МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1988 год Выпуск 125

УДК 517-9

НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Ю.И. Кулаков

1. Общая постановка задачи. Типичная задача теоретической физики ставится следующим образом.

Имеется некоторый класс физических явлений. Требуется построить физико-математическую теорию этих явлений, применение которой к тем или иным конкретным физическим задачам позволило бы получить конкретные результаты, допускающие сравнение с экспериментом. Для этого необходимо ввести соответствующие физические понятия, сформулировать исходные принципы, найти и описать конкретную модель рассматриваемого класса явлений, написать соответствующие уравнения и свести физическую задачу к математической. Теория считается удовлетворительной, если она согласуется с опытом в пределах заранее оговоренных ограничений.

Давнее стремление человека состоит в том, чтобы найти несколько простых общих законов, которые объяснили бы, почему природа со всей ее кажущейся сложностью и разнообразием такова, какова она есть. Поэтому нам кажется не лишенной определенного интереса и смысла и другая, принципиально отличная от традиционной задача:

Имеется целый класс различных хорошо известных физических теорий со своими понятиями, исходными принципами, уравнениями и моделями. Требуется построить физико-математическую метатеорию, которая, будучи примененной к возникающим в ее рамках конкретным задачам, позволила бы получить известные конкретные физические теории, доказав при этом, в строго определенном смысле, их существование и единственность. Для этого необходимо ввести соответствующие первичные метапонятия, строго математически сформулировать исходный метатеоретический принцип, описать необходимый математический аппарат и свести метатеоретическую задачу к математической. Будем считать метатеорию содержательной, если получаемая из нее конкретная теория с ее основными понятиями, исходными постулатами и уравнениями является в некотором строго определенном смысле единственно возможной.

Решение этой не совсем обычной задачи привело к созданию простой и красивой, естественным путем объединяющей различные разделы физики метатеории, в основании которой лежит новый общефизический, допускающий строгую математическую формулировку принцип. Эта метатеория позволяет понять, почему физические законы имеют тот или иной вид.

Совершенно очевидно, что такая задача и созданная в результате ее решения метатеория, названная нами "теорией физических структур" [1-6], ни в коей мере не подменяет собой традиционную теоретическую физику и вовсе не претендует на решение главной задачи физики - открытие новых физических законов и установление фундаментальной структуры материи.

Однако, представляя собой некую новую красивую математическую структуру, она позволяет взглянуть на известные и привычные вещи с новой и несколько неожиданной стороны и понять при этом, как "устроены" старые, еще с детства знакомые законы физики и хорошо известные физические теории.

О чем-то подобном говорил еще А.Эйнштейн на юбилее А.Стодолы в 1929 году: "Если говорить честно... мы хотим не только знать, как устроена природа (и как происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть, утопической и дерзкой на вид, - узнать, почему природа является именно такой, а не другой. В этом ученые находят наивысшее удовлетворение. В этом состоит прометеевский элемент научного творчества"*).

"Эта "дерзкая мечта" - пишет академик М.А.Марков [7],- представляется отнюдь не утопической. Кажется естественной мысль: единая картина мира должна быть внутренне замкнутой в том смысле, что в ней должна реализоваться убедительным образом ее единственность. Другими словами, единая картина мира может существовать лишь в том виде, в котором она существует. Это значит, что если и пользоваться термином "первоматерия", то свойства первоматерии должны не "задаваться богом", как об этом писал Ньютон, а должны естественным образом получать свои характеристики в коллективе многообразий и единств, к которому принадлежит эта форма реальности. И должны получиться ее свойства именно такие, а не другие".

<u>2. Исходная онтология.</u> Будем исходить из факта существования двух видов реальности: имеются объекты, между которыми существуют пространственно-временные отношения, и имеются объекты, между которыми таковые не существуют. Первые являются вещественными объектами и образуют <u>вещественную реальность</u>; вторые представляют собой идеальные объекты и образуют <u>идеальную физико-математическую реальность</u>.

Обратимся к миру идеальных физико-математических объектов. В нем можно выделить три уровня реальности.

<u>Уровень идеальных объектов-посредников.</u> К нему относятся идеальные физические (ЗФ) и математические (ЗМ) объекты, допускающие непосредственное отображение на множество вещественных объектов (заштрихованная область на рис.1), т.е. допускающие наглядную непосредственную интерпретацию, и тем самым осущест-

*) Цитируется по [7].

вляющие "посредничество" между абстрактными структурами мира идеальных физико-математических объектов и физическими объектами вещественного мира.

Уровень традиционных, многочисленных и достаточно специализированных промежуточных структур. К нему относятся идеальные объекты традиционной (рабочей) математики (2М) и традиционной теоретической физики (2Ф), не допускающие непосредственной интерпретации в терминах вещественного мира.

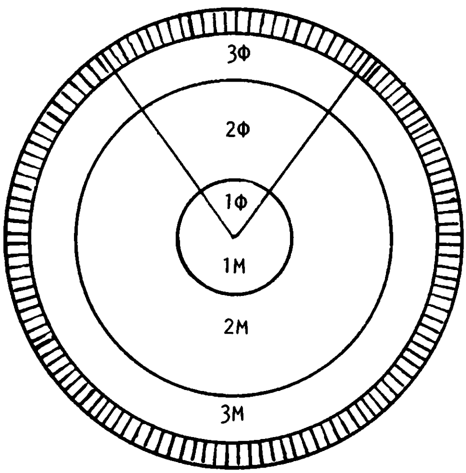


Рис. 1

Уровень порождающих структур. К нему относятся три порождающие математические структуры Бурбаки (1М): алгебраическая, порядка, топологическая и одна универсальная порождающая физическая структура (1Ф).

На рис.1 показано место универсальной порождающей физической структуры 1Ф среди других идеальных физико-математических объектов.

Итак, физическая структура представляет собой наиболее глубокий и универсальный тип отношений между идеальными физическими объектами и играет в физике ту же самую роль, что и три хорошо известные порождающие математические структуры (1М) в математике.

3. Строение физики как единого целого. Н.Бурбаки предложили программу построения математики как целостной системы зна -

ния. Они показали, что в основании математики лежат три независимые порождающие структуры - алгебраическая, топологическая и структура порядка.

Аналогичная задача "бурбакизации" может быть поставлена и в физике (задача построения физики как единого целостного знания). Смысл ее состоит в том,чтобы свести все многообразие физических законов, понятий и величин, все разнообразие существующих уравнений и формализмов в единую систему, представляющую собой крепко сложенный организм, отдельные части которого естественным образом согласованы друг с другом и могут быть истолкованы как различные проявления одной единственной универсальной физической **структуры, имеющей смысл особой** скрытой фундаментальной симметрии мира физических объектов.

Используя некоторый несложный прием, нам удалось выделить из хорошо известных физических законов и основных уравнений физическую структуру - нечто общее, универсальное,присущее всем физическим законам, независимо от конкретной природы изучаемых объектов,и используемых при этом измерительных приборов. После этого нами была решена и обратная задача - найден универсальный, простой и естественный математический формализм, позволяющий получить, и притом единственным образом, из одной исходной абстрактной физической структуры целый набор конкретных физических структур, определяющих собой фундаментальные физические законы.

Так, можно показать, что из первичных аксиом, определяющих матричные представления физической структуры вытекают как следствия исходные аксиомы линейной алгебры (линейность) и метрики различных фундаментальных геометрий: евклидовой и псевдоевклидовой, геометрий пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны (геометрий Римана и Лобачевского),симплектической, проективной.

Далее можно показать (рис.2), что из универсальной физической структуры непосредственно следуют все первичные физические законы (законы механики, основные постулаты теории относительности, законы термодинамики и законы электродинамики), которые обычно принимаются в качестве исходных постулатов. При этом открывается возможность введения всех основных первичных физических законов, понятий и величин по некоторой одной общей простой схеме.

Итак, можно утверждать, что исходная универсальная физическая структура (I) порождает целый спектр различных конкретных физических структур, изображенных на рис. 2 в виде ствола (П), каждая из которых при соответствующей интерпретации, приводит к тому или иному фундаментальному физическому закону и соответствующим физическим понятиям и величинам.

Фундаментальные физические структуры, в свою очередь, порождают иерархическую последовательность тесно связанных между собой и переходящих друг в друга все более глубоких и более абстрактных формализмов (Ш), образующих основные разделы традиционной теоретической физики (см.таблицу).

4. Старая формулировка теории физических структур. Напомним основные положения, лежащие в основе старой формулировки исходных аксиом теории физических структур [1-6].

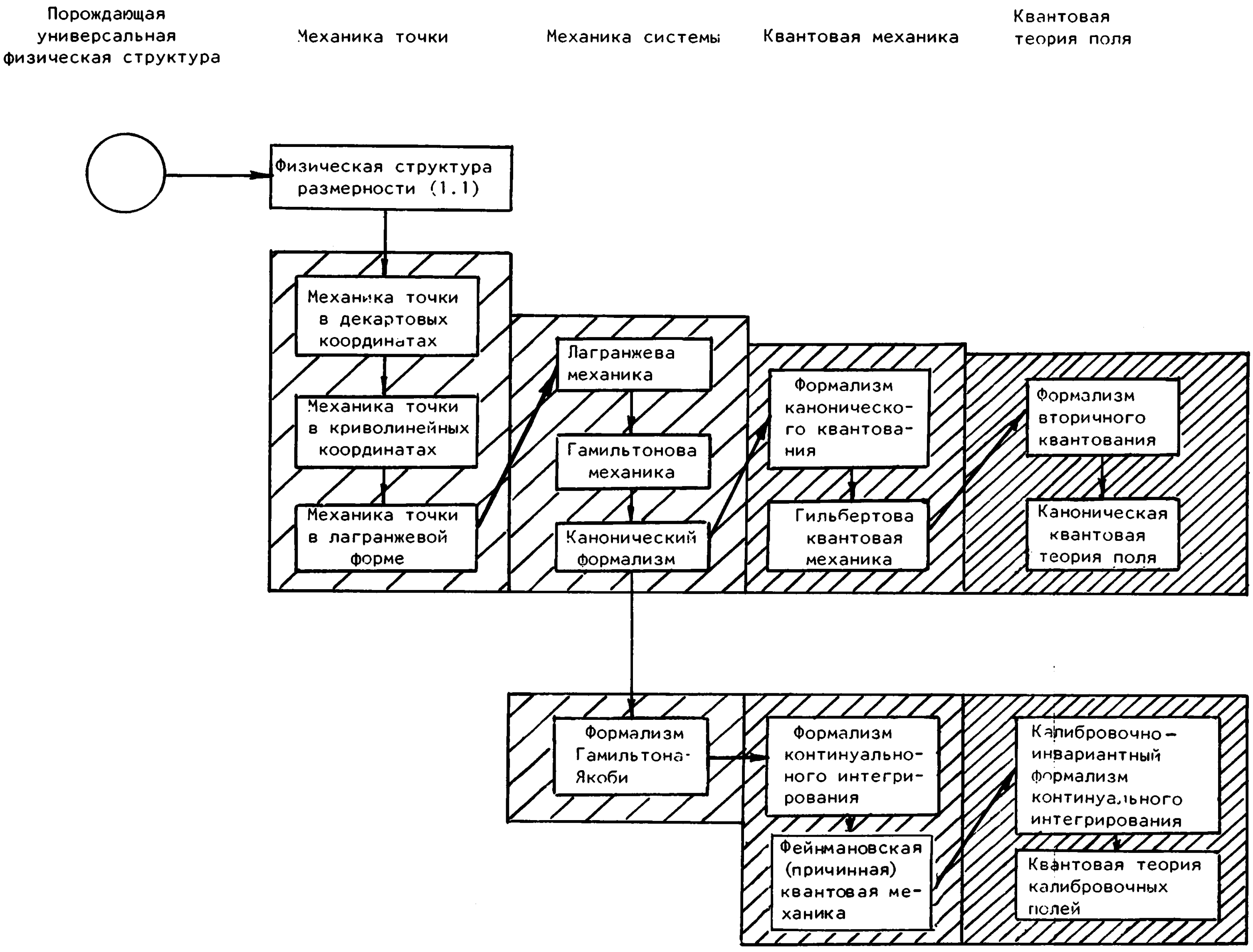
A_1. Физическая структура на двух множествах (первоначальный вариант). Имеем два множества вещественных объектов различной природы:

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \ldots\}, \qquad \tilde{\mathfrak{N}} = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots\}.$$

Предполагается, что каждой паре $\tilde{i} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{N}}$ с помощью некоторой измерительной операции ставится в соответствие действительное число $\tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{\alpha})$. (Знак ~ означает, что речь идет о вещественных (не идеальных!) физических объектах и

Таблица

Иерархическая связь теории физических структур с традиционными разделами теоретической физики (на примере механики)



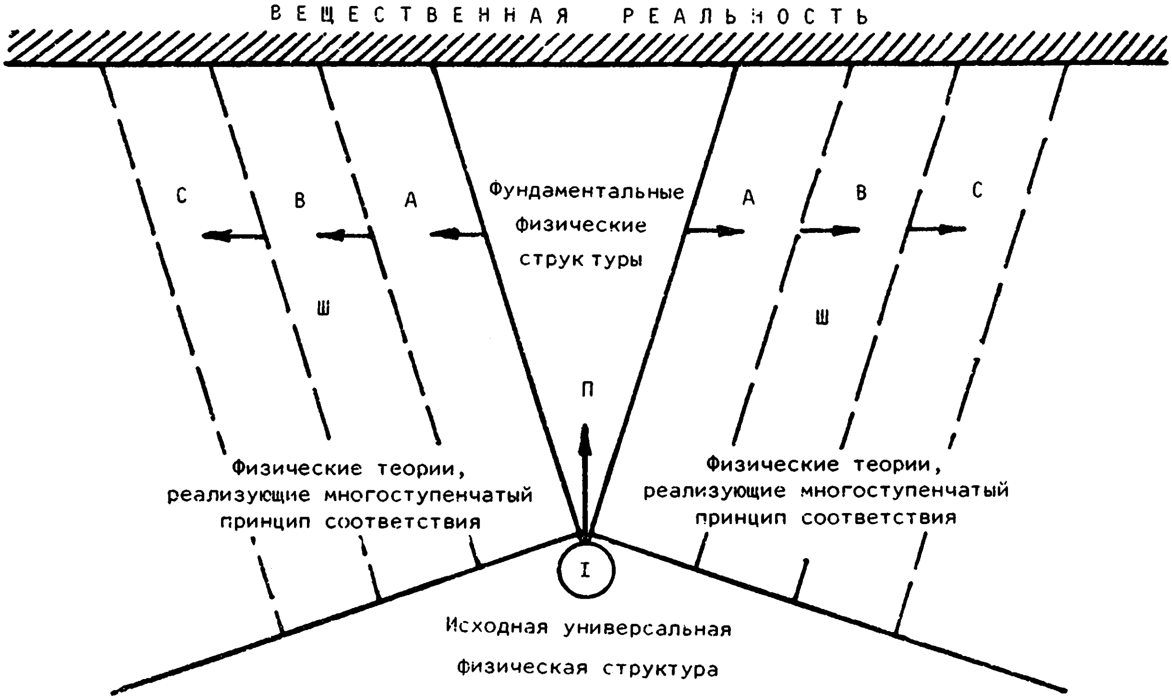


Рис. 2. Место теории физических структур в традиционной теоретической физике

реальных измерительных приборах.) Другими словами, предполагается, что задано отображение

$$\tilde{a}: \quad \tilde{\mathfrak{M}} \times \tilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{i}, \tilde{\alpha} \mapsto \tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{\alpha}) \quad ,$$

которое будем в дальнейшем называть <u>конвергенцией</u> (от латинского convergo – приближаться, сходиться).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тройка $\langle \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{N}}; \tilde{a} \rangle$ образует физическую структуру ранга (r,s), если существует действительная функция rs действительных переменных

$$\Phi: \mathbb{R}^{rs} \to \mathbb{R}$$

такая, что

$$\forall \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_r \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

$$\forall \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s \in \tilde{\mathfrak{N}}$$

$$\Phi\,[\tilde{a}(\tilde{i}_1, \tilde{\alpha}_1), \dots, \tilde{a}(\tilde{i}_1, \tilde{\alpha}_s) \;,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{a}(\tilde{i}_r, \tilde{\alpha}_1 \;, \dots, \tilde{a}(\tilde{i}_r, \tilde{\alpha}_s)] = 0 \quad . \qquad (1)$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном ранге (r,s) найти неизвестное отображение $\tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{\alpha})$ и неизвестную функцию Φ, обращающие равенство (1) в тождество.

При этом наиболее уязвимым местом как с физической, так и с математической точки зрения является введение подходящей топологии на множествах $\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$.

<u>B$_1$. Физическая структура на одном множестве (первоначальный вариант).</u> Имеем одно множество вещественных объектов

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots \}.$$

Предполагается, что каждой паре $\tilde{i},\tilde{k}$ с помощью некоторой измерительной процедуры ставится в соответствие действительное число $\tilde{a}(\tilde{i},\tilde{k})$, т.е. предполагается, что задано отображение

$$\tilde{a}: \quad \tilde{\mathfrak{M}} \times \tilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{i},\tilde{k} \mapsto \tilde{a}(\tilde{i},\tilde{k}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара $\langle \tilde{\mathfrak{M}};\tilde{a}\rangle$ образует физическую структуру ранга r, если существует действительная функция $\frac{1}{2}r(r-1)$ переменных

$$\Phi: \mathbb{R}^{\frac{1}{2}r(r-1)} \to \mathbb{R}$$

такая, что

$$\forall \tilde{i}_1,\ldots,\tilde{i}_r \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

$$\begin{aligned}\Phi[\tilde{a}(\tilde{i}_1,\tilde{i}_2),\tilde{a}(\tilde{i}_1,\tilde{i}_3),\ldots,\tilde{a}(\tilde{i}_1,\tilde{i}_r),\\ \tilde{a}(\tilde{i}_2,\tilde{i}_3),\ldots,\tilde{a}(\tilde{i}_2,\tilde{i}_r),\\ \ldots\ldots\ldots\\ \tilde{a}(\tilde{i}_{r-1},\tilde{i}_r)]=0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном ранге r найти неизвестное отображение $\tilde{a}(\tilde{i},\tilde{k})$ и неизвестную функцию Φ, обращающие равенство (2) в тождество.

Здесь так же, как и в случае A_1, вопрос упирается в выбор подходящей топологии на множестве $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Чтобы избежать указанных трудностей, связанных с необходимостью введения подходящей топологии на множества $\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$, рассмотрим несколько иное определение физической структуры.

A_2. Физическая структура на двух множествах (промежуточный вариант). Как и в первоначальном варианте, имеем два множества вещественных объектов различной природы:

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \ldots\}, \quad \tilde{\mathfrak{N}} = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots\} .$$

Точно так же предполагается, что задано отображение

$$a: \quad \tilde{\mathfrak{M}} \times \tilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{i}, \tilde{\alpha} \mapsto \tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{\alpha}) .$$

Далее предполагается, что существуют отображение

$$x: \tilde{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}^m ,$$

$$\tilde{i} \mapsto i \equiv x(\tilde{i}) \equiv x_1(\tilde{i}), \ldots, x^m(\tilde{i}) ,$$

ставящее в соответствие каждому вещественному объекту $\tilde{i} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ идеальный объект i, представляющий собой m-мерный "квазивектор" $i = x(\tilde{i})$, т.е. набор, состоящий из m действительных координат $x_1(\tilde{i}), \ldots, x_m(\tilde{i})$, и отображение

$$\xi : \tilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}^n ,$$

$$\tilde{a} \to \alpha \equiv \xi \tilde{\alpha} \equiv \xi_1(\tilde{\alpha}), \ldots, \xi_n(\tilde{\alpha}) ,$$

ставящее в соответствие каждому вещественному объекту $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{N}}$ идеальный объект α, представляющий собой n-мерный "квазивектор" $\alpha = \xi(\tilde{\alpha})$, т.е. набор, состоящий из n действительных координат $\xi_1(\tilde{\alpha}), \ldots, \xi_n(\tilde{\alpha})$.

Кроме того, предполагается, что существует действительная функция $m+n$ действительных переменных

$$a: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} ,$$

$$x_1, \ldots, x_m; \xi_1, \ldots, \xi_n \mapsto a(x, \xi) \equiv$$

$$\equiv a(x_1, \ldots, x_m; \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

такая, что

$$\forall \tilde{i} \in \tilde{\mathfrak{M}}, \quad \forall \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{N}},$$

$$a[x_1(\tilde{i}), \ldots, x_m(\tilde{i});\ \xi_1(\tilde{\alpha}), \ldots, \xi_n(\tilde{\alpha})] \equiv$$

$$\equiv a[x(\tilde{i});\ \xi(\tilde{\alpha})] = \tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{\alpha}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Тройка $\langle \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{N}}; \tilde{a} \rangle$ образует физическую структуру ранга (r,s) и размерности (m,n), если ранг и размерность связаны между собой соотношениями:

$$\boxed{r = n + 1} \boxed{s = m + 1}$$

и если существует действительная функция rs действительных переменных

$$\Phi : \mathbb{R}^{rs} \to \mathbb{R},$$

такая, что

$$\forall x_1 \equiv x_1(\tilde{i}_1), \ldots, x_m(\tilde{i}_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_r \equiv x_1(\tilde{i}_r), \ldots, x_m(\tilde{i}_r);$$

$$\forall \xi_1 \equiv \xi_1(\tilde{\alpha}_1), \ldots, \xi_n(\tilde{\alpha}_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_s \equiv \xi_1(\tilde{\alpha}_s), \ldots, \xi_n(\tilde{\alpha}_s);$$

$$\begin{aligned} \Phi\,[&a(x_1,\xi_1), \ldots, a(x_1,\xi_s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a(x_r,\xi_1), \ldots, a(x_r,\xi_s)] \equiv 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$a(x_\rho, \xi_\sigma) \equiv a[x_1(\tilde{i}_\rho), \ldots, x_m(\tilde{i}_\rho);$$

$$\xi_1(\tilde{\alpha}_\sigma)\ ,\dots,\ \xi_n(\tilde{\alpha}_\sigma)]\quad ,$$

$$\rho = 1,2,\dots,r;\qquad \sigma = 1,2,\dots,s\ .$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном ранге (r,s) (или размерности (m,n)) найти неизвестную функцию $m+n$ действительных переменных

$$a(x_1,\dots,x_m;\ \xi_1,\dots,\xi_n)$$

и неизвестную функцию rs действительных переменных

$$\begin{array}{l}\Phi\,(u_{11},\dots,u_{1s},\\ \quad\dots\dots\dots\dots\\ \quad u_{r1},\dots,u_{rs})\ ,\end{array}$$

обращающие равенство (3) в тождество.

Слабым местом этой формулировки является дополнительное требование связи ранга (r,s) с размерностью (m,n) : $r = n+1$, $s = m+1$.

B$_2$. Физическая структура на одном множестве (промежуточный вариант). Как и в первоначальном варианте, имеем одно множество вещественных объектов произвольной природы

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i}_1,\tilde{i}_2,\dots\}.$$

Точно так же предполагается, что задано отображение

$$\tilde{a}:\ \tilde{\mathfrak{M}}\times\tilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R},\quad \tilde{i},\tilde{k} \mapsto \tilde{a}(\tilde{i},\tilde{k})\ .$$

Далее предполагается, что существует отображение

$$x:\ \tilde{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}^m\ ,$$

$$\tilde{i} \mapsto i\ \equiv x(\tilde{i})\ \equiv x_1(\tilde{i}),\dots,\ x_m(\tilde{i})\ ,$$

ставящее в соответствие каждому вещественному объекту $\tilde{i}$ идеальный объект i , представляющий собой m-мерный "квазивектор" $i = x(\tilde{i})$, т.е. набор, состоящий из m действительных координат $x_1(\tilde{i}), \ldots, x_m(\tilde{i})$.

Кроме того, предполагается, что существует действительная функция $2m$ действительных переменных

$$a: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

$$x_1(1), \ldots, x_m(1);\ x_1(2), \ldots, x_m(2) \mapsto$$
$$\mapsto a(1,2) \equiv a[x_1(1), \ldots, x_m(1);\ x_1(2), \ldots, x_m(2)]$$

такая, что

$$\forall \tilde{i}, \tilde{k} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$$
$$a[x_1(\tilde{i}), \ldots, x_m(\tilde{i});\ x_1(\tilde{k}), \ldots, x_m(\tilde{k})] = \tilde{a}(\tilde{i}, \tilde{k}) \quad .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара $\langle \widetilde{\mathfrak{M}} ; \tilde{a} \rangle$ образует физическую структуру ранга r и размерности m на одном множестве, если ранг и размерность связаны между собой соотношением

$$\boxed{r = m + 2}$$

и если существует действительная функция $\frac{1}{2} r(r-1)$ действительных переменных

$$\Phi : \mathbb{R}^{\frac{1}{2} r(r-1)} \to \mathbb{R}$$

такая, что

$$\forall x_1 \equiv x_1(\tilde{i}_1), \ldots, x_m(\tilde{i}_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_r \equiv x_1(\tilde{i}_r), \ldots, x_m(\tilde{i}_r)$$

$$\Phi\, [a(x_1, x_2),\ a(x_1, x_3), \ldots,\ a(x_1, x_r),$$

$$a(x_2,x_3),\ldots,a(x_2,x_r),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a(x_{r-1}\ x_r)]\equiv 0, \qquad (4)$$

где

$$a(x_\lambda,x_\rho)\equiv a[x_1(\tilde{i}_\lambda),\ldots,x_m(\tilde{i}_\lambda);\ x_1(\tilde{i}_\rho),\ldots,x_m(\tilde{i}_\rho)]\ ,$$
$$\lambda<\rho=1,2,\ldots,r\ .$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном ранге r (или размерности m) найти неизвестную функцию $2m$ действительных переменных $a(x_\lambda,x_\rho)$ и заранее неизвестную функцию $\frac{1}{2}r(r-1)$ действительных переменных

$$\Phi(u_{12},u_{13},\ldots,u_{1r},$$
$$u_{23},\ldots,u_{2r},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{r-1,r})\ ,$$

обращающих равенство (4) в тождество.

Здесь, как и в предыдущем случае A_2, наиболее уязвимым местом остается дополнительное требование связи ранга r с размерностью m : $r=m+2$.

5. На подступах к новой формулировке. До сих пор мы имели дело с отдельными вещественными объектами $\tilde{i}_1,\tilde{i}_2,\ldots$; $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\ldots$ и рассматривали отображение

$$\tilde{a}:\ \tilde{\mathfrak{M}}\times\tilde{\mathfrak{N}}\to\mathbb{R},$$

описывающее отношения между ними. Таким образом, отношения между множествами $\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$ описывались в терминах отношений между индивидуальными объектами $\tilde{i}\in\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathfrak{N}}$.

Как мы увидим ниже, формулировка исходных аксиом теории физических структур значительно упрощается и становится более универсальной, если перейти от отношений между индивидуальными объектами $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ к отношениям между "мешками" $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ и $K = \{k_1, k_2, \ldots\}$, с одной стороны, и "мешками" $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ и $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ - с другой.

Этот переход осуществляется следующим образом: согласно определению 3 на множествах $\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$ имеет место физическая структура ранга $(r,s) = (n+1, m+1)$, если

$$\forall i_1 \ldots i_n, i_{n+1} \in \mathfrak{M}, \quad \forall \alpha_1 \ldots \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathfrak{N}$$

$$\begin{aligned}\Phi\,(&a_{i_1\alpha_1}, \ldots, a_{i_1\alpha_m}, a_{i_1\alpha_{m+1}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{i_n\alpha_1}, \ldots, a_{i_n\alpha_m}, a_{i_n\alpha_{m+1}},\\ &a_{i_{n+1}\alpha_1}, \ldots, a_{i_{n+1}\alpha_m}, a_{i_{n+1}\alpha_{m+1}}) \equiv 0\,.\end{aligned}$$

Этому соотношению можно придать определенный физический смысл, если переписать его в виде, разрешенном относительно последнего аргумента: $a_{i_{n+1}\alpha_{m+1}} =$

$$= f\left(a_{i_{n+1}\alpha_1}, \ldots, a_{i_{n+1}\alpha_m};\ \begin{matrix} a_{i_1\alpha_1} \ldots a_{i_1\alpha_m} & a_{i_1\alpha_{m+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; & \ldots\ldots \\ a_{i_n\alpha_1} \ldots a_{i_n\alpha_m} & a_{i_n\alpha_{m+1}} \end{matrix}\right).$$

Перепишем его в новых обозначениях

$$\begin{aligned} &i_1 \ldots i_n \to \bar{1} \ldots \bar{n}; \qquad i_{n+1} \to i\,,\\ &\alpha_1 \ldots \alpha_m \to 1 \ldots m; \qquad \alpha_{m+1} \to \alpha\,;\end{aligned}$$

$$a_{i\alpha} = f\left(a_{i1}, \ldots, a_{im};\ \begin{matrix} a_{\bar{1}1} \ldots a_{\bar{1}m} & a_{\bar{1}\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots ; & \ldots \\ a_{\bar{n}1} \quad a_{\bar{n}m} & a_{\bar{n}\alpha} \end{matrix}\right). \tag{5}$$

Назовем мешки $\bar{\Delta} = \{\bar{1}, \dots, \bar{n}\}$ и $\Delta = \{1, \dots, m\}$ "эталонами" первого и второго типов.

При этом соотношение (5) допускает следующее простое истолкование:

> Отношение произвольных объектов $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ между собой определяется их отношением к эталонам противоположной природы и взаимными отношениями самих эталонов.

Но вернемся к соотношению (5). Среди $m + mn + n$ аргументов функции f m первых аргументов

$$a_{i1}, \dots, a_{im} \equiv a_{i_p 1}, \dots, a_{i_p m}$$

можно рассматривать как p-ю строку матрицы

$$\partial_{I\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} \dots & a_{i_1 m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i_n 1} & a_{i_n m} \end{pmatrix},$$

где

$$I = \begin{Bmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \{1, \dots, m\};$$

n последних аргументов

$$\begin{pmatrix} a_{\bar{1}\alpha} \\ \dots \\ a_{\bar{n}\alpha} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{\bar{1}\alpha_q} \\ \dots \\ a_{\bar{n}\alpha_q} \end{pmatrix}$$

можно рассматривать как q-й столбец матрицы

$$\mathcal{A}_{\bar{\mathbf{1}}A} = \begin{pmatrix} a_{\bar{1}\alpha_1} & \ldots & a_{\bar{1}\alpha_m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{\bar{n}\alpha_1} & \ldots & a_{\bar{n}\alpha_m} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{\mathbf{1}} = \begin{Bmatrix} \bar{1} \\ \ldots \\ \bar{n} \end{Bmatrix}, \qquad A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\},$$

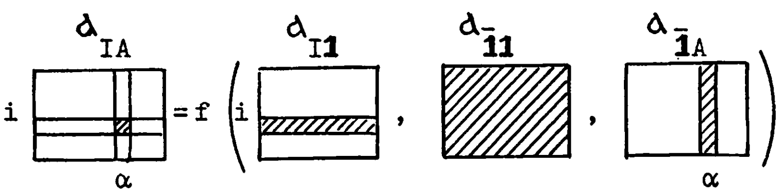
и наконец, mn промежуточных аргументов $\begin{pmatrix} a_{\bar{1}1} & \ldots & a_{\bar{1}m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{\bar{n}1} & & a_{\bar{n}m} \end{pmatrix}$

можно рассматривать как матрицу $\mathcal{A}_{\bar{\mathbf{1}}\mathbf{1}}$.

С другой стороны, зависимую переменную $a_{i\alpha} \equiv a_{i_p\alpha_q}$ можно рассматривать как p,q-й элемент матрицы

$$\mathcal{A}_{IA} = \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \ldots & a_{i_1\alpha_m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{i_n\alpha_1} & \ldots & a_{i_n\alpha_m} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, соотношение (5) можно трактовать как функциональную связь



между четырьмя $n \times m$-матрицами:

$$\alpha_{IA}, \quad \alpha_{I\mathbf{1}},$$
$$\alpha_{\bar{\mathbf{1}}A}, \quad \alpha_{\bar{\mathbf{1}}\mathbf{1}},$$

осуществляемую с помощью некоторой функции $m+mn+n$ действительных переменных:

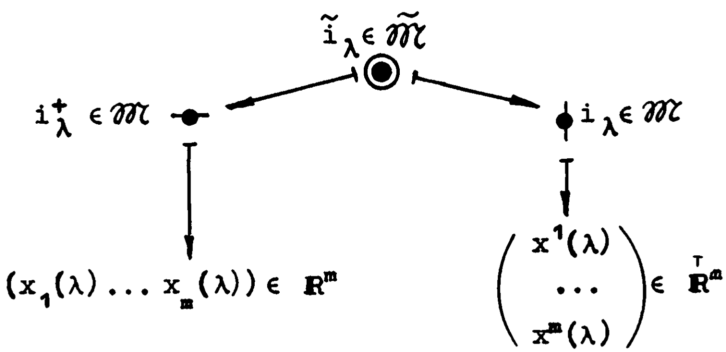
$$\alpha_{IA} = f(\alpha_{I\mathbf{1}}, \ \alpha_{\bar{\mathbf{1}}\mathbf{1}}, \ \alpha_{\bar{\mathbf{1}}A}). \tag{6}$$

После такого предварительного рассмотрения приступим к последовательной и строгой формулировке исходных аксиом теории физических структур.

6. <u>Вещественные объекты и соответствующие им идеальные квазивекторы и квазиковекторы.</u> Основной характеристикой вещественного объекта является его размерность, равная числу внутренних степеней свободы.

Рассмотрим множество вещественных объектов одной и той же природы, имеющих размерность m $\quad \tilde{\mathcal{M}} = \{ \tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \ldots \}$.

Каждому вещественному объекту $\tilde{i}_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, поставим в соответствие <u>два</u> идеальных объекта (рис.3): к в а з и к о в е к т о р размерности m $\quad i^+_\lambda \in \mathcal{M}^+ = \{ i^+_1, i^+_2, \ldots \}$ и к в а з и в е к т о р той же самой размерности $i_\lambda \in \mathcal{M} = \{ i_1, i_2, \ldots \}$. (Ср. с ковектором и вектором (копространством и пространством) в линейной алгебре.)



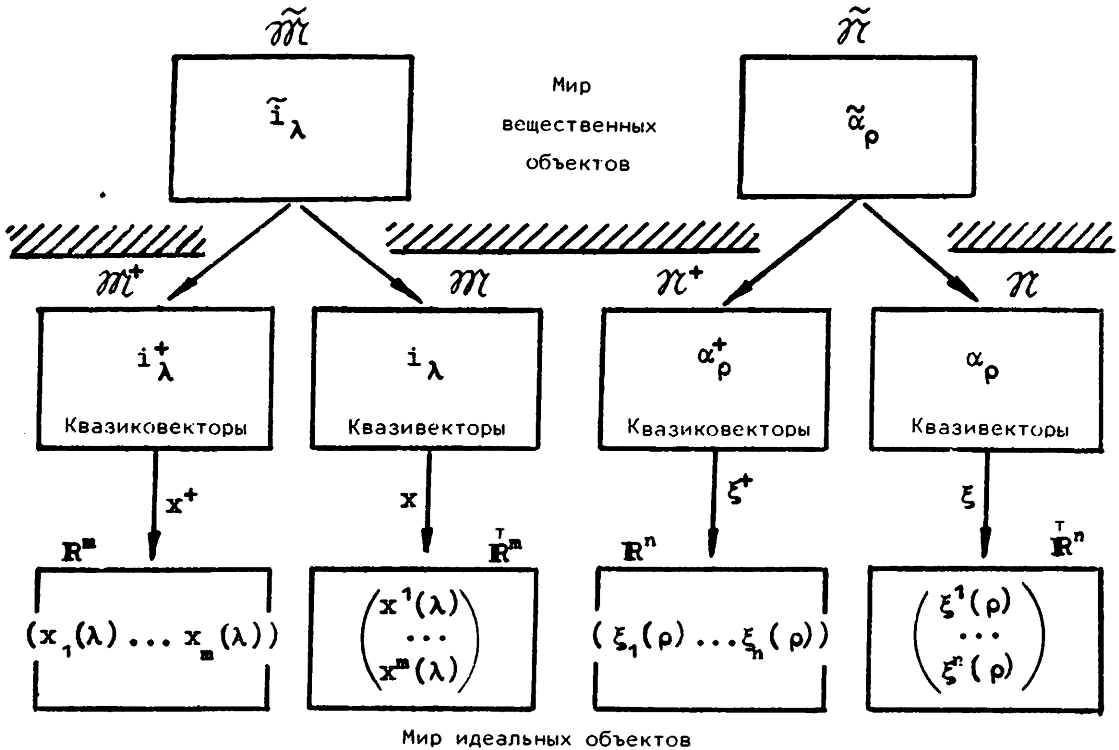


Рис. 3. Вещественные объекты и соответствующие им идеальные объекты

Другими словами, рассмотрим отображение:

$$V: \tilde{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{M}^{+} \times \mathfrak{M} \quad ,$$
$$\tilde{i}_{\lambda} \mapsto i^{+}_{\lambda}, i_{\lambda} \, .$$

При этом предполагается, что существуют два отображения

$$x^{+}: \mathfrak{M}^{+} \to \mathbb{R}^{m}, \tag{7}$$
$$i^{+}_{\lambda} \mapsto x_{1}(\lambda), \ldots, x_{m}(\lambda)$$

и

$$x: \mathfrak{M} \to \overset{\mathrm{T}}{\mathbb{R}}{}^{m},$$
$$i_{\lambda} \mapsto \begin{pmatrix} x^{1}(\lambda) \\ \ldots \\ x^{m}(\lambda) \end{pmatrix} \, . \tag{8}$$

Вещественные числа $x_{\mu}(\lambda)$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, назовем <u>ковариантными координатами квазиковектора</u> i^{+}_{λ}, а вещественные числа $x^{\mu}(\lambda)$ - <u>контравариантными координатами квазивектора</u> i_{λ}.

7. <u>Отношения между вещественными объектами различной природы и соответствующие им отношения между идеальными объектами.</u> Напомним, что основная задача теории физических структур состоит в том, чтобы, зная отношения между двумя вещественными объектами, установить атрибуты*) каждого объекта в отдельности. В связи с этим необходимо установить определенное соответствие между отношениями на множестве вещественных объектов и отношениями на множестве идеальных объектов.

Рассмотрим два множества вещественных объектов различной природы:

*) Атрибут (от лат. attributum) - существенный отличительный признак предмета.

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \ldots\}, \quad \widetilde{\mathfrak{N}} = \{\tilde{\alpha}\ , \tilde{\alpha}\ , \ldots\ \}.$$

Будем считать, что существуют два отображения:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}: \widetilde{\mathfrak{M}} \times \widetilde{\mathfrak{N}} \to \mathbb{R}\ , \\ &\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho \mapsto \tilde{a}(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho\ ) \end{aligned} \qquad (9)$$

и

$$\begin{aligned} &\tilde{a}^{\mathrm{T}} : \widetilde{\mathfrak{N}} \times \widetilde{\mathfrak{M}} \to \mathrm{R}, \\ &\tilde{\alpha}_\rho, \tilde{i}_\lambda \mapsto \tilde{a}(\tilde{\alpha}_\rho, \tilde{i}_\lambda\ )\ , \end{aligned} \qquad (10)$$

ставящие в соответствие каждой паре вещественных объектов $(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho)$ действительные числа $\tilde{a}(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho\ )$ и $\tilde{a}(\tilde{\alpha}_\rho, \tilde{i}_\lambda)$. Такими отображениями могут явиться измерительные операции, ставящие в соответствие каждой паре вещественных объектов $(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho)$ числовые результаты измерений $\tilde{a}(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho\ )$ и $\tilde{a}(\tilde{\alpha}_\rho, \tilde{i}_\lambda)$.

Рассмотрим два новых отображения:

$$\begin{aligned} &a: \mathfrak{M}^+ \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}, \\ &i^+_\lambda, \alpha_\rho \mapsto a(i^+_\lambda, \alpha_\rho\ ) \end{aligned} \qquad (11)$$

и

$$\begin{aligned} &a^{\mathrm{T}} : \mathfrak{N}^+ \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}\ , \\ &\alpha^+_\rho, i_\lambda \mapsto a(\alpha^+_\rho, i_\lambda\ ) \end{aligned} \qquad (12)$$

и будем считать

$$a(i^+_\lambda,\ \alpha_\rho\ ) = \tilde{a}(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho\ )\ , \qquad (13)$$

$$a(\alpha^+_\rho, i_\lambda\ ) = \tilde{a}(\tilde{\alpha}_\rho,\ \tilde{i}_\lambda\ )\ . \qquad (14)$$

Таким образом, мы отождествляем измеряемые на опыте отношения между двумя вещественными объектами $\tilde{i}_\lambda$ и $\tilde{\alpha}_\rho$ с недоступными непосредственному измерению отношениями между

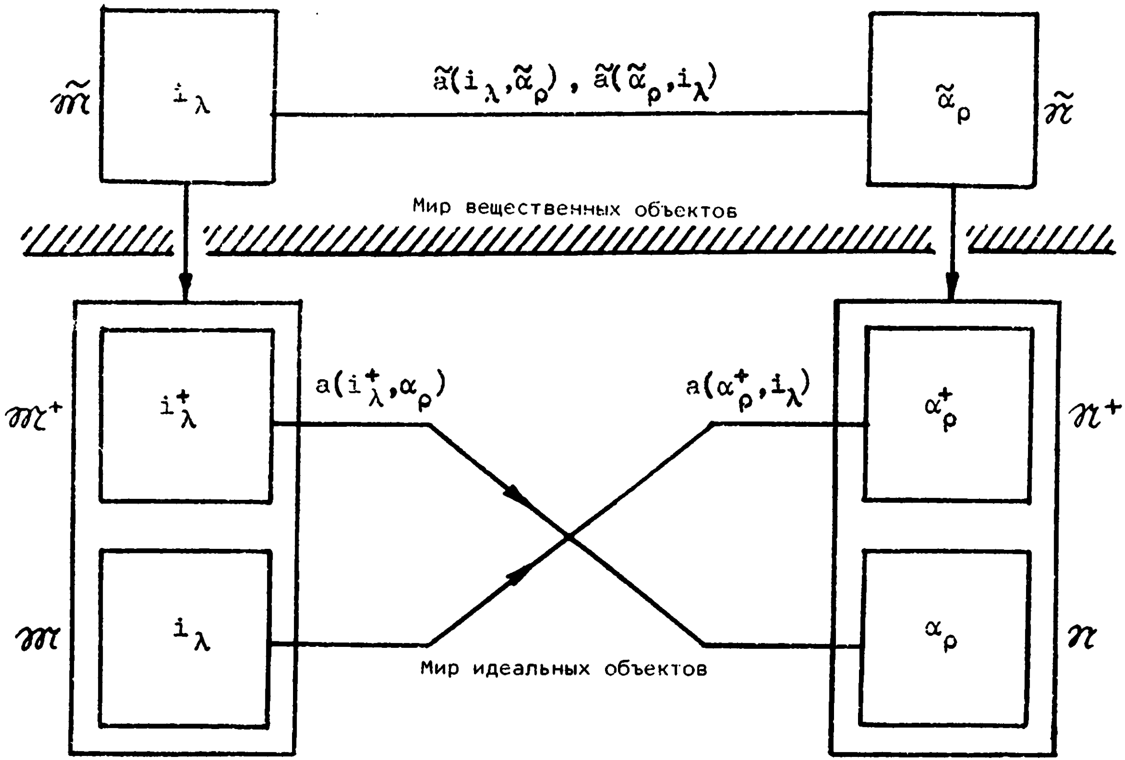


Рис. 4. Отношения между вещественными объектами и соответствующие им отношения между идеальными объектами

идеальными объектами i^+_λ и α_ρ, с одной стороны, и α^+_ρ и i_λ - с другой (рис.4).

8. <u>Группы вещественных объектов и соответствующие им блоки и коблоки идеальных объектов.</u> Итак, рассмотрим новое множество

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^n = \{\tilde{i},\tilde{k},\dots\},$$

элементами которого являются группы

$$\tilde{i} = \{\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_n\} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n ,$$

$$\tilde{k} = \{\tilde{k}_1,\dots,\tilde{k}_n\} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n ,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

состоящие из n произвольных вещественных объектов из $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Каждой n-элементной группе $\tilde{i} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^n$ поставим в соответствие <u>два</u> набора идеальных объектов: коблок

$$i^+ = \begin{pmatrix} i^+_1 \\ \dots \\ i^+_n \end{pmatrix} \in (\mathfrak{M}^+)^n ,$$

состоящий из n квазиковекторов $i^+_1,\dots,i^+_n$ из $\mathfrak{M}^+$, и блок

$$i = (i_1 \dots i_n) \in \mathfrak{M}^n ,$$

состоящий из n квазивекторов $i_1,\dots,i_n$ из $\mathfrak{M}$.

В силу существования отображений (7) и(8) имеют место следующие отображения:

$$X^+ : (\mathfrak{M}^+)^n \to \mathbb{R}^{nm} ,$$

$$i^+ = \begin{pmatrix} i_1^+ \\ \dots \\ i_n^+ \end{pmatrix} \to I^+ = \begin{pmatrix} \boxed{x_1(1)\dots x_m(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \boxed{x_1(n)\dots x_m(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^+ \dots x_{1m}^+ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}^+ \dots x_{nm}^+ \end{pmatrix},$$

где $x^+_{\nu\mu} \equiv x_\mu(\nu)$, $\nu = 1,2,\dots,n$; $\mu = 1,2,\dots,m$; и

$$X:\ \mathfrak{M}^n \to \mathbb{R}^{nm},$$

$$i = (i_1 \dots i_n) \mapsto I = \left(\boxed{\begin{matrix} x^1(1) \\ \cdot\ \cdot \\ x^m(1) \end{matrix}} \begin{matrix} \dots \\ \cdot\ \cdot \\ \dots \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} x^1(n) \\ \cdot\ \cdot \\ x^m(n) \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{m1} \dots x_{mn} \end{pmatrix},$$

где $x_{\mu\nu} \equiv x^\mu(\nu)$ (рис. 5).

Далее nm действительных чисел $x_\mu(\nu)$ назовем $n \times m$ – матрицей ковариантных координат коблока i^+, а nm действительных чисел $x^\mu(\nu)$ – $m \times n$-матрицей контравариантных координат блока i.

9. Отношения между группами вещественных объектов и соответствующие им отношения между блоками и коблоками. В силу существования отображений (9) и (10), ставящих в соответствие каждой паре вещественных объектов $(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho)$ действительные числа $\tilde{a}(\tilde{i}_\lambda, \tilde{\alpha}_\rho)$ и $\tilde{a}(\tilde{\alpha}_\rho, \tilde{i}_\lambda)$, имеют место следующие отображения:

$$\tilde{a}^{nm}:\ \tilde{\mathfrak{M}}^n \times \tilde{\mathfrak{N}}^m \to \mathbb{R}^{nm},$$

$$\tilde{i},\tilde{\alpha} \mapsto \tilde{a}(\tilde{i},\tilde{\alpha}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}(\tilde{i}_1,\tilde{\alpha}_1) & \dots & \tilde{a}(\tilde{i}_1,\tilde{\alpha}_m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \tilde{a}(\tilde{i}_n,\tilde{\alpha}_1) & \dots & \tilde{a}(\tilde{i}_n,\tilde{\alpha}_m) \end{pmatrix}}_{m} \Big\updownarrow n,$$

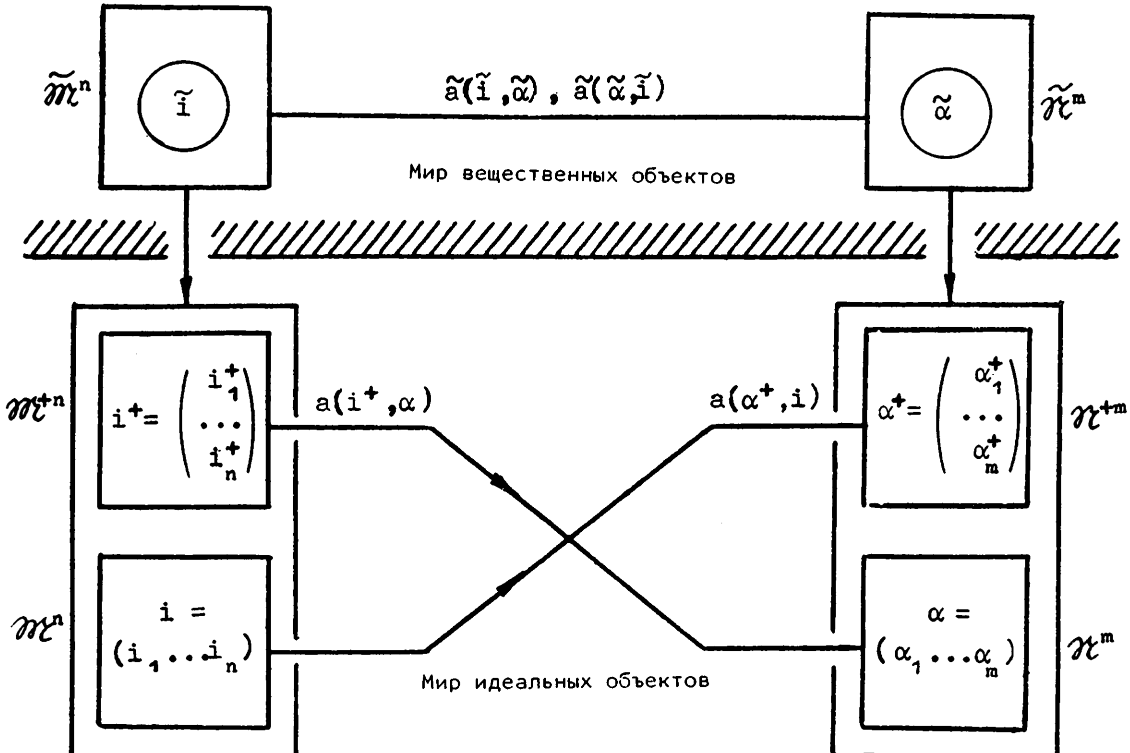


Рис. 5. Отношения между группами вещественных объектов и соответствующие им отношения между идеальными блоками и коблоками

$$\tilde{a}^{mn}: \tilde{\mathcal{N}}^{m} \times \tilde{\mathcal{M}}^{n} \to \mathbb{R}^{mn},$$

$$\tilde{\alpha},\tilde{i} \mapsto \tilde{a}(\tilde{\alpha},\tilde{i}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \tilde{a}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{i}_1) \ldots & \tilde{a}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{i}_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}(\tilde{\alpha}_m,\tilde{i}_1) \ldots & \tilde{a}(\tilde{\alpha}_m,\tilde{i}_n) \end{pmatrix} \\ \longleftarrow n \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{array},$$

ставящие в соответствие группам $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$ $n\times m$ -матрицу $\tilde{a}(\tilde{i},\tilde{\alpha}) \in \mathbb{R}^{nm}$ и $m\times n$-матрицу $\tilde{a}(\tilde{\alpha},\tilde{i}) \in \mathbb{R}^{mn}$.

Точно так же, в силу существования отображения (11), ставящего в соответствие квазивектору i^{+}_{λ} и квазивектору α_{ρ} число $a(i^{+}_{\lambda},\alpha_{\rho}) = \tilde{a}(\tilde{i}_{\lambda},\tilde{\alpha}_{\rho})$, и отображения (12), ставящего в соответствие квазивектору α^{+}_{ρ} и квазивектору i_{λ} число $a(\alpha^{+}_{\rho},i_{\lambda}) = \tilde{a}(\tilde{\alpha}_{\rho},\tilde{i}_{\lambda})$, имеют место следующие отображения:

$$a^{nm}: \mathcal{M}^{+n} \times \mathcal{N}^{m} \to \mathbb{R}^{nm},$$

$$i^{+},\alpha \mapsto a(i^{+},\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a(i^{+}_1,\alpha_1) \ldots & a(i^{+}_1,\alpha_m) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a(i^{+}_n,\alpha_1) \ldots & a(i^{+}_n,\alpha_m) \end{pmatrix} \\ \longleftarrow m \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{array},$$

$$a^{mn}: \mathcal{N}^{+m} \times \mathcal{M}^{n} \to \mathbb{R}^{mn},$$

$$\alpha^{+},i \mapsto a(\alpha^{+},i) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a(\alpha^{+}_1,i_1) \ldots & a(\alpha^{+}_1,i_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a(\alpha^{+}_m,i_1) \ldots & a(\alpha^{+}_m,i_n) \end{pmatrix} \\ \longleftarrow n \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{array},$$

ставящие в соответствие коблоку i^+ и блоку α $n \times m$-матрицу $a(i^+,\alpha) \in \mathbb{R}^{nm}$ и коблоку α^+ и блоку i $n \times m$-матрицу $a(\alpha^+,i)$, где согласно (13) и (14)

$$a(i^+,\alpha) = \tilde{a}(\tilde{i},\tilde{\alpha}) , \qquad a(\alpha^+,i) = \tilde{a}(\tilde{\alpha},\tilde{i}) .$$

Таким образом, мы отождествляем измеряемые на опыте отношения между группами вещественных объектов $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$ с недоступными непосредственному измерению отношениями между коблоком i^+ и блоком α, с одной стороны, и коблоком α^+ и блоком i - с другой.

10. Универсальная физическая структура. Пусть

$$M = \{x,y,\dots\},$$
$$N = \{\xi,\eta,\dots\},$$
$$P = \{a,b,\dots\}$$

три произвольных множества, связанных между собой некоторым отображением

$$a\colon M \times N \to P, \quad x,\xi \mapsto a(x,\xi);$$

	ξ	η	ζ ...
x	a	b	c ...
y	d	e	f ...
z	g	h	s ...

Множества M и N назовем множествами сопряженных физических объектов, множество P - субметрикой, обобщающей понятие расстояния, с одной стороны, и скалярного произведения - с другой, а отображение $a\colon M \times N \to P$, характеризующее отношения между двумя множествами M и N, - конвергенцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Четверка $\langle M,N;P;a\rangle$ образует универсальную физическую структуру с субметрикой P, если существует трехместная операция

$$f\colon P\times P\times P\to P,\quad a,b,c\mapsto f(a,b,c)$$

такая, что

$$\forall x,y\in M\ ,\quad \forall \xi,\eta\in N$$

$$\boxed{a(x,\xi)=f[a(x,\eta),a(y,\eta),a(y,\xi)]}\,. \tag{15}$$

Итак, задание $a(y,\eta)$, $a(y,\xi)$ и $a(x,\eta)$ однозначно определяет $a(x,\xi)$ (рис. 6).

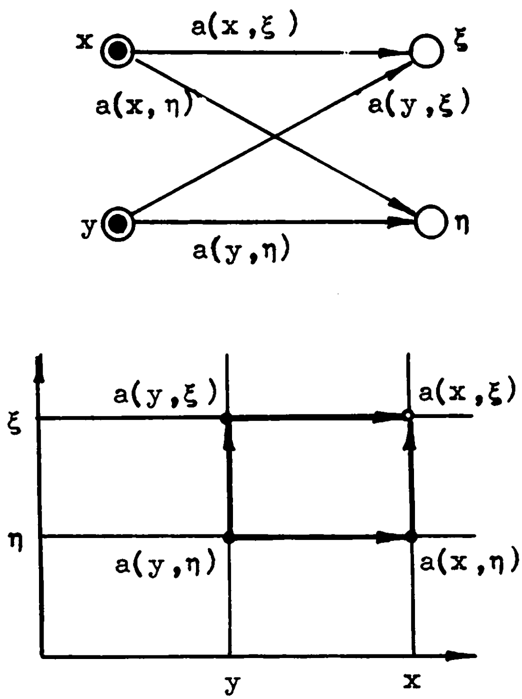


Рис. 6

Задача состоит в том, чтобы найти неизвестное отображение $a\colon M\times N\to P$ и неизвестную трехместную операцию $f\colon P\times P\times P\to P$, обращающие равенство (15) в тождество.

11. Р-представление универсальной физической структуры. Пусть множества M, N и P имеют одну и ту же природу, т.е. $\mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{P}$. В этом случае будем говорить, что пара $\langle \mathrm{P}, a \rangle$ образует P-представление универсальной физической структуры с субметрикой P, если существует трехместная операция

$$f: \mathrm{P} \times \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}, \qquad a, b, c \mapsto f(a, b, c)$$

такая, что

$$x, y, u, v \in \mathrm{P}$$

$$a(x,u) = f[a(x,v),\ a(y,v),\ a(y,u)].$$

Если $\mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{P} = \mathbb{R}^{nm}$, где $\mathbb{R}^{nm}$ - множество действительных прямоугольных $n \times m$-матриц, то будем говорить, что пара $\langle \mathbb{R}^{nm}, a \rangle$ образует матричное представление универсальной физической структуры с матричной субметрикой.

Принимая во внимание все оговорки, сделанные в п.3 по поводу строения физики в целом (см.рис.2), можно сказать, что универсальное соотношение (15), определяющее физические структуры различных рангов, в какой-то степени реализует мечту Макса Планка об одной-единственной формуле, заключающей в себе все многообразие физических законов.

В заключение автор приносит глубокую благодарность профессору Юрию Гавриловичу Косареву, без постоянного внимания и интереса которого к этой работе она еще долго бы пролежала в виде разрозненных черновиков, а также научному сотруднику Климентию Федоровичу Самохвалову за постоянный интерес к теории физических структур, а также за целый ряд критических замечаний, в большой степени стимулировавших появление настоящей статьи.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск, 1968 (НГУ).

2. КУЛАКОВ Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур //Сиб. мат. журн. 1971. -Т. 12, №5. -С. 1142.

3. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур //Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Вып. 15. Записки научных семинаров ЛОМИ. Л., 1983. -Т. 127. - С. 103-151.

4. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа //Докл. АН СССР. - 1971. -Т. 201. - №3. -С. 570-572.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3.2) //Сиб. мат. журн. 1973. - Т. 14. - № 5. - С. 1057.

6. MIKHAYLITCHENKO G.G. Géometries à deux dimensions dans la théorie de structures physiques //C.R. Acad. Sci. Paris. - 1981. - Vol. 293, Série 1. - P. 529.

7. МАРКОВ М.А. О единстве и многообразии форм материи в физической картине мира //Наука и жизнь. - 1982. - № 7. -С. 9.

Поступила в ред.-изд.отд.

25 мая 1988 года