1}}\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}} - f_i'\right)\right]. \qquad (10)$$

Выведенные соотношения (3)-(10), $i = 1,\dots,N-1$, образуют систему $N-1$ линейных уравнений относительно $N+1$ неизвестных $M_0,\dots$ $\dots,M_N$. Для ее замыкания необходимы еще два уравнения, для получения которых будем использовать краевые условия, задаваемые на концах отрезка $[a,b]$.

Ограничимся рассмотрением краевых условий следующих типов:

I. $S''(a) = f_0''$, $S''(b) = f_N''$,

II. $S'''(a+\alpha h_0-0) = S'''(a+\alpha h_0+0), S'''(b-\alpha h_{N-1}-0)=S'''(b-\alpha h_{N-1}+0)$

(если заданы f_0' и f_N').

Для краевых условий первого типа недостающие уравнения системы имеют вид: $M_0 = f_0''$, $M_N = f_N''$. При задании краевых условий второго типа считаем, что множество J не содержит индексы $i=0$ и $i=N$ и, следовательно, $x_0 + \alpha h_0 \notin \delta$, $x_{N-1} + \beta h_{N-1} \notin \delta$. В этом случае замыкающие уравнения берем в виде:

$$\left.\begin{aligned} &2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1-f_0}{h_0} - f_0'\right), \quad \text{если} \quad 1 \notin J;\\ &\beta M_0 - \alpha M_1 = \frac{2}{h_0}\left[3\,\frac{f_1-f_0}{h_0} - (1+\alpha)f_1' - (1+\beta)f_0'\right], \quad \text{если} \quad 1 \in J; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_{N-1}}\left(f_N' - \frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}\right), \quad \text{если} \quad N-1 \notin J;\\ &\alpha M_{N-1} - \beta M_N = \frac{2}{h_{N-1}}\left[(1+\beta)f_N' + (1+\alpha)f_{N-1}' - 3\,\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}\right], \quad \text{если} \quad N-1 \in J. \end{aligned}\right\}$$

Краевые условия типа I можно использовать и при неизвестных значениях $f''(a)$ и $f''(b)$, если заменить f_0'' и f_N'' подходящей разностной аппроксимацией, используя известные значения функции и производной в приграничных узлах сетки Δ.

Таблица I

k	$10^5R_k^{(0)}$	$10^4R_k^{(1)}$	$10^2R_k^{(2)}$
I	25	46	8.7
2	5.8	I3	I0
3	I2	I8	7.6
4	5.9	II	8.9
5	25	46	I0

Таблица 2

k	$10^5R_k^{(0)}$	$10^4R_k^{(1)}$	$10^2R_k^{(2)}$
I	27	49	7.9
2	2.2	I8	9.3
3	0.7	2.I	2.0
4	2.3	I4	8.2
5	27	49	9.3

Таблица 3

α	$10^5R_3^{(0)}$	$10^4R_3^{(1)}$	$10^2R_3^{(2)}$
0.05	9.3	I5	5.9
0.I	7.9	I2	4.2
0.I5	5.4	9.2	3.0
0.2	3.0	5.6	2.3
0.23	I.3	3.5	2.I
0.24	0.6	2.9	2.0
0.25	0.7	2.I	2.0
0.26	I.0	2.6	2.0
0.27	I.2	3.4	2.0
0.3	3.0	5.7	2.2
0.35	5.5	9.6	3.0
0.4	8.0	I3	4.2
0.45	9.7	I5	6.0

Матрица получаемой системы уравнений во всех рассмотренных случаях имеет строгое диагональное преобладание, следовательно, исходная задача однозначно разрешима. Наиболее эффективный метод решения данной системы - метод прогонки.

После того как величины $M_0,\ldots,M_N$ найдены, значения сплайна и его производных в любой точке отрезка $[a,b]$ вычисляются по формуле (2).

В заключение приведем результаты численных экспериментов, демонстрирующие полезность использования известной дополнительной информации о производной интерполируемой функции. Расчеты проводились с краевыми условиями типа I на ЭВМ HP-2000.

В табл.I для функции $f(x)=x^4$ на отрезке $[I,2]$ приведены величины $R_k^{(r)}=\max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|$ при интерполяции на равномерной сетке с шагом $h=0.2$ обычным кубическим сплайном. В табл.2 при расчетах использованы значения производной в узлах $x_2=1.4$ и $x_3=1.6$ при значении параметра $\alpha=0.25$.

Зависимость погрешности на интервале $[x_2,x_3]$ от параметра α отражена в табл.3. Наибольшая точность достигается при выборе па-

Т а б л и ц а 4

J	k									
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
$\varnothing$	0.4	I.2	I.8	2.3	2.6	2.6	2.3	I.8	I.2	0.5
{5}	0.4	I.2	I.7	2.9	0.7	0.7	2.9	I.7	I.2	0.5
{4}	0.5	I.I	2.3	0.7	0.7	3.I	2.2	I.9	I.2	0.5
{4,6}	0.5	I.I	2.3	0.7	I.I	I.I	0.8	2.3	I.I	0.5
{4,5,6}	0.5	I.I	2.4	0.6	0.2	0.2	0.6	2.4	I.I	0.5
{4,5}	0.5	I.I	2.4	0.6	0.I	0.6	2.9	I.7	I.2	0.5
{3,4,5,6}	0.3	I.6	0.5	0.2	0.2	0.2	0.6	2.4	I.I	0.5

Т а б л и ц а 5

J	k									
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
$\varnothing$	0.5	0.0I	0.09	0.67	I0.2	I02	3.35	2.8	5.0	74
{5}	0.5	0.0I	0.07	0.I8	I.63	39.2	I.93	2.0	4.8	74
{5,6}	0.5	0.0I	0.06	0.I3	I.20	6.0	0.II	0.9	4.4	73
{4,5,6}	0.5	0.0I	0.04	0.04	0.35	5.6	0.II	0.9	4.4	73
{9}	0.5	0.0I	0.09	0.67	I0.2	I02	3.29	2.4	I.6	I9
{I0}	0.5	0.0I	0.09	0.67	I0.2	I02	3.28	2.3	2.3	2I
{9,I0}	0.5	0.0I	0.09	0.67	I0.2	I02	3.29	2.4	I.3	2.6
{4,5,6,9,I0}	0.5	0.0I	0.04	0.04	0.35	5.7	0.08	0.5	2.0	2.8

раметра α, близкого к 0.25. Этот вывод согласуется с результатами, полученными в [I] для случая задания производных во всех узлах сетки Δ.

В табл.4 и 5 для функции $f(x)=\sin(\pi x)$ на отрезке [I,2] приведена зависимость погрешности интерполяции f (умноженной на 10^5) на каждом интервале $[x_{k-1},x_k]$ от множества J узлов сетки, где известны значения производной. В табл.4 сетка-равномерная с h = 0.I. В табл.5 сетка-неравномерная с узлами I, I.09, I.I, I.I4, I.I9, I.3, I.53, I.57, I.64, I.76, 2.

Приведенные данные показывают, что точность приближения функции и ее производных существенно увеличивается в окрестности узлов с заданными значениями производной.

И последний пример касается интерполяции разрывных функций. Известно, что интерполяция функций, имеющих разрывы первого рода (скачки), обычными кубическими сплайнами класса C^2 приводит к появлению нежелательных осцилляций. В [1] на примере интерполяции "ступеньки"

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

на равномерной сетке с шагом $h = 1/19$ показано, что подобные функции хорошо приближаются сплайнами с дополнительными узлами. Выполненные нами расчеты свидетельствуют о том, что для погашения осцилляций достаточно задать производные только в двух ближайших к месту разрыва узлах сетки и положить α близким к нулю.

Автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко за полезные обсуждения данной работы.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
24 апреля 1987 года