

ЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДОБАВЛЕНИЯ И СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ  
БИКУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Б. М. Шумилов

Весьма важным в проблеме интерактивной машинной графики на основе бикубических сплайнов является обеспечение интерполяции в опорных точках генерируемой поверхности по мере увеличения их количества [1]. Стандартный путь решения этой задачи состоит в размещении опорных точек в узлах "регулярной" прямоугольной сетки и в вычислении новых коэффициентов сплайна, исходя из системы уравнений высокой размерности [2]. В настоящей статье предлагаются локальные формулы интерполяции для "нерегулярного" расположения новых опорных точек при условии введения дополнительных узлов сплайна внутри ячеек, содержащих эти точки. Рассматриваются способы удаления отдельных узлов сплайна с целью сжатия информации за счет отказа от выполнения условий интерполяции в их окрестности. Обсуждаются также алгоритмы вычисления полученного сплайна. Указан способ выбора узлов сплайна, обеспечивающего приближение с заданной точностью.

Добавление информации. Пусть в прямоугольнике  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  задана сетка  $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$  ( $\Delta_x: a = x_1 < \dots < x_M = b$ ,  $\Delta_y: c = y_1 < \dots < y_M = d$ ), в узлах которой известны значения некоторой функции  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ . Интерполяционным бикубическим сплайном дефекта I называется функция  $S(x, y) \in C^{2,2}(\Omega)$ , совпадающая с многочленом степени не выше 3 по каждой переменной в ячейках  $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , удовлетворяющая условиям интерполяции  $S(x_i, y_j) = f_{i,j}$  и определенным краевым условиям [2]. Предположим, что в некоторой точке  $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_{i,j}$  задано значение  $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$ , и определим число  $\gamma = (\bar{f} - S(\bar{x}, \bar{y})) / v(\bar{x}, \bar{y})$ , где бикубический  $v$ -сплайн  $v(x, y)$  равен произведению кубических  $v$ -сплайнов [2], построенных по точ-

$$x_1 < x_1' < \bar{x} < x_2' < x_{i+1}, \quad y_j < y_1' < \bar{y} < y_2' < y_{j+1}$$

соответственно. Тогда сплайн  $\bar{S}(x, y) = S(x, y) + \gamma B(x, y)$  интерполирует значение  $f$  в точке  $\bar{p}$  и при этом отличается от сплайна  $S(x, y)$  лишь в ячейке  $\Omega_{1j}$ , где он имеет дополнительные разрывы третьих частных производных на линиях  $x = x_1', \bar{x}, x_2'$ ;  $y = y_1', \bar{y}, y_2'$ . Аналогично, вводя по две дополнительные линии склейки по каждую сторону от точки  $\bar{p}$ , можно сделать как угодно малой область изменения  $S(x, y)$  [2]. Если дополнительные опорные точки попадают в смежные ячейки, например,  $\Omega_{i-1, j}, \Omega_{i, j}$ , то дополнительные узлы

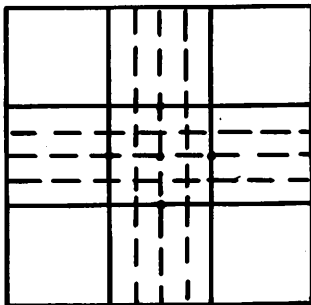


Рис. I

по  $x$  достаточно вставлять лишь по краям совокупного промежутка  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ . При этом для отыскания дополнительных коэффициентов  $\gamma_{i-1}, \gamma_i$  приходится решать систему линейных уравнений.

Отметим еще один случай, когда задача добавления информации решается в явном виде. На рис. I сплошными линиями изображен элемент исходной прямоугольной сетки, штриховыми — дополнительные линии разрыва третьих частных производных. Занумеруем  $B$ -сплайны по центральным узлам в их носителях. Тогда сплайн  $\bar{S}(x, y) =$

$$= S(x, y) + \sum_{k=1}^5 \gamma_k B_k(x, y) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$\gamma_k = (f(x_k, y_k) - S(x_k, y_k)) B_k^{-1}(x_k, y_k), \quad k = 1, \dots, 4;$$

$$\gamma_5 = (f(x_5, y_5) - S(x_5, y_5) - \sum_{k=1}^4 \gamma_k B_k(x_5, y_5)) B_5^{-1}(x_5, y_5)$$

интерполирует в отмеченных дополнительных точках, причем изменение  $S(x, y)$  затрагивает лишь выделенную крестовидную область.

Сжатие информации. Пусть

$$\alpha_{1a} = \frac{\sum_{n=i-1}^{i+2} \alpha_n B_n'''(x_i+0) - \sum_{n=i-2}^{i+1} \alpha_n B_n'''(x_i-0)}{B_i'''(x_i+0) - B_i'''(x_i-0)}$$

Тогда сплайн

$$S^*(x,y) = \sum_k \sum_1 \alpha_{k1} B_{k1}(x,y) - B_i(x) \sum_{n=j-1}^{j+r-1} \alpha_{in}^* B_n(y)$$

не имеет разрыва третьей частной производной по  $x$  на линии  $x = x_1$  от  $p_{1j} = (x_1, y_j)$  до  $p_{1,j+r-2}$  и, следовательно, описывается единым бикубическим многочленом на каждой двух ячейках, граница — щих по данному отрезку. При этом в прямоугольнике с вершинами в точках  $p_{i-2,j-2}$ ,  $p_{i+2,j-2}$ ,  $p_{j-2,j+r}$ ,  $p_{i+2,j+r}$  значения  $S^*(x,y)$  отличаются от значений  $S(x,y)$ . Если величина отклонения  $S^*(x,y)$  от  $f(x,y)$  удовлетворяет заданному критерию (см., например, [3]), то можно перейти к сокращенному по сравнению с  $S(x,y)$  описанию  $f(x,y)$  в кусочно-многочленном представлении сплайна.

Вычисление сплайна. Пусть путем последовательного прореживания и измельчения сетки узлов сплайна получена нерегулярная прямоугольная сетка, имеющая  $n_x$  вертикальных сторон ячеек, образованных отрезками прямых вида  $x = x_i$ :  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n_x} = b$ , и по  $n_i$  пересечений с горизонтальными сторонами ячеек  $y = y_{j'(i)+j}$  на каждой из них:

$$c = y_{j'(i)+1} < \dots < y_{j'(i)+n_i} = d, \quad \forall i.$$

Здесь  $j'(i) = \sum_{r=1}^{i-1} n_x$ , а величины  $c, d$  могут зависеть от номера

$i$  с тем, чтобы иметь возможность описания интерполяции на  $L$ -образных областях.

Положим значение элемента  $p_{j'(i)+j}$  равным нулю, если соответствующая точка  $(x_i, y_{j'(i)+j})$  не является узлом сетки, и равным номеру узла по счету снизу вверх в противном случае. Введем массивы

$$\{s_i^{00}\}, \{s_i^{10}\}, \{s_i^{01}\}, \{s_i^{11}\}, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{n_x} \max_{1 \leq j \leq n_i} p_{j'(i)+j},$$

содержащие значения коэффициентов сплайна в узлах сетки по мере продвижения снизу вверх и слева направо. При заданных  $x, y$  предлагается следующий алгоритм вычисления бикубического сплайна.

Шаг I. Определяются такие значения  $i, j, k$ , чтобы выполнялись неравенства:

$$x_1 \leq x < x_1,$$

$$y_{j'(i)+j} \leq y < y_{j'(i)+q},$$

$$y_{j'(1)+k} \leq y < y_{j'(1)+k+1},$$

$$l = i+1, m = i, q = j+1.$$

Шаг 2. Если  $p_{j'(1)+j} \cdot p_{j'(m)+q} \cdot p_{j'(1)+k} \cdot p_{j'(1)+k+1} > 0$ , то все четыре ближайшие к точке  $(x, y)$  точки пересечения горизонтальных сторон и вертикальных линий сетки являются узлами. Поэтому при фиксированных значениях  $x = x_i, x_{i+1}$  сплайн  $S(x, y)$  и его первая производная по  $x$  вычисляются по формуле эрмитовой кубической интерполяции относительно  $y$  [2]:

$$S^{(r,0)}(x_s, y) = \varphi_1(u) S_V^{r0} + \varphi_2(u) S_{V+1}^{r0} + g \varphi_3(u) S_V^{r1} + g \varphi_4(u) S_{V+1}^{r1}, \quad r = 0, 1; \quad s = i, i+1,$$

где

$$v = \sum_{s=1}^{s-1} \max_{1 \leq q \leq n_1} p_{j'(1)+q} + p_{j'(s)+v},$$

$$g = y_{j'(s)+v+1} - y_{j'(s)+v}, \quad u = (y - y_{j'(s)+v})/g.$$

Здесь

$$v = \begin{cases} j, & s = i, \\ k, & s = i+1; \end{cases}$$

$$\varphi_1(u) = (1-u)^2(1+2u), \quad \varphi_2(u) = u^2(3-2u),$$

$$\varphi_3(u) = u(1-u)^2, \quad \varphi_4(u) = -u^2(1-u).$$

По той же формуле

$$S(x, y) = \varphi_1(t) S^{(0,0)}(x_i, y) + \varphi_2(t) S^{(0,0)}(x_{i+1}, y) +$$

$$+ h \varphi_3(t) S^{(1,0)}(x_i, y) + h \varphi_4(t) S^{(1,0)}(x_{i+1}, y),$$

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad t = (x - x_i)/h.$$

Шаг 3. Так как в противном случае хотя бы одна из найденных точек не является узлом, то хотя бы две из них лежат на противоположных горизонтальных сторонах неправильной прямоугольной ячейки, содержащей точку  $(x, y)$ . Пусть, например,  $p_{j'(1)+j} = 0$ , т.е. точка  $(x_i, y_{j'(1)+j})$  не является узлом. Тогда отыскивается ближайший к ней слева узел.

Шаг 4. Значение  $i$  заменяется на  $i-1$ , значение  $j$  присваивается  $v$ , и вычисляется индекс  $j$ , для которого  $y_{j'(i)+j} = y_{j'(i+1)+v}$ . Если и после этого  $p_{j'(i)+j} = 0$ , то действие шага 4 повторяется, иначе отыскивается ближайший справа узел, имеющий индексы  $l, k$ .

Шаг 5. Если  $p_{j'(m)+q} = 0$ , то после отыскания ближайших слева и справа к точке  $(x_m, y_{j'(m)+q})$  узлов с индексами  $m, q; s, l$  выходим на шаг 6. В противном случае в дополнение к узлу  $(x_m, y_{j'(m)+q})$  находим ближайший слева узел  $(x_s, y_{j'(s)+l})$  либо справа при  $y_{j'((m-1)+v)} \neq y_{j'(m)+q}, \forall v$ .

Шаг 6. Вычисляются сплайн  $S(x, y)$  и его первая производная по  $y$  в точках  $(x, \bar{y}_1), (x, \bar{y}_2)$ :

$$S^{(0, r)}(x, \bar{y}_k) = \varphi_1(t) S_{V_k}^{0r} + \varphi_2(t) S_{V_{k+2}}^{0r} + h_k \varphi_3(t) S_{V_k}^{1r} + h_k \varphi_4(t) S_{V_{k+2}}^{1r}, \quad r = 0, 1; k=1, 2.$$

Здесь

$$h_k = \bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}, \quad t = (x - \bar{x}_k) / h_k;$$

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_s, \quad \bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_m;$$

$$\bar{y}_1 = y_{j'(i)+j}, \quad \bar{y}_2 = y_{j'(m)+q};$$

$$V_k = \sum_{\mu=1}^{\xi_k-1} \max_{1 \leq v \leq n_\mu} p_{j'(\mu)+v} + p_{j'(\xi_k)+\zeta_k}, \quad k = 1, \dots, 4;$$

$$\xi_1 = i, \quad \xi_2 = m, \quad \xi_3 = l, \quad \xi_4 = s, \quad \zeta_1 = j, \quad \zeta_2 = q, \quad \zeta_3 = k, \quad \zeta_4 = l.$$

Наконец,

$$S(x, y) = \varphi_1(u) S^{(0, 0)}(x, \bar{y}_1) + \varphi_2(u) S^{(0, 0)}(x, \bar{y}_2) + g \varphi_3(u) S^{(0, 1)}(x, \bar{y}_1) + g \varphi_4(u) S^{(0, 1)}(x, \bar{y}_2),$$

где  $g = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$ ,  $u = (y - \bar{y}_1) / g$ .

Числовой пример. Пусть  $f(x, y) = V_4(50(y-x))$ ,  $0 \leq x, y \leq 0.6$ , где

$$B_4(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{23}(6t^2 - \frac{3}{5}t^4 + [\frac{1}{2}(|t-1| + |t+1|) - 1]^4) - \\ - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(|t-3| + |t+3|) - 3]^4 \text{ при } |t| \leq 5; \\ 0 \text{ при } |t| > 5. \end{cases}$$

В качестве исходной аппроксимации был взят сплайн

$$s(x, y) = \frac{9}{4} \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^6 f(x_i, y_j) B_{i,j}(x, y),$$

интерполирующий  $f(x, y)$  в диагональных узлах сетки  $\{x_i = i / 10, y_j = j / 10, i = 0, 1, \dots, 6\}$ , с максимальной погрешностью

$$\max_{0 \leq x, y \leq 0.6} |f(x, y) - s(x, y)| = 0.707.$$

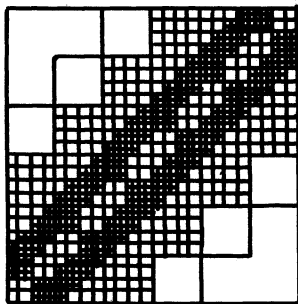


Рис. 2

После локального измельчения сетки и добавления информации в очередных точках максимума абсолютной погрешности был достигнут уровень 0,277. Результирующая сетка, полученная после удаления линий, на которых разрыв третьей частной производной равен нулю, изображена на рис. 2. При этом количество узлов сетки уменьшилось по сравнению со случаем регулярного прямоугольного разбиения, обеспечивающего ту же погрешность.

### Л и т е р а т у р а

1. BARSKY B.A., GREENBERG D.P. Interactive surface representation system using a B-spline formulation with interpolation capability // Comput. Graphics and Image Proc. - 1980. - Vol. 14. - P. 203-226.
2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 224 С.
3. ШУМИЛОВ Б.М. О сплайн-аппроксимации функций многих переменных // Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1975. - Вып. 65: Вычислительные системы. - С. 83-88.

Поступила в ред.-изд.отд.  
13 октября 1986 года