ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Вычислительные системы
1987 год Выпуск 122

УДК 510.6+519.68

ПОЗИТИВНЫЕ МОДЕЛИ И АБСТРАКТНЫЕ ТИПЫ ДАННЫХ

С.С.Гончаров, В.Д.Дзгоев

В современном программировании важная роль в реализации логических конструкций принадлежит абстрактным типам данных (АТД) [1, 6,9,10,12,13]. В проблематике АТД решающая роль принадлежит разработке методов эффективной реализации аксиоматических описаний. Под эффективной реализацией естественно понимать построение конструктивных, а если это невозможно, то позитивных структур, удовлетворяющих этому аксиоматическому описанию. Таким образом,мы приходим к классической проблематике теории конструктивных моделей, связанной с существованием конструктивных (позитивных) моделей с заданными свойствами.

Наибольшее применение в языках программирования к настоящему времени получили так называемые алгебраические типы данных,связанные с наличием для систем квазитождеств канонической свободной системы. Однако существуют и другие способы конструирования эффективных структур [7,9], которые также могут быть положены в основу реализации языков программирования с абстрактными типами данных.

Существенным фактором в выборе квазитождеств как наиболее применяемого способа определения абстрактных типов данных является особое положение канонической свободной системы и ее единственность. Для этого случая в [1] введено понятие реализационной полноты, характеризующее единственность эффективной реализации этого абстрактного типа данных. Мы продолжим исследования по построению абстрактных типов данных и их реализаций в рамках теории GES.

В [2] описаны теория списочной надстройки GES и ее применение для задания обобщенной вычислимости. Нетрудно видеть, что в случае стандартной надстройки, состоящей из наследственно конеч -

ных списков над моделью, допускающей позитивную нумерацию, мы можем ее расширить до позитивной нумерации списочной надстройки $HW(\mathfrak{M})$. Аналогично обстоит дело и с надстройкой из наследственно конечных множеств $HF(\mathfrak{M})$, которая описывается теорией KPU (см. [II]).

Целью данной работы является теорема, устанавливающая единственность стандартной списочной надстройки для позитивных моделей теории GES.

Мы будем рассматривать многосортную теорию списков GES, надстроенных над моделями сигнатуры Σ в сигнатуре $\langle \underline{cons}, \underline{head}, \underline{tail}, \underline{nil}, \in, \subseteq, \Sigma \rangle$ с новым сортом элементов S-списков, добавленным к сортам сигнатуры Σ (см. [2]).

Через α, β, γ с индексами будем обозначать переменные типа "списки", а через $x, y, z, x_0, y_0, z_0, \ldots$ – переменные типа, объединяющего списки с элементами любых типов сигнатуры Σ.

Аксиомы GES_n^{Σ} :

1) $\underline{tail}(\underline{cons}(\alpha, x)) = \alpha, \quad \underline{tail}(\underline{nil}) = \underline{nil},$

$\underline{head}(\underline{cons}(\alpha, x)) = x, \quad \underline{head}(\underline{nil}) = \underline{nil},$

$\alpha \neq \underline{nil} \rightarrow \underline{cons}(\underline{tail}(\alpha), \underline{head}(\alpha)) = \alpha;$

2) $x \notin \underline{nil},$

$x \in \underline{cons}(\alpha, y) \leftrightarrow (x \in \alpha \vee x = y);$

3) $\underline{nil} \subseteq \alpha$:

$\alpha \subseteq \underline{cons}(\alpha, x) \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \vee \alpha = \underline{cons}(\beta, x);$

4) $\underline{cons}(\alpha, x) = \underline{cons}(\beta, y) \leftrightarrow (\alpha = \beta \ \& \ x = y),$

$\alpha \subseteq \beta \ \& \ \gamma \subseteq \beta \rightarrow \alpha \subseteq \gamma \vee \gamma \subseteq \alpha,$

$\alpha \subseteq \beta \rightarrow (\forall x \in \alpha)(x \in \beta).$

5_n) Аксиомы индукции и фундируемости:

$$([\Phi]^x_{nil} \ \& \ (\forall \alpha)(\forall y)([\Phi]^x_\alpha \rightarrow [\Phi]^x_{con(\alpha, y)})) \rightarrow (\forall \alpha)[\Phi]^x_\alpha ,$$

$$((\forall y \in x)\Phi(y) \rightarrow \Phi(x)) \rightarrow \forall x \bar{\Phi} ,$$

где Φ – формула с не более чем $n-1$ чередованием кванторов, начинающаяся с кванторов существования, а при $n=0$ – без кванторов. Запись $[\Phi]^x_t$ означает подстановку вместо всех свободных вхождений переменной x в Φ терма t так, чтобы не было коллизий переменных.

ЛЕММА о транзитивном замыкании

$$GES_1 \vdash (\forall\alpha)(\exists\beta)((\forall x)(x\in\alpha\to x\in\beta)\ \&$$
$$\&\ (\forall y)(\forall\gamma)((\gamma\in\beta\ \&\ y\in\gamma)\to y\in\beta))$$

легко доказывается на основании аксиомы индукции.

В дальнейшем мы не будем изменять базисную сигнатуру Σ, а поэтому будем опускать ее в индексах.

§I. Представимые функции в GES_1

Определим стандартные термы $\Delta_0 \leftrightharpoons \underline{nil}$ и $\Delta_{n+1} \leftrightharpoons \underline{cons}(\Delta_n, \underline{nil})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f\colon N^k \to N$ сильно представима в GES_1, если существует Σ-формула $(\exists\bar z)\Phi(x_1,\dots,x_k,y,\bar z)$ такая, что Φ - Δ_0-формула, и для $n_1,\dots,n_n$, $n\in N$, существуют $\bar m$ такие, что $\bar m = (m_1,\dots,m_n)$ и $GES_1 \vdash \Phi(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_n,\Delta_{m_1},\dots,\Delta_{m_n})$, если $f(n_1,\dots,n_k)=n$, и $GES_1 \vdash (\forall x_1\dots x_n)(\exists!y)(\exists\bar z)\Phi(\bar x,y,\bar z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Всякая примитивно-рекурсивная функция сильно представима в GES_1 Σ-формулой $(\exists\bar y)\Phi$, где Φ - Δ_0- формула.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что простейшие функции $S(x)$, $O(x)$, $I^n_m(x_1,\dots,x_n)$ строго представимы в GES_1 . Для функции $O(x)$ определим формулу $y = nil$. Очевидно, что оба свойства строгой представимости выполнены. Для функции $S(x)$ рассмотрим формулу $cons(x,nil) = y$. Оба требуемых свойства очевидны. Так же просто проверить, что формула $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{x} x_i = x_i\ \&\ y = x_m$ является строго представляющей для I^n_m. Таким образом, нам осталось доказать строгую представимость для функций, получающихся из строго представимых с помощью суперпозиции и примитивной рекурсии.

Пусть всюду определенные функции f и $g_1,\dots,g_n$ строго представимы с помощью формул Ψ и $\Phi_1,\dots,\Phi_n$. Определим формулу

$$\Phi(x_1,\dots,x_n,y) \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons (\exists y_1\dots y_n,\bar z)(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}\Phi_i'(\bar x,y_i,\bar z)\ \&\ \Psi(y_1,\dots,y_n,y,\bar z)),$$

где $\Phi_i = \exists\bar z_i\Phi_i'$ и $\Psi = \exists\bar z'\Psi'$, а Φ_i' и Ψ' - Δ_0-формумы, $\bar z \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \bar z_1\bar z_2\dots\bar z_n\bar z'$.

Если $f(g_1(n_1,\dots,n_k),\dots,g_n(n_1,\dots,n_k)) = n$, то рассмотрим $m_1,\dots, m_n$ такие, что $g_i(n_1,\dots,n_k)=m_i$ для $1\le i\le n$. В таком случае, по предположению,

$$GES_1 \vdash \mathop{\&}_{i=1}^{n} \Phi_i'(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{m_i},\Delta_{t_1},\dots,\Delta_{t_s}) \;\&$$

$$\& \;\Psi'(\Delta_{m_1},\dots,\Delta_{m_n},\Delta_n,\Delta_{t_1},\dots,\Delta_{t_s}),$$

но тогда очевидным образом выполнено первое свойство строгой представимости.

Докажем второе свойство. Пусть $GES_1 \nvdash \forall x_1\dots x_n\, \exists! y\, \Phi(x_1,\dots,x_k,y)$, но тогда рассмотрим модель $\mathfrak{M} \models GES_1$ такую, что $\mathfrak{M} \not\models \forall x_1\dots x_n\, \exists! y\, \Phi(x_1,\dots,x_k,y)$. Тогда найдем элементы $a_1,\dots,a_k$ такие, что $\mathfrak{M} \not\models \exists! y\, \Phi(a_1,\dots,a_k,y)$. Отсюда мы должны рассмотреть две возможности.

СЛУЧАЙ I. Не существует $b\in\mathfrak{M}$ такого, что $\mathfrak{M}\models\Phi(a_1,\dots,a_n,b)$. Но, по условию, $\mathfrak{M}\models(\forall x_1\dots x_k)(\exists! y)\Phi_i(x_1,\dots,x_k,y)$. В таком случае рассмотрим для $a_1\dots a_k$ те b_i, что $\mathfrak{M}\models\Phi_i(a_1,\dots,a_k,b_i)$, но $\mathfrak{M}\models(\forall y_1\dots y_n)(\exists! y)\Psi(y_1,\dots,y_n,y)$, отсюда существует b такой, что $\mathfrak{M}\models\Psi(b_1,\dots,b_n,b)$, но тогда это b удовлетворяет условию $\mathfrak{M}\models\Phi(a_1\dots a_k,b)$, что противоречит нашему предположению.

СЛУЧАЙ 2. Существует по крайней мере два различных b_1, b_2, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M}\models\Phi(a_1,\dots,a_n,b_i)$ для $i\in\{1,2\}$, но из условия единственности для $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ и Ψ легко получаем противоречие. Следовательно, и этот случай невозможен, а, значит, Φ строго представляет функцию $f(g_1,\dots,g_n)$.

Пусть функция f получается из g и h с помощью примитивной рекурсии, а g и h строго представимы Σ-формулами $\exists\bar z\,\Phi(\bar x,y,\bar z)$ и $(\exists\bar z')\Phi(\bar x,y,z,t,\bar z')$, где Φ и Ψ – Δ_0-формулы. Но в таком случае Σ-формулы $\exists\bar z\Phi$ и $\exists\bar z'\Psi$ в любой модели определяют некоторые функции $\bar g$ и $\bar h$ соответственно, а в таком случае по теореме из [3] существует Σ-формула Δ такая, что она также в любой модели $\mathfrak{M}\models GES_1$ определяет функцию $\bar f$ такую, что выполнены следующие свойства: $\bar f(\bar x,\underline{nil}) = \bar g(\bar x)$ и $\bar f(\bar x,\underline{cons}(y,b)) = \bar h(\bar x,y,b,\bar f(\bar x,y))$ при любых $\bar x,y$ и b из модели, но в таком случае в силу того, что Δ определяет функцию $\bar f$, имеем

$$\mathfrak{M}\models(\forall\bar x)(\exists! y)\,\Delta(\bar x,y) \text{ и } GES_1\vdash\forall\bar x\,\exists! y\,\Delta(\bar x,y).$$

Пусть $f(n_1,\dots,n_k,n) = m$, но тогда

$$f(n_1,\dots,n_k,0) = m_0 = g(n_1,\dots,n_k),$$

$$f(n_1,\dots,n_k,1) = h(\bar{n},0,m_0) = m_1,$$

$$\dots$$

$$f(n_1,\dots,n_k,n) = h(n,n-1,m_{n-1}) = m_n = m\ ,$$

но из строгой представимости g и h получаем

$$GES_1 \vdash \Phi(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\ \Delta_{m_0},\bar{\Delta}_s)$$

и

$$GES_1 \vdash \Psi(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_0,\Delta_{m_0},\Delta_{m_1},\Delta_{s_0})$$

...

и

$$GES_1 \vdash \Psi(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{n-1},\Delta_{m_{n-1}},\Delta_m).$$

В таком случае эти формулы будут истинны и в $\mathfrak{M} \models GES_1$, но тогда, по определению определимости функций $\bar{g}$ и $\bar{h}$, имеем

$$\bar{g}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k}) = \Delta_{m_0}\ ,$$

$$\bar{h}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_0,\Delta_{m_0}) = \Delta_{m_1},$$

$$\bar{h}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{n-1},\Delta_{m_{n-1}}) = \Delta_m\ ,$$

и тогда из свойств функции $\bar{f}$ имеем

$$\bar{f}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_0) = \bar{g}(\Delta_1,\dots,\Delta_{n_k}) = \Delta_{m_0}\ ,$$

$$\bar{f}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_1) = h(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_1,\ \bar{f}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_0)) =$$

$$= h(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_1,\Delta_{m_0}) = \Delta_{m_1},$$

...

$$\bar{f}(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_n) = h(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{n-1},\ \bar{f}(\Delta_{n_1},\dots$$

$$\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{n-1})) = h(\Delta_{n_1},\dots,\Delta_{n_k},\Delta_{n-1},\Delta_{m_{n-1}}) = \Delta_m\ .$$

Но $\bar{f}$ определяется Σ-формулой Δ , а тогда

$$\mathfrak{M} \models \Delta(\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_{n_k}, \Delta_n) = \Delta_m ,$$

а из вида $\Delta = \exists z \Delta'(\bar{x}, y, z)$ по индукции найдем Δ_t такое, что $\mathfrak{M} \models \Delta'(\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_t)$; ясно тогда $\mathfrak{M}' \models \Delta'(\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_t)$ для всех $\mathfrak{M}' \models \mathrm{GES}$ и

$$\mathrm{GES}_1 \vdash \Delta'(\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_{n_k}, \Delta_n, \Delta_m, \Delta_t) .$$

Итак, оба свойства строгой представимости доказаны, а вместе с ними доказано и предложение.

§2. Нестандартные модели

ЛЕММА I. Если $\mathfrak{M} \models \mathrm{GES}_1$ и в $\mathfrak{M}$ есть нестандартный элемент, то найдется $a \in |\mathfrak{M}|$, такой, что $\underline{\mathrm{tail}}^k(a) \neq \underline{\mathrm{nil}}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b - нестандартный элемент из $\mathfrak{M}$ и $a \rightleftharpoons \mathrm{TC}(b)$ - транзитивное замыкание [2] элемента b . Предположим, что существует $k > 0$ такое, что $\underline{\mathrm{tail}}^k(a) = \underline{\mathrm{nil}}$. В таком случае выберем наименьший $a_0 \subseteq a$ такой, что a_0 - нестандартный элемент. Из построения $a = \mathrm{TC}(b)$ ясно, что для любого $a' \subseteq a$ все элементы из $\underline{\mathrm{head}}(a')$ встречаются в $\underline{\mathrm{tail}}(a')$. В таком случае все элементы из $\underline{\mathrm{tail}}(a_0)$ и $\underline{\mathrm{head}}(a_0)$ уже стандартные, но тогда элемент $\underline{\mathrm{head}}(a_0)$ нестандартный, а все его элементы и любой $a' \subset \underline{\mathrm{head}}(a_0)$ уже встречаются в $\underline{\mathrm{tail}}(a_0)$ и являются стандартными элементами. Но тогда $\underline{\mathrm{head}}(a_0) \neq \underline{\mathrm{nil}}$ и

$$\underline{\mathrm{head}}(a_0) = \underline{\mathrm{cons}}(\mathrm{tail}(\mathrm{head}(a_0)), \underline{\mathrm{head}}(\mathrm{head}(a_0))),$$

а $\underline{\mathrm{tail}}(\underline{\mathrm{head}}(a_0))$ и $\underline{\mathrm{head}}\ \underline{\mathrm{head}}(a_0)$ - уже стандартные элементы, поэтому и $\underline{\mathrm{head}}(a_0)$ стандартен. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Если $\mathfrak{M} \models \mathrm{GES}_1$ и в $\mathfrak{M}$ есть нестандартный элемент, то существует элемент $a \in |\mathfrak{M}|$ такой, что для любого n элемент $\Delta_n \in a$ и

$$(\forall z \subseteq a)(z \neq \underline{\mathrm{nil}} \ \& \ \underline{\mathrm{tail}}(z) \neq \underline{\mathrm{nil}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{\mathrm{head}}(\underline{\mathrm{tail}}(z)) \subseteq \underline{\mathrm{head}}\ (z)) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\bar{f}$ такую, что

$$\bar{f}(\underline{nil}) \simeq \underline{nil} ,$$

$$\bar{f}(\underline{cons}(a,b)) \simeq \underline{cons}(f(a),\underline{cons}(f(b),\underline{nil})) .$$

В силу [3] такая функция существует в $\mathfrak{M} \models GES_1$ и Σ-определима в $\mathfrak{M}$, т.е. существует Σ-формула $\Phi(x,y)$ такая,что $\bar{f}(a) = b \leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Phi(a,b)$. Рассмотрим теперь элемент a из $\mathfrak{M}$ такой, что для любого k выполнено неравенство $\underline{tail}^k(a) \neq \underline{nil}$, которое существует по лемме I. В таком случае функция $\bar{f}(a)$ определена.

Заметим, что $\Delta_n \in \bar{f}(a)$ для любого n. Предположим, что это не так. Пусть k - наименьшее n такое, что $\Delta_n \notin \bar{f}(a)$. Индукцией по длине списка легко показать, что для любого $x \subseteq a$ мы получаем $f(x) \subseteq f(a)$. Поэтому мы можем выбрать наименьшее $x \subseteq a$, отличное от $\underline{nil}$, но тогда $x = \underline{cons}(\underline{nil},b)$ и $f(x) = \underline{cons}(\underline{nil},\underline{nil}) \subseteq \bar{f}(a)$ и, следовательно, $\Delta_0 = \underline{nil} \in \bar{f}(a)$. Поэтому $k \neq 0$. Выберем наименьшее $x \subseteq a$ такое, что $\Delta_{k-1} \in f(x)$. Но в таком случае $x = \underline{cons}(x_0,b_0)$ и $\bar{f}(x) = \underline{cons}(\bar{f}(x_0),\underline{cons}(\bar{f}(b_0),\underline{nil}))$, и $\Delta_{k-1} \in \bar{f}(x_0)$. Отсюда $\Delta_{k-1} = \underline{cons}(f(x_0),\underline{nil})$. Если $x \subset a$, то, взяв b такой,что $\underline{cons}(x,b) \subseteq a$, получим, что $f(\underline{cons}(x,b)) = \Delta_k \in f(a)$. Если же $x = a$, то $\underline{tail}^k(f(a)) = \underline{nil}$, но индукцией по длине можно показать, что для любого n, если $\underline{tail}^n(f(a)) = \underline{nil}$, то $\underline{tail}^n(a) = \underline{nil}$, но это противоречит выбору a. Индукцией по длине списка a доказываем и второе условие.

§3. Стандартность позитивной модели списочной надстройки

В предыдущих параграфах мы все подготовили для доказательства стандартности позитивных списочных надстроек. Доказываемая ниже теорема показывает реализационную полноту абстрактного типа GES_1 над моделью $\mathfrak{M}$, позволяет, не фиксируя какого-либо конкретного способа реализации этого абстрактного типа данных, корректно работать с ним и определять единственным образом различные подструктуры, необходимые для реализации абстрактных типов в списочной надстройке. Заметим, что в этом свойстве заключается одно из существенных и принципиальных отличий в выборе между списочной и теоретико-множественной надстройками. Так как теория KPU наряду с естественной надстройкой из наследственно конечных множеств может иметь также и конструктивные надстройки, состоящие не только из наследственно конечных множеств, но и из нестандартных элементов, поэтому аксиоматически реализационной полноты мы в ряде случаев достичь не сможем. Теория же списочной надстройки, обладая реализационной полнотой, позволяет корректно определять эффективную семантику Σ-языка. В случае нестандартных моделей Σ-формулы уже не задают эффективно проверяемые свойства и не могут служить базисом для языка программирования.

ТЕОРЕМА [2]. Если $((\mathfrak{M},s),\nu)$ - позитивная модель теории GES_1, то $s = HW(\mathfrak{M})$ и ν - единственная с точностью до автоэквивалентности позитивная нумерация над $(\mathfrak{M},\nu \restriction \mathfrak{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $s = HW(\mathfrak{M})$. Предположим, что это не так, тогда в силу леммы 2 существует элемент a такой, что для любого n элемент Δ_n принадлежит a и

$$(\forall z \subseteq a)((z \neq \underline{nil} \ \& \ \underline{tail}(z) \neq \underline{nil}) \to \underline{head}(\underline{tail}(z)) \subseteq \underline{head}(z)).$$

Рассмотрим два рекурсивно-перечислимых неотделимых множества $A,B \subseteq N$ и примитивно-рекурсивные функции $f: N \xrightarrow{\text{на}} A$ и $g: N \xrightarrow{\text{на}} B$. В силу теоремы о представимости, в GES_1 существуют $\Psi_0(x,y)$ и $\Psi_1(x,y)$ - Σ-формулы, сильно представляющие функции f и g в GES_1.

Определим теперь Δ_0-формулы:

$$\bar{\Psi}_0(y,a) \leftrightharpoons (\exists x \subseteq a)(\Psi_0^{(a)}(\underline{head}(x),y) \ \& $$

$$\& \ (\forall z \subseteq x)(\neg \Psi_1^{(a)}(\underline{head}(z,y)))$$

и

$$\bar{\Psi}_1(y,a) \leftrightharpoons (\exists x \subseteq a)(\Psi_1^{(a)}(\underline{head}(x),y) \ \& $$

$$\& \ (\forall z \subseteq x)(\neg \Psi_0(\underline{head}(z),y))) \ .$$

В силу аксиомы индукции по длине списка a, мы можем доказать что

$$GES_1 \vdash (\forall a)(\exists b_0 b_1)(\forall y \in a(\Psi_0(y,a) \to y \in b_0) \ \&$$

$$\& \ (\forall y \in a)(\Psi_1(y,a) \to y \notin b_0) \ \&$$

$$\& \ (\forall z \subseteq a)((z \neq \underline{nil} \ \& \ \underline{tail}(z) \neq \underline{nil}) \to$$

$$\to \underline{head}(\underline{tail}(z)) \subseteq \underline{head}(z)) \ \&$$

$$\& \mathop{\&}_{i=0}^{1} (\forall z \sqsubseteq b_i)((z \neq \underline{\text{nil}} \ \& \ \underline{\text{tail}}(z) \neq \underline{\text{nil}}) \to$$

$$\to \underline{\text{head}}(\underline{\text{tail}}(z)) \sqsubseteq \underline{\text{head}}(z)))\& \quad (\forall y \in a)((\Psi_0(y,a) \to y \notin b_1)\&$$

$$\& (\Psi_1(y,a) \to y \notin b_0) \ \& \ (y \in b_0 \vee y \in b_1)).$$

Рассмотрим теперь ранее построенный нестандартный элемент a и элементы b_0, b_1, существующие по предыдущему утверждению для a в $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь их ν-номера n_0 и n_1. По условию имеем $\Delta_n \in a$ для любого n, а отсюда $\Delta_n \in b_0$ или $\Delta_n \in b_1$ для любого n. Заметим, что для любого $n \in A$ в силу сильной представимости f имеем $\Delta_n \in b_0$ и $\Delta_n \notin b_1$, а для $n \in B$, наоборот, $\Delta_n \in b_1$ и $\Delta_n \notin b_0$. Заметим, что по n мы можем эффективно найти ν-номер $\zeta(n)$ элемента Δ_n. Так как наша модель позитивна, то отношение $\nu s \in \nu k$ рекурсивно-перечислимо. Определим множество $S = \{n \mid$ за t шагов вычисляется, что $\nu\zeta(n) \in \nu(n_0)$ и за число шагов, меньшее или равное t, не вычисляется, что $\nu\zeta(n) \in \nu(n_1)\}$. Ясно, что $\bar{S} = \{n \mid$за t шагов вычисляется, что $\nu\zeta(n) \in \nu n_1$ и за меньшее число шагов не вычисляется, что $\nu\zeta(n) \in \underline{\nu}\, n_0 \}$. В таком случае S - рекурсивное множество, но $S \supseteq A$, а $\bar{S} \supseteq B$, что противоречит рекурсивной неотделимости множеств A и B.

Автоустойчивость позитивных продолжений позитивных нумераций $\mathfrak{M}$ на надстройку $HW(\mathfrak{M})$ непосредственно доказывается рекурсией по длине и глубине списков.

§4. Абстрактные типы данных в GES

В этом параграфе мы определим теоретико-модельную семантику типов в списочной надстройке.

Назовем структуру $\mathfrak{N}$ сигнатуры Σ' определимой в $\mathfrak{M} \models$ GES, если существуют Σ-формулы Ψ_s и Δ_s для всех сортов s сигнатуры Σ', Σ-формулы Ψ_P, Ψ_F, Ψ_C для каждого предикатного P, функционального F и константного C символов сигнатуры Σ' такие, что, положив $M_s \rightleftharpoons \{\bar{x} \mid \mathfrak{M} \models \Psi_s(\bar{x})\}$, мы получим непустые множества для каждого сорта s, а Δ_s определяет на этом подмножестве отношение эквивалентности η_s. На фактор-множествах $\bar{M}_s \rightleftharpoons M_s/\eta_s$ формулы Ψ_P индуцируют отношение $\underline{P}$, Ψ_F-операцию $\underline{F}$, а Ψ_C выделяет единственный смежный класс, который мы обозначим через $\underline{C}$, и модель $\langle\{\bar{M}_s\}, \bar{P}_1, \bar{F}_1, \bar{C}_1\rangle$ изоморфна модели $\mathfrak{N}$. Аналогично определяются Δ_0- и Δ-представимости, так чтобы определяющие формулы бы Δ_0- или соответственно Δ-формулами.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая позитивная модель* $\mathfrak{N}$ *определима в любой модели* $\mathfrak{M} \models GES_1$, *допускающей позитивную нумерацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы непосредственно следует из теоремы о стандартности позитивной списочной надстройки GES_1 представимости рекурсивных функций в GES_1, которая следует из строгой представимости примитивно-рекурсивных функций.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая позитивная модель* $\mathfrak{N}$ *вместе с некоторой списочной надстройкой определима в любой модели* $\mathfrak{M} \models GES_1$, *допускающей позитивную нумерацию.*

ТЕОРЕМА 3. *Если модель* $\mathfrak{N}$ Σ-*определима в модели* $\mathfrak{M} \models GES_1$, *то* $\mathfrak{N}$ Σ-*определима в* $\mathfrak{M}$ *и вместе с надстройкой* $HW(\mathfrak{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы получаем, применяя аналог теоремы Ганди [2] для моделей $\mathfrak{M} \models GES_1$ при последовательной кодировке списков, списков списков и т.д.

Эта теорема аналогична теореме I из [10] для допустимых множеств.

Интересным с теоретико-модельной точки зрения представляется изучение вопроса о том, как модели Δ-, Δ_0- и Σ-представимы в различных списочных надстройках, а также, как связаны различные представления между собой.

§5. Динамическая логика в GES

В [9] была доказана выразимость динамической логики в логике предикатов с теоретико-множественным сортом, удовлетворяющим KPU. Мы рассматриваем вопрос о выразимости динамической логики в списочной надстройке GES.

Если K – аксиоматизируемый класс данных сигнатур Σ, то $HW(K)$ – класс моделей из K со стандартными списочными надстройками – аксиоматизируем в классе всех списочных надстроек с праэлементами. Обогатим первоначальную сигнатуру Σ_0 новыми преди -

катными переменными символами P и обозначим ее через Σ'. Обозначим через Σ^+ все Σ-формулы, в которые переменные предикатные символы входят позитивно. Аналогично [9] мы определим язык SDL_{Σ_0} регулярной динамической логики над списками сигнатуры Σ_0. Основными синтаксическими объектами будут формулы и n-программы (n>0), а также Σ-формулы.

1. Всякая формула Φ языка GES_{Σ_0} является DL-формулой. Всякая формула принадлежит Σ, если она принадлежит Σ^+.

2. Над формулами в DL определяются обычным образом конъюнкция &, дизъюнкция $\vee$, импликация $\to$, отрицание $\rceil$ и кванторы $\forall, \exists$. Класс Σ замкнут относительно & и $\vee$, а также относительно ограниченных кванторов и квантора существования.

3. Если P - n-местный предикатный символ, то $\alpha \leftrightharpoons P$ - n-программа. Если $P \in \Sigma_0$, то программа α не содержит предикатных переменных $FV(\alpha) = \emptyset$, в противном случае $FV(\alpha) = \{P\}$. Если $\Phi \in \Sigma$ и $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ - набор n-различных переменных, то $\alpha \leftrightharpoons [\bar{x}, \Phi]$ - n-программа и $FV(\alpha) = FV(\Phi) \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

4. Если α - n-программа и $t_1, \ldots, t_n$ - Σ_0-термы, то $\Phi \leftrightharpoons \alpha(t_1, \ldots t_n)$ - DL-формула, $\Phi \in \Sigma$ и $FV(\Phi) \leftrightharpoons FV(\alpha) \cup \bigcup_i FV(t_i)$.

5. Если α, β - n-программы, то $[\alpha \vee \beta]$, $[\alpha \,\&\, \beta]$, $[\exists x\alpha]$, $[\forall x \in y\alpha]$ - n-программы, а $\alpha \subseteq \beta, \alpha \approx \beta$ - DL-формулы; если $\Phi \in \Sigma$, то $[\alpha \vee \Phi]$, $[\Phi \vee \alpha]$, $[\alpha \,\&\, \Phi]$, $[\Phi \,\&\, \alpha]$ - n-программы.

6. Пусть α - n-программа, $\bar{x}$ - n-набор различных переменных:

а) если Φ - DL-формула, то $\Psi \leftrightharpoons \langle \alpha =: \bar{x} \rangle \Phi$ - DL-формула и $FV(\Psi) \leftrightharpoons FV(\alpha) \cup (FV(\Phi) \setminus \{\bar{x}\})$; если $\Phi \in \Sigma$, то и $\Psi \in \Sigma$;

б) если β - n-программа, то $\gamma \leftrightharpoons [\langle \alpha =: \bar{x} \rangle \beta]$ - m-программа и $FV(\gamma) \leftrightharpoons FV(\alpha) \cup (FV(\beta) \setminus \{\bar{x}\})$.

7. Пусть α - n-программа, $P \in \Sigma' \setminus \Sigma_0$ - n-местный предикатный символ:

а) если Φ - DL-формула, то $\Psi \leftrightharpoons \langle \alpha =: P \rangle \Phi$ - DL-формула и $FV(\Psi) \leftrightharpoons FV(\alpha) \cup (FV(\Phi) \setminus \{P\})$; если $\Phi \in \Sigma$, то и $\Psi \in \Sigma$;

б) если β - m-программа, то $\gamma \leftrightharpoons [\langle \alpha =: P \rangle \beta]$ - m-программа и $FV(\gamma) \leftrightharpoons FV(\alpha) \cup (FV(\beta) \setminus \{P\})$;

в) $\beta \leftrightharpoons [P, \alpha]$ - n-программа, $FV(\beta) \leftrightharpoons FV(\alpha) \setminus \{P\}$.

Аналогично [9] мы можем добавить к GES аксиомы, объясняющие смысл вышеопределенных синтаксических конструкций.

Используя аналог теоремы Ганди [2], для динамических логик в GES, мы можем доказать следующую теорему, аналогичную динамическим логикам в KPU.

ТЕОРЕМА 4. Для любой DL-формулы Φ существует формула Ψ из GES такая, что $\Phi \equiv \Psi$, причем $\Psi \in \Sigma^{+}$, если $\Phi \in \Sigma$.

Данная теорема позволяет в определении абстрактных типов в GES использовать в полном объеме возможности динамической логики. Динамическая логика как синтаксический объект является определимой в нашей списочной надстройке, а ее семантика также определима в ней. Поэтому мы можем ее включать в системы программирования, построенные на основе GES, как базисный абстрактный тип данных, имеющий двойственную природу, и как самостоятельный синтаксический тип, и как определимый в GES вместе с семантикой.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описания //Логико-математические основы проблемы МОЗ.-Новосибирск, 1985. -Вып.107: Вычислительные системы. -С. 52-70.

2. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Там же. -С. 3-29.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Замечание об аксиомах списочной надстройки //Логические вопросы теории типов данных. - Новосибирск, 1986. -Вып. 114: Вычислительные системы. -С. 11-15.

4. Его же. Σ-программы и эффективные реализации списочной надстройки //Труды Всесоюз. конф. по прикладной логике. - Новосибирск, 1985. -С. 57-60.

5. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Математические основы семантического программирования //Докл. АН СССР. - 1986. -Т. 289, № 6. -С. 1324-1328.

6. Данные в языках программирования. -М.: Мир, 1982. -265 с.

7. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1986. - 415 с.

8. Его же. Принцип Σ-перечисления //Докл. АН СССР. - 1983. -Т. 270, №4. -С. 786-788.

9. Его же. Динамическая логика над допустимыми множествами //Докл. АН СССР. - 1983. -Т. 273, №5. - С.1045-1048.

10. Его же. Σ-определимость в допустимых множествах //Докл.АН СССР. - 1985. -Т.285, №4. - С. 792-795.

11. BARWISE I. Admissible sets and structures.- Berlin: Springer-Verlag,1975.

12. GONCHAROV S.S., ERSHOV Yr.L., SVIRIDENKO D.I. Semantic Programming// Information processing 86, IFIP,1986.- Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland).- 1986.- P.1093-1100.

13. KAMIN S. Some definitions for algebraic data type specifications//SIGPLAN Noties.-1979.-V.14,N 3.-P.28-37.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 сентября 1987 года