

УДК 681.332.51

**ОЦЕНКА ФОРМЫ КРИВОЙ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ
 СПЛАЙНОМ**

В.П. Васильев

Значительное место в системах автоматизированного проектирования занимает задача конструирования линий и поверхностей. Часто при этом возникает задача восполнения данных: дано множество опорных точек $\{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 0, \dots, N$, требуется провести через них плавную кривую или поверхность. Хорошо известно, что в этом случае наиболее удобным является параметрическое задание уравнений, моделирующих геометрические объекты. Например, плоская кривая моделируется вектор-функцией

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)], \tag{1}$$

а пространственная кривая вектор-функцией

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]. \tag{2}$$

Исходная задача восполнения данных превращается в задачу нахождения компонент векторных объектов (1), (2). Если компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ищутся в виде сплайнов, то вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется параметрическим сплайном [1,2]. Однако при использовании параметрических моделей, в частности параметрических сплайнов, на кривой могут появиться не свойственные ей особенности в виде перегибов, возвратов, петель и т.д. Эти особенности формы моделируемой кривой обусловлены используемым методом интерполяции и потому в дальнейшем именуется ложными. В работе [3] исследованы особенности, возникающие при моделировании плоской кривой параметрическим кубическим локальным сплайном. Практика моделирования точечно-заданных кривых параметрическими сплайнами показала, что эффекты, подобные рассмотренным в [3], имеют место и в случае моделирования кривых нелокальными N -звенными сплайнами.

Цель данной работы - оценить качество моделирования плоской кривой параметрическим кубическим или параболическим N -звенным сплайном и получить количественные оценки влияния на форму кривой распределения опорных точек и краевых условий, задаваемых в точках \bar{r}_0, \bar{r}_N .

I. Математическая постановка задачи

Пусть в плоскости декартовой системы координат задано упорядоченное множество точек $\bar{r}_i = \{x_i, y_i\}$, $i = 0, \dots, N$, а в точках с номерами 0 и N определены направления касательных векторов угловыми коэффициентами y'_0 и y'_N .

Математическую модель линии, проходящей через точки \bar{r}_i и имеющей в конечных точках \bar{r}_0, \bar{r}_N заданные направления касательных векторов, будем искать в виде параметрического сплайна, каждое звено которого представлено в виде разложения по нормированным B -сплайнам:

$$\bar{r}_i(t) = \sum_{k=0}^m \bar{c}_{i+k-m} B_k(t), \quad t \in [0,1], \quad i = 0, \dots, N, \quad (3)$$

где $m = 2$ или $m = 3$ - степень сплайна.

Функции $B_k(t)$ [1,2] определяются по формулам:

$$B_{k-1}(t) = \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} a_{k,j} t^{m-j+1}, \quad k = 1, \dots, m+1, \quad (4)$$

где $a_{k,j}$ - элементы матрицы A , которая имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad m = 2; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad m = 3.$$

Решение задачи о построении математической модели линии состоит в вычислении векторных коэффициентов $\bar{c}_i = (c_i^x, c_i^y)$ параметрического сплайна.

Для однозначного определения этих коэффициентов нам понадобится перейти от задания направлений краевых касательных в декартовой плоскости к параметрической, т.е. определить направляющие косинусы вектора $\bar{r} = (\tau_x, \tau_y)$. Компоненты \bar{r} определяются из век-

торного равенства

$$\bar{\tau} = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right), \quad \lambda = \text{const}, \quad (5)$$

выполняющегося в соответствующих опорных точках.

Множество $G: \{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_0, \bar{\tau}_N\}$ назовем опорным базисом кривой.

Опорный базис назовем выпуклым (вогнутым), если на его дугах выполняются неравенства:

$$K_{1,1} = (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_{1-1}) \times (\bar{\tau}_{1+1} - \bar{\tau}_1) > 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$K_{0,1} = \bar{\tau}_0 \times (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_0) > 0, \quad K_{N,1} = \bar{\tau}_N \times (\bar{\tau}_N - \bar{\tau}_{N-1}) \quad (7)$$

(для вогнутого базиса знак $>$ всюду заменяется на $<$). Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\bar{a} \times \bar{b} = a_x b_y - a_y b_x$, где $\bar{a} = (a_x, a_y)$, $\bar{b} = (b_x, b_y)$.

Для оценки формы моделируемой линии будем использовать выражение кривизны кривой

$$J = \frac{\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)}{|\bar{r}'|^3}. \quad (8)$$

Числитель в (8) характеризует "волнистость" линии (ее форму), знаменатель - величину этой "волнистости". Поэтому для оценки формы линии будем исследовать знак выражения

$$K(t) = \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t). \quad (9)$$

Подставляя (3) в (9) и учитывая (4), после выполнения преобразований получаем

$$K_1(t) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^1 (\bar{\sigma}_{i+k-m} \times \bar{\sigma}_{i+1-m}) \varphi_{1,k}(t), \quad (10)$$

где $\varphi_{1,k}(t) = V_1''(t) \cdot V_1'(t) - V_1''(t) V_1'(t)$. Для $m = 2$ функции $\varphi_{1,k}(t)$ являются константами

$$\varphi_{0,1} = \varphi_{1,2} = -1, \quad \varphi_{0,2} = 1. \quad (11)$$

Для $m = 3$ $\varphi_{1,k}(t)$ являются полиномами второй степени, вид которых приведен в таблице. Все они знакоопределены на отрезке $[0,1]$.

Т а б л и ц а

Выражения функций $\varphi_{1,k} = V_1'' V_k' - V_k'' V_1'$ и их экстремумы

1, k	$\varphi_{1,k}(t)$	$\min_t \varphi_{1,k}(t)$	$\max_t \varphi_{1,k}(t)$
0,1	$-(1-t)(2-t)/2$	-1	0
0,2	$(t-1)^2$	0	1
0,3	$t(1-t)/2$	0	1/8
1,2	$-(3t^2 - 3t + 2)/2$	-1	-5/8
1,3	t^2	0	1
2,3	$-t(1+t)/2$	-1	0

Математическая постановка задачи состоит в определении условий, при которых выпуклостью базиса (выполнение неравенств (6), (7)) гарантируется выпуклость моделируемой кривой, т.е. выполнение неравенств $K_i(t) > 0$, $t \in [0,1]$ (для вогнутого базиса $K_i(t) < 0$).

2. Выражения для коэффициентов сплайна

Зафиксируем в формуле (3) для разных $i = 0,1,2,\dots$ значения параметра t , причем для $m=2$ положим $t=0,5$ [4], а для $m=3$ $t=0$. Полученное выражение приравняем значению координат точки \bar{r}_i . Задача определения коэффициентов \bar{c}_i сведется к решению системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\bar{c}_{-m} + \bar{c}_{-m+2} &= 2\bar{r}_0 \lambda_0, \\ \bar{c}_{i-m} + a\bar{c}_{i-m+1} + \bar{c}_{i-m+2} &= \bar{b}_i, \quad i = 0, \dots, N, \\ -\bar{c}_{N-m} + \bar{c}_{N-m+2} &= 2\bar{r}_N \lambda_N, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $a = 6$, $\bar{b}_i = 8\bar{r}_i$ для $m=2$ и $a = 4$, $\bar{b}_i = 6\bar{r}_i$ для $m=3$.

В [5] получены явные формулы для решения системы (12). Однако они имеют довольно громоздкий вид. Но при $N > 4$ из этих формул легко получить следующие приближенные выражения для величин \bar{c}_i :

$$(-1)^i \bar{c}_i = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}} \left\{ (-1)^N \lambda_N \bar{r}_N q^{N+1-m-i} - \lambda_0 \bar{r}_0 q^{i+m-1} \right\} + \\ + \sqrt{m} \left\{ \sum_{k=-m+1}^i (-1)^k q^{i-k} \bar{r}_{k+m-1} + \sum_{k=i+1}^{N+1-m} (-1)^k q^{k-i} \bar{r}_{k+m-1} \right\}, \quad (13)$$

где $q = 3 - 2\sqrt{2}$ для $m = 2$ и $q = 2 - \sqrt{3}$ для $m = 3$.

Рассмотрим следующее преобразование конечной суммы :

$$a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n = (a_0 - a_1) + (1+r)(a_1 - a_2) + \dots + \\ + (1 + r + \dots + r^n)(a_n - a_{n+1}) = \\ = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1-r^j}{1-r} (a_{j-1} - a_j) = \frac{1}{1-r} \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n+1} r^j (a_j - a_{j-1}) \right\}, \quad (14)$$

где $r \neq 1$ и формально введена величина $a_{n+1} = 0$. Оно заключается в выполнении над конечной суммой преобразования Абеля и последующей свертке коэффициентов по формуле суммы геометрической прогрессии. В дальнейшем преобразование (14) будет именоваться AG-преобразованием. Выполняя над конечными суммами (13) последовательно AG-преобразования, получаем

$$\frac{\bar{c}_i}{\sqrt{m}} = \bar{r}_i + \bar{r}_{i+m-1} - \sum_{k \geq 0} z^{k+1} \nabla^k \bar{r}_{i+m-2} - \sum_{k \geq 0} z^{k+1} \Delta_k \bar{r}_{i+m}, \quad (15)$$

где

$$\bar{r}_i = \frac{1}{m} \left\{ (-1)^{N+m+i} \lambda_N \bar{r}_N q^{N+1-m-i} - (-1)^{i+m} \lambda_0 \bar{r}_0 q^{i+m-1} \right\}, \quad (16)$$

$\nabla^k \bar{r}_i, \Delta_k \bar{r}_i$ - левые и правые конечные разности k -го порядка в точке \bar{r}_i ; $z = q/(1+q) < 1$. При вычислении конечных разностей в (15) считаем $\bar{r}_j = 0$, если $j < 0$ или $j > N$.

Примечание редактора. Формулы (13) справедливы только для $i = -m + 2, \dots, N - m$. При $i = -m, -m+1; N-m+1, N-m+2$ в (13) сохраняются лишь слагаемые, содержащие $\lambda_0 \bar{r}_0, \lambda_N \bar{r}_N$. Выражения коэффициентов $\bar{c}_{-m}, \bar{c}_{-m+1}$ и $\bar{c}_{N-m+1}, \bar{c}_{N-m+2}$ можно найти из первых двух или последних двух уравнений системы (12).

Заметим, что при $N-i > 4$ и $i > 0$ величиной R_1 в выражении (15) можно пренебречь. Кроме того, учитывая, что $z < 1/4$, при вычислении сумм в правой части (15) можно ограничиться небольшим числом слагаемых. Имеет место следующая приближенная формула:

$$\frac{\bar{c}_i}{\sqrt{m}} = \bar{r}_{i+m-1} - \sum_{k=0}^j z^{k+1} (\nabla^k \bar{r}_{i+m-2} + \Delta_k \bar{r}_{i+m}), \quad (17)$$

$$j = \min(i, N-i),$$

которая позволяет с высокой точностью вычислять коэффициенты \bar{c}_i при $0 < i < N-4$.

3. Оценка формы кривой

Для кривой, моделируемой квадратичным сплайном, выражение (10) в силу (II) не зависит от параметра t и имеет вид:

$$\begin{aligned} K_{i+1} &= \bar{c}_{i-1} \times \bar{c}_i - \bar{c}_{i-1} \times \bar{c}_{i+1} + \bar{c}_i \times \bar{c}_{i+1} = \\ &= (\bar{c}_i - \bar{c}_{i-1}) \times (\bar{c}_{i+1} - \bar{c}_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Для оценки формы кривых, моделируемых кубическими сплайнами, вследствие квадратичности $\varphi_{1,k}(t)$, нужно решить две задачи:

1) определить условия, при которых выпуклость моделируемой кривой в конечных точках дуги $\overline{r_i r_{i+1}}$ будет определяться ее ба-зисом;

2) определить условия, при которых внутри дуги не появятся ложные осцилляции.

Для первой задачи из (10), используя таблицу функций $\varphi_{1,k}(t)$, нетрудно найти

$$K_{i+2}(0) = K_{i+1}(1) = (\bar{c}_i - \bar{c}_{i-1}) \times (\bar{c}_{i+1} - \bar{c}_i). \quad (19)$$

Так как правые части (18) и (19) совпадают, то дальнейшие рассуждения будут проведены только для кубических сплайнов. Решение второй задачи сводится к исследованию нулей квадратичного трехчлена на отрезке $[0, 1]$.

При решении первой задачи мы сначала рассмотрим те сегменты моделируемой кривой, на которых влиянием граничных условий можно пренебречь, т.е. когда применима формула (17). Затем для крайних дуг кривой, где влияние граничных условий максимально, решается вопрос о допустимых значениях коэффициентов λ_0, λ_N .

Подставляя выражения для коэффициентов \bar{c}_1 из (17) в (19) и ограничиваясь линейными членами относительно q , получаем

$$(\bar{c}_1 - \bar{c}_{i-1}) \times (\bar{c}_{i+1} - \bar{c}_i) \approx \Delta \bar{r}_{i+1} \times \Delta \bar{r}_{i+2} - \\ - q(\Delta \bar{r}_i \times \Delta \bar{r}_{i+2}) - q(\Delta \bar{r}_{i+1} \times \Delta \bar{r}_{i+3}).$$

Отсюда ясно, что при выполнении неравенств

$$|\Delta \bar{r}_i \times \Delta \bar{r}_{i+1}| > q(|\Delta \bar{r}_i \times \Delta \bar{r}_{i+2}| + |\Delta \bar{r}_{i-1} \times \Delta \bar{r}_{i+1}|) \quad (20)$$

форма моделируемой кривой в окрестности опорных точек будет определяться ее базисом.

Для определения допустимых длин векторов касательных нужно провести исследования выражения (19) на первой и последней дугах кривой. На этих дугах влияние этих факторов на форму кривой наибольшее.

Из первого уравнения системы (12) имеем

$$\bar{c}_{-2} - \bar{c}_{-3} = 2\lambda_0 \bar{r}_0 - (\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2}). \quad (21)$$

Далее, используя второе и третье уравнения этой системы, находим

$$(\bar{c}_{-2} - \bar{c}_{-3}) + 4(\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2}) + (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) = 6\Delta \bar{r}_0,$$

что в сочетании с (21) дает

$$\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2} = 2\Delta \bar{r}_0 - 2\lambda_0 \bar{r}_0 / 3 - (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) / 3. \quad (22)$$

Теперь из (19), учитывая (21), (22), получаем

$$k_0(0) = (\bar{c}_{-2} - \bar{c}_{-3}) \times (\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2}) = 2\lambda_0 \bar{r}_0 \times (\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2}) = \\ = 2\lambda_0 \bar{r}_0 \times [2\Delta \bar{r}_0 - (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) / 3], \quad (23)$$

$$k_0(1) = (\bar{c}_{-1} - \bar{c}_{-2}) \times (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) = 2\Delta \bar{r}_0 \times (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) - \\ - 2\lambda_0 \bar{r}_0 \times (\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}) / 3. \quad (24)$$

Ограничиваясь слагаемыми первого порядка относительно q , из (13) находим

$$\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1} \approx \frac{\lambda_0 q \bar{r}_0}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} (\Delta \bar{r}_1 - q\Delta \bar{r}_0 - q\Delta \bar{r}_2).$$

Подставляя это выражение в (23), (24), имеем

$$\kappa_0(0) = \frac{2\lambda_0}{2-q} \bar{r}_0 \times [(4-q)\Delta \bar{r}_0 - \Delta \bar{r}_1 + q\Delta \bar{r}_2],$$

$$\kappa_0(1) = \frac{2}{2-q} (3\Delta \bar{r}_0 - \lambda_0 \bar{r}_0) \times [(1-q)\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1].$$

В итоге, для того чтобы выпуклость кривой вблизи первой и второй опорных точек определялась базисом, в линейном приближении необходимо выполнение условий:

$$(4-q) |\bar{r}_0 \times \Delta \bar{r}_0| > |\bar{r}_0 \times \Delta \bar{r}_1| + q |\bar{r}_0 \times \Delta \bar{r}_2|, \quad (25)$$

$$\lambda_0 \leq \frac{3 |\Delta \bar{r}_0 \times (\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1)|}{|\bar{r}_0 \times (\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1)|}. \quad (26)$$

Проделав такой же анализ для последней дуги кривой, приходим к условиям:

$$(4-q) |\bar{r}_N \times \nabla \bar{r}_N| > |\bar{r}_N \times \nabla \bar{r}_{N-1}| + q |\bar{r}_N \times \nabla \bar{r}_{N-2}|, \quad (27)$$

$$\lambda_N \leq \frac{3 |\nabla \bar{r}_N \times (\nabla \bar{r}_{N-1} + q \nabla^2 \bar{r}_{N-1})|}{|\bar{r}_N \times (\nabla \bar{r}_{N-1} + q \nabla^2 \bar{r}_{N-1})|}. \quad (28)$$

Если вектор \bar{r}_0 коллинеарен вектору $\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1$, то в выражении для $\bar{c}_0 - \bar{c}_{-1}$ следует учесть слагаемые высших порядков относительно q . Подобное замечание можно сделать и в отношении вектора \bar{r}_N .

Если $|\bar{r}_0| = |\bar{r}_N| = 1$, то для большей гарантии можно положить

$$\lambda_0 \leq \frac{3 |\Delta \bar{r}_0 \times (\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1)|}{|\Delta \bar{r}_1 - q\Delta_2 \bar{r}_1|}, \quad (29)$$

$$\lambda_N \leq \frac{3 |\nabla \bar{r}_N \times (\nabla \bar{r}_{N-1} + q \nabla^2 \bar{r}_{N-1})|}{|\nabla \bar{r}_{N-1} + q \nabla^2 \bar{r}_{N-1}|}. \quad (30)$$

Формулы (20), (25)–(30) определяют решение первой задачи.

Решение второй задачи сводится к исследованию нулей квадрата — точного трехчлена на отрезке $[0,1]$. В зависимости от значений $K_1(t)$ в граничных точках отрезка возможны следующие ситуации:

1) $K_1(0) K_1(1) < 0$; трехчлен $K_1(t)$ имеет на отрезке $[0,1]$ один нуль, которому соответствует действительная точка перегиба;

2) $K_1(0) K_1(1) \geq 0$; трехчлен $K_1(t)$ может иметь на отрезке $[0,1]$ два нуля, соответствующие ложным точкам перегиба на моделируемой кривой.

Для того чтобы на i -м сегменте не было ложных перегибов, необходимо выполнение одного из условий:

$$U_i = \min_{t \in [0,1]} K_i(t) \geq 0, \quad \tilde{U}_i = \max_{t \in [0,1]} K_i(t) \leq 0.$$

Вместо точного вычисления значений U_i, \tilde{U}_i можно использовать следующий простой прием, основанный на свойстве знакопостоянства функций $\varphi_{1,k}(t)$ и позволяющий оценить U_i, \tilde{U}_i соответственно снизу или сверху. Имеем

$$U_i \geq \sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^1 a_{1,k}^i y_{1,k} = \alpha_i, \quad \tilde{U}_i \leq \sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^1 a_{1,k}^i \tilde{y}_{1,k} = \tilde{\alpha}_i,$$

где $a_{1,k}^i = (\bar{C}_{i+k-3} \times \bar{C}_{i+1-3})$,

$$y_{1,k} = \begin{cases} \min_{t \in [0,1]} \varphi_{1,k}(t), & \text{если } a_{1,k}^i > 0; \\ \max_{t \in [0,1]} \varphi_{1,k}(t), & \text{если } a_{1,k}^i < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{y}_{1,k} = \begin{cases} \max_{t \in [0,1]} \varphi_{1,k}(t), & \text{если } a_{1,k}^i > 0; \\ \min_{t \in [0,1]} \varphi_{1,k}(t), & \text{если } a_{1,k}^i < 0. \end{cases}$$

Необходимые значения экстремумов $\varphi_{1,k}(t)$ приведены в таблице этих функций. Очевидно, если $\alpha_i \geq 0$, то $U_i \geq 0$; если $\tilde{\alpha}_i \leq 0$, то $\tilde{U}_i \leq 0$.

Таким образом, исследование возможностей появления ложных осцилляций на моделируемой кривой сводится к проверке знака одной из величин $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i$ (в зависимости от знака функции $K_i(t)$ на концах отрезка $[0,1]$). Если $K_i(0) \geq 0$, $K_i(1) \geq 1$ и $\alpha_i \geq 0$ или

$\kappa_1(0) \leq 0$, $\kappa_1(1) \leq 0$ и $\tilde{\alpha}_1 \leq 0$, то на рассматриваемом сегменте кривой ложных перегибов нет.

Отметим, что в случае появления на кривой ложных точек перегиба необходимо выполнить варьирование точками $\bar{\Gamma}_1$ в соответствии с условиями (20).

4. Числовые эксперименты

Мы провели серию числовых экспериментов по моделированию кривых параметрическими сплайнами второй и третьей степени. Результаты некоторых из них приведены на рис. 1, 2. На рис. 1 показаны кривые, моделируемые кубическими сплайнами. Распределение опорных точек (отмечены знаком "x") и длины конечных касательных на первой кривой (сплошная линия) удовлетворяют условиям (20), (26) и (28). Кривая получилась выпуклой, на ней отсутствуют точки пере-

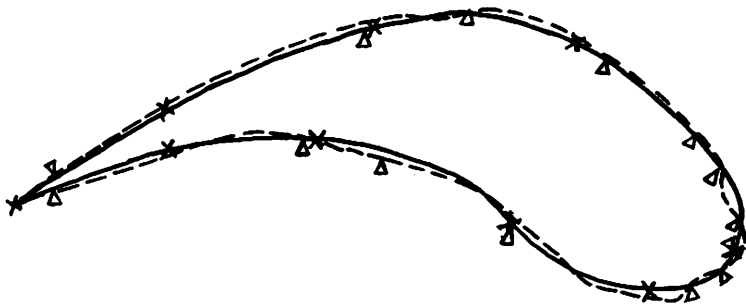


Рис. 1

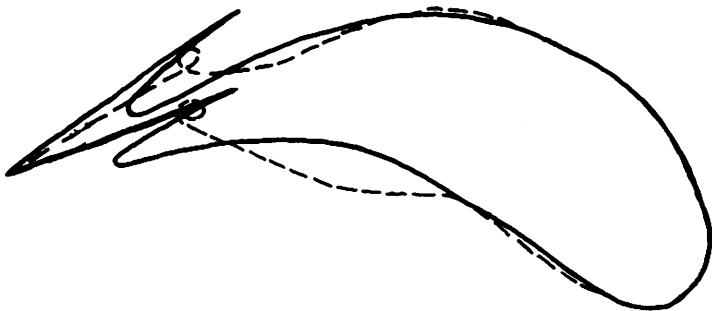


Рис. 2

гиба. На второй кривой (штриховая линия) взято больше опорных точек, чем на первой, но они не удовлетворяют условиям (20). На кривой появились точки "ложных" перегибов.

Результаты экспериментов, показанные на рис.2, отражают влияние на форму кривой длин концевых касательных, если они значительно превосходят допустимые значения, определяемые по формулам (26) и (28). На кривых появились петли (сплайн второй степени - штриховая линия) и возвраты (кубический сплайн - сплошная линия).

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы (20), (26), (28) использованы с согласия автора данной статьи в [6], но ранее они были отражены в [7].

Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплаины в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 224 с.
2. ФОКС А., ПРАТТ М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. - М.: Мир, 1982. - 304 с.
3. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Интерполяция плоских кривых // Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1976. - Вып.68: Вычислительные системы. - С.33-44.
4. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Д.Н. Сплаины в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.
5. АБЛАМЕЙКО С.А., ВАСИЛЬЕВ В.П. Исследование коэффициентов В-сплайнов, моделирующих точечно-заданную кривую // Автоматизация проектно-технологических процессов. - Минск, 1980. - С.32-35.
6. ПЕТРЕНКО А.И., СЕМЕНКОВ О.И. Основы построения систем автоматизированного проектирования. - Киев: Вища школа, 1985. - 294 с.
7. ВАСИЛЬЕВ В.П. Методы автоматизации геометрического моделирования на основе параметрических сплайнов: Автореф. дис ... канд. техн. наук: 05.13.12. - Минск, 1982. - 20 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 февраля 1987 года