МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1988 год Выпуск 125

УДК 513.811

# ТРЕХМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.Х. Лев

В исследованиях по основаниям физики Ю.И.Кулаков [1,2] высказал предположение о существовании нового типа симметрии - феноменологической симметрии. Новая симметрия выражает идею равноправия физических объектов некоторого рода по отношению к физическому закону, действующему для этих объектов. Была предложена некоторая математическая модель строения физического закона как феноменологически инвариантной связи между измеряемыми на опыте величинами.

Оказывается, что с каждым фундаментальным физическим законом тесно связан определенный тип устойчивых отношений (физическая структура определенного ранга). Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение общих свойств физических законов независимо от конкретной "физической" природы изучаемых объектов и конкрет - ной реализации используемых при этом измерительных приборов.

Физические структуры могут быть определены на одном, двух и более множествах физических объектов. Изучение феноменологической симметрии (т.е. существования физических структур) составляет предмет теории физических структур.

Задача о существовании физических структур на двух множествах полностью решена в диссертации Г.Г.Михайличенко. Он нашел все возможные физические структуры ранга $(r,s)$ при $r$,

$s \geq 2$ и показал, что существуют структуры только для $r=s=2$; $r=s+1\geq 3$ и $r=s+2=4$.

Приведем краткую постановку задачи для нахождения физических структур на одном множестве*). Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое множество однородных физических объектов, которому соответствует многообразие $M$ размерности $m$, т.е. каждый элемент множества $\mathfrak{M}$ характеризуется $m$ независимыми параметрами $x^1$, $x^2, \dots, x^m$. Поставим в соответствие каждой паре элементов из множества $\mathfrak{M}$ число $a: \mathfrak{M}\times\mathfrak{M} \to R$. Например, $\langle j, k\rangle \to a(i\,j) \in \in \mathbf{R}$. Естественно, что $a(jk) = f(x^1_j, \dots, x^m_j; x^1_k, \dots, x^m_k)$. Выберем из множества $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{M}_r$, состоящее из $r$ элементов $j, k, \dots, v, w \in \mathfrak{M}_r$.

Будем говорить, что физические объекты множества $\mathfrak{M}$ находятся в отношении феноменологической симметрии (или существует физическая структура ранга $r$), если для любого $\mathfrak{M}_r \subset \subset \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi\,[a(jk), \dots, a(vw)] = 0\,, \tag{1}$$

где $j, k, \dots, v, w \in \mathfrak{M}_r$ и число переменных, от которых зависит функция $\Phi$, равно $r(r-1)/2$. На функцию $\Phi$ и $a: \mathfrak{M}\times\mathfrak{M} \to R$ вводятся естественные ограничения.

1. Функция $a(jk)$ должна быть достаточно гладкой и существенным образом зависеть от координат $x^1_j, \dots, x^m_j$; $x^1_k, \dots, x^m_k$ (по Эйзенхарту [4, с.16]).

Функция $\Phi$ должна быть достаточно гладкой, и хотя бы для одной пары $(j, k)$ $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$, что позволяет разрешить уравнение (1) относительно аргумента $a(jk)$.

Возникает следующая математическая задача: при фиксированном числе $r$ найти такую функцию $\Phi$ от $r(r-1)/2$ переменных и такой набор $a(jk)$, чтобы при любом выборе подмножества $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{M}$ имело место соотношение (1).

---

*) Точные формулировки и определения даны в [3]

Для случаев $r = 3$, $r = 4$ эта задача решена Г.Г.Михайличенко [5]. Для физической структуры ранга $r = 4$ оказалось,что некоторые выражения $a(jk) = a(x_j, y_j, x_k, y_k)$, найденные методами теории физических структур,совпадают с известными метриками двумерных геометрий для пространств постоянной кривизны и различных плоскостей, т.е. геометрия двумерных метрических пространств дает нам пример бинарной физической структуры ранга $r = 4$ на одном множестве. Естественно предположить,что геометрия $n$-мерных метрических пространств является конкретной интерпретацией бинарных физических структур ранга $r = n+2$ на одном множестве.

С другой стороны,известно,что задание метрики в $n$-мерном пространстве определяет геометрию этого пространства. По известной метрике можно найти полную группу преобразований этого пространства, относительно которой эта метрика инвариантна. На основании этого Г.Г.Михайличенко высказал [6] предположение о связи групповой и феноменологической симметрий и решил обратную задачу: зная группу,найти возможные инварианты (метрики) для двумерных пространств. Результаты совпали с решениями, полученными методами теории физических структур.

Казалось бы, что групповым методом можно найти все невырожденные метрики любых $n$-мерных пространств.Но найти такие решения уже для трехмерных пространств групповым методом не удалось.Дело в том,что при групповом подходе особенно важно наличие групповой классификации (или классификации соответствующих алгебр Ли).Дать такую классификацию для любого числа параметров не представляется возможным. Уже для трехмерных пространств (шестимерные алгебры Ли) количество вазможных вариантов около трех сотен,и для каждого варианта необходимо найти явный вид всех шести операторов, а затем решить около трех сотен систем из шести уравнений. Причем получим как вырожденные,так и невырожденные решения. Задача сложная и громоздкая и для $n > 6$ вряд ли выполнимая.

Для нахождения физической структуры ранга $r = 5$ автор разработал общий достаточно универсальный параметрический метод, с помощью которого можно находить физические структуры и на двух множествах, в частности были найдены [7] физические структуры ранга (3,3), (4,2), (4,3) и др. Хотя физические структуры на двух множествах были исследованы Г.Г.Михайличенко функциональным методом, однако применение общего параметрического метода позволило внести интересные уточнения, связанные с единственностью решения.

Этим же параметрическим методом автор исследовал физические структуры ранга $r = 4$, но в отличие от результатов Г.Г.Михайличенко нашел всего две формулы, содержащие некоторое число параметров. Придавая параметрам определенные значения, можно получить все 10 геометрий [5].

С помощью общего параметрического метода удалось решить задачу о нахождении физической структуры ранга $r = 5$ и впервые на основе теории физических структур найти все невырожденные метрики трехмерных пространств.

Приведем краткую постановку задачи для физической структуры ранга $r = 5$. Выше была приведена формулировка задачи для физических структур ранга $r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ образует физическую структуру ранга $r = 5$, если для любых пяти точек $i, j, k, l, m \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi\,[a(ij), a(ik), a(il), a(im), a(jk), a(jl), a(jm), a(kl), a(km), a(lm)] = 0. \qquad (2)$$

Пусть множеству $\mathfrak{M}$ (как указывалось выше) соответствует многообразие размерности $n = r - 2$, т.е. в данном случае $n = 3$. Следовательно, $a(ij) = f(x_i, y_i, z_i;\ x_j, y_j, z_j)$, ..., $a(lm) = f(x_l, y_l, z_l;\ x_m, y_m, z_m)$. Потребуем, чтобы $a(ij)$

была достаточно гладкой и существенным образом зависела от своих аргументов. Пусть $\Phi$ - также достаточно гладкая функция и $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$.

Оказывается, что требование существования универсальной зависимости (2) однозначно определяет допустимый набор выражений $a(ij)$ и вид функции $\Phi$.

Продифференцируем (2) по всем 15 параметрам $x_i, y_i, z_i, \ldots$ $\ldots, x_m, y_m, z_m$. Получим систему из 15 уравнений относительно 10 частных производных функций $\Phi$ по каждому своему аргументу. Так как $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, любой определитель 10-го порядка, составленный из коэффициентов системы, равен нулю. Можно показать, что ранг коэффициентов системы равен девяти.

Из всех определителей 10-го порядка достаточно рассмотреть только те, которые окаймляют какой-нибудь определитель девятого порядка, не равный нулю. Таких определителей шесть. Разлагая их, например, по первому столбцу, получаем систему из шести уравнений относительно частных производных функции $a(ij) = f(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)$ по своим аргументам. Комбинируя уравнения, можно прийти к более простому виду коэффициентов. Фиксируя элементы $k, l, m$, окончательно получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} A_1^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} A_2^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} A_3^{\mu}(i) +$$

$$+ \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} A_1^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} A_2^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} A_3^{\mu}(j) = 0, \qquad (3)$$

где $\mu = 1, 2, \ldots 6$; $A_1^{\mu}(i) = A_1^{\mu}(x_i, y_i, z_i)$, $A_1^{\mu}(j) = A_1^{\mu}(x_j, y_j, z_j)$ и т.д.

Для того чтобы система имела решение, необходимо, чтобы определитель шестого порядка, составленный из коэффициентов системы, равнялся нулю. Записывая коэффициенты в явном виде, получаем:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} A_1^1(i) & A_2^1(i) & A_3^1(i) & \\ A_1^2(i) & A_2^2(i) & A_3^2(i) & \\ BA_1^1(i)+CA_1^2(i) & BA_2^1(i)+CA_2^2(i) & BA_3^1(i)+CA_3^2(i) & (j) \\ A_1^4(i) & A_2^4(i) & A_3^4(i) & \\ DA_1^1(i)+EA_1^4(i) & DA_2^1(i)+EA_2^4(i) & DA_3^1(i)+EA_3^4(i) & \\ FA_1^2(i)+KA_1^4(i) & FA_2^2(i)+KA_2^4(i) & FA_3^2(i)+KA_3^4(i) & \end{array} \right\| \qquad (4)$$

$$(B=\varepsilon_{1i},\ C=\varepsilon_{2i},\ D=\varepsilon_{3i},\ E=\varepsilon_{4i},\ F=\varepsilon_{5i},\ K=\varepsilon_{6i}),$$

где $(j)$ обозначает три столбца с такими же коэффициентами, но с индексами $(j)$ (например, $A_1^1(j)$ и т.д.).

Раскрывая определитель и сокращая на множители, не равные нулю, имеем:

$$\left\| \begin{matrix} (\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{1j}) & (\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{2j}) & 0 \\ (\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{3j}) & 0 & (\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{4j}) \\ 0 & (\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{5j}) & (\varepsilon_{6i}-\varepsilon_{6j}) \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (5)$$

Можно показать, что ранг системы (3) равен пяти. Запишем систему (3) в операторном виде: $X_\mu f(ij) = 0$; $\mu = 1,\dots,6$. По теории, для того, чтобы система (3) имела решение, каждый интеграл системы должен удовлетворять также уравнениям совместности, которые получаются образованием $[X_\mu, X_\nu]$-скобок [8]. Уравнения совместности (для $\nu = 1,\dots,10$) будут иметь вид:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}B_1^\nu(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}B_2^\nu(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}B_3^\nu(i)+$$
$$+\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}B_1^\nu(j)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}B_2^\nu(j)+\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}B_3^\nu(j) = 0. \qquad (6)$$

Можно показать, что подсистема из пяти уравнений системы (3) будет полной, т.е. любое уравнение совместности из (6) будет линейной комбинацией из уравнений подсистемы. Более того, как показано в [9], коэффициенты в этих линейных комбинациях будут константами. В операторной форме можно записать:

$$X_\mu f(ij) = 0;$$

$$[X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0; \qquad (7)$$

$$[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa ;$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1, \ldots, 6$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu} = -c^{\varkappa}_{\nu\mu}$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu}$ - константы,

$$[X_\mu, [X_\nu, X_\varkappa]] + [X_\nu, [X_\varkappa, X_\mu]] + [X_\varkappa, [X_\mu, X_\nu]] = 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что физической структуре ранга $r = 5$ соответствуют шестимерные алгебры Ли.

Для решения системы необходимо знать все возможные варианты коммутационных соотношений. Иначе говоря, нужна классификация шестимерных алгебр Ли. Как уже отмечалось, такая классификация слишком громоздка и непригодна для практического использования. Теория физических структур дает возможность получить необходимую классификацию более простыми методами и сразу выделить варианты коммутационных соотношений, дающих невырожденные решения.

Рассмотрим матрицу коэффициентов (4) системы (3). Коэффициенты имеют специфический вид. Рассмотрим первые три уравнения системы (3) (первые три строчки матрицы (4)). Отметим, что $i$-я часть третьего уравнения есть линейная комбинация $i$-х частей первого и второго уравнений с переменными коэффициентами $\varepsilon_{1i} = \varepsilon_1(x_i, y_i, z_i)$ и $\varepsilon_{2i} = \varepsilon_2(x_i, y_i, z_i)$, а $j$-я часть - с коэффициентами $\varepsilon_{1j}$ и $\varepsilon_{2j}$. Такая же ситуация для 1-, 4-, 5-го уравнений, 2-, 4-, 6-го уравнений и, вследствие соотношения (5), для 3-, 5-, 6-го уравнений.

Рассмотрим подробнее 1-, 2-, 3-е уравнения. Можно упростить вид коэффициентов, входящих в эти уравнения, перейдя к новым переменным: $\bar{x}=\bar{x}(x,y,z)$; $\bar{y}=\bar{y}(x,y,z)$; $\bar{z}=\bar{z}(x,y,z)$. Выберем их так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\bar{x}_x A_1^1 + \bar{x}_y A_2^1 + \bar{x}_z A_3^1 = t;$$

$$\bar{y}_x A_1^1 + \bar{y}_y A_2^1 + \bar{y}_z A_3^1 = 0;$$

$$\bar{z}_x A_1^1 + \bar{z}_y A_2^1 + \bar{z}_z A_3^1 = 0,$$

где $t \neq 0$ - константа. Такие $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ можно найти, так как не все $A_1^1, A_2^1, A_3^1$ равны нулю (обратное ведет к уменьшению ранга системы (3), что не допускается). Тогда коэффициенты подсистемы из 1-, 2-, 3-го уравнений примут вид:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \\ T_1(i) & T_2(i) & T_3(i) & (j) \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2 T_1)(i) & (\varepsilon_2 T_2)(i) & (\varepsilon_2 T_3)(i) & \end{array} \right\|.$$

Можно показать, что систему всегда можно преобразовать так, чтобы ее коэффициенты удовлетворяли соотношению $T_3/T_2 = \varepsilon_2 T_3/\varepsilon_2 T_2 = \lambda(y,z)$. Введем новые переменные $\tilde{z}_i$; $\tilde{z}_j$ так, чтобы $\tilde{z}_{\bar{y}} + \lambda(\bar{y},\bar{z})\cdot\tilde{z}_{\bar{z}}=0$, где $\tilde{z} = \tilde{z}(\bar{y},\bar{z})$. Тогда

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ T_1(i) & T_2(i) & T_1(j) & T_2(j) \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2 T_1)(i) & (\varepsilon_2 T_2)(i) & (\varepsilon_1+\varepsilon_2 T_1)(j) & (\varepsilon_2 T_2)(j) \end{array} \right\|.$$

Получившаяся подсистема аналогична по виду и числу коэффициентов системе уравнений для физической структуры ранга $r = 4$. Как показано в [9], операторы такой системы образуют трехмерную алгебру Ли (в данном случае - трехмерную подалгебру Ли). Таким образом, для операторов $X_1, X_2, X_3$, соответствующих 1-, 2-, 3-му уравнениям, имеют место коммутационные соотношения: $[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa$, $\mu,\nu,\varkappa = 1,2,3$. Аналогично можно показать, что операторы $(X_1, X_4, X_5)$, $(X_2, X_4, X_6)$, $(X_3, X_5, X_6)$ также образуют трехмерные подалгебры.

В дальнейшем для упрощения записи переобозначим: $X_1 \to (1), \ldots, X_6 \to (6)$.

Итак, имеем следующий результат: в шестимерных алгебрах Ли, соответствующих физической структуре ранга $r = 5$, существуют четыре трехмерные подалгебры: (1,2,3), (1,4,5), (3,4,6), (3,5,6).

Как отмечалось, ранг системы (3) равен пяти. Без потери общности рассмотрим первые пять уравнений. Сюда входят две трехмерные подалгебры: (1,2,3), (1,4,5). Коммутаторы для каждой из трехмерных подалгебр удовлетворяют соотношениям:

$$[X_\mu, X_\nu] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_\varkappa ,$$

где $\mu,\nu,\varkappa = 1,2,3$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu} = -c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ - вещественные числа.

Классифицируем шестимерные алгебры Ли в зависимости от ранга двух определителей третьего порядка $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}|$, соответствующих двум трехмерным подалгебрам. Обозначим: $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}| = \Delta^i_\alpha$, где $i = 1,2,3$ обозначает ранг определителя, $\alpha = 1,2,3,4$ - номер подгруппы: 1 → (1,2,3); 2 → (1,4,5), 3 → (2,4,6), 4 → (3,5,6). Все возможные варианты сведем в таблицу.

Таблица

| Варианты | | | |
|---|---|---|---|
| I. $\Delta^3_\alpha \neq 0$ | II. $\Delta^3_\alpha = 0$ | III. $\Delta^2_\alpha = 0$ | IV. $\Delta^1_\alpha = 0$ |
| а) $\Delta^3_\beta \neq 0$ | а) $\Delta^3_\beta = 0$ | а) $\Delta^2_\beta = 0$ | а) $\Delta^1_\beta = 0$ |
| б) $\Delta^3_\beta = 0$ | б) $\Delta^2_\beta = 0$ | б) $\Delta^1_\beta = 0$ | |
| в) $\Delta^2_\beta = 0$ | в) $\Delta^1_\beta = 0$ | | |
| г) $\Delta^1_\beta = 0$ | | | |

Имеем четыре определителя $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}|$ третьего порядка, соответствующие четырем имеющимся трехмерным подалгебрам. Ранги этих определителей могут не совпадать друг с другом: V: $\Delta^3_\alpha \neq \neq 0$, $\Delta^3_\beta = 0$, $\Delta^2_\gamma = 0$, $\Delta^1_\delta = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не равны друг другу. Во всех других случаях хотя бы у двух определителей ранги совпадают и возможны только следующие варианты: Iа, IIа, IIIа, IVа. Таким образом, вместо десяти вариантов, указанных в таблице, достаточно рассмотреть пять: Iа, IIа, IIIа, IVа, V.

Подробный анализ этих вариантов выходит за рамки данной статьи. Приведем здесь окончательные результаты. В общем случае решение системы (3) имеет вид: $f(ij) = \chi[\Psi(ij)]$, где $\chi$ - монотонная функция, а $\Psi$ - интеграл системы (3). Напомним, что искались варианты коммутационных соотношений, которые приводят к невырожденным решениям (т.е. функция $f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_i, z_j)$ существенным образом зависит от своих аргументов). Приведем все возможные невырожденные решения системы (3) с соответствующими коммутационными соотношениями.

Из варианта Iа:

$$[1\ 2]=k_1(2)\quad [1\ 4)=k_1(4)\quad [2,6]=k_2k_1(4)\quad [3,6]=k_2k_1(5)$$
$$[3,1]=k_1(3)\quad [5,1]=k_1(5)\quad [4,6]=-k_3k_1(2)\quad [5,6]=-k_3k_1(3)$$
$$[2,3]=k_2(1)\quad [4,5]=k_3(1)\quad [2,4]=0\quad [3,5]=0$$
$$[1,6]=0\quad [3,4]=(6)\quad [2,5]=(6)$$

$$\Psi(ij) = \\ =\mathrm{ch}\sqrt{k_3}z_i\ \mathrm{ch}\sqrt{k_3}z_j[\mathrm{ch}\sqrt{k_2}y_i\ \mathrm{ch}\sqrt{k_2}y_j\ \mathrm{ch}\sqrt{k_1}(x_i-x_j)- \\ -\mathrm{sh}\sqrt{k_2}y_i\ \mathrm{sh}\sqrt{k_2}y_j]-\mathrm{sh}\sqrt{k_3}z_i\ \mathrm{sh}\sqrt{k_3}z_j. \tag{8}$$

В зависимости от знака вещественных констант $k_1, k_2, k_3$ из этого общего решения можно выписать четыре независимых решения, которые являются метриками пространств постоянной кривизны, и указать соответствующую трехмерную "сферу":

а) $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{t}^2 = 1$:

$$\Psi(ij)=\mathrm{Cos}z_i\cdot\mathrm{Cos}z_j[\mathrm{Cos}y_i\cdot\mathrm{Cos}y_j\cdot\mathrm{Cos}(x_i-x_j)+$$
$$+\mathrm{Sin}y_i\cdot\mathrm{Sin}y_j]+\mathrm{Sin}z_i\cdot\mathrm{Sin}z_j\,,$$

б) $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{t}^2 = 1$:

$$\Psi(ij)=\mathrm{Ch}z_i\cdot\mathrm{Ch}z_j[\mathrm{Cos}y_i\cdot\mathrm{Cos}y_j\cdot\mathrm{Cos}(x_i-x_j)+$$
$$+\mathrm{Sin}y_i\cdot\mathrm{Sin}y_j]-\mathrm{Sh}z_i\cdot\mathrm{Sh}z_j\,,$$

в) $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 - \bar{t}^2 = 1$:

$$\Psi(ij)=\mathrm{Ch}z_i\cdot\mathrm{Ch}z_j[\mathrm{Ch}y_i\cdot\mathrm{Ch}y_j\cdot\mathrm{Cos}(x_i-x_j)-$$
$$-\mathrm{Sh}y_i\cdot\mathrm{Sh}y_j]-\mathrm{Sh}z_i\cdot\mathrm{Sh}z_j\,,$$

г) $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 - \bar{t}^2 = 1$:

$$\Psi(ij)=\mathrm{Ch}z_i\cdot\mathrm{Ch}z_j[\mathrm{Ch}y_i\cdot\mathrm{Ch}y_j\;\mathrm{Ch}(x_i-x_j)-$$
$$-\mathrm{Sh}y_i\cdot\mathrm{Sh}y_j]-\mathrm{Sh}z_i\cdot\mathrm{Sh}z_j\;.$$

При $k_2 = 0$ соотношения (8) приводятся к виду:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [1,2]=0 | [1,4]=0 | [2,6]=-(4) | [3,6]=(5) | [1,6]=0 |
| [3,1]=(2) | [5,1]=(4) | [4,6]=-(2) | [5,6]=(3) | [3,4]=0 |
| [2,3]=(1) | [4,5]=(1) | [2,4]=0 | [3,5]=0 | [2,5]=0 |

Соответствующий интеграл:

$$\Psi(ij) = (x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+\varepsilon(z_i-z_j)^2\,. \tag{9}$$

В зависимости ст знака вещественной константы $\varepsilon$ полу - чаем метрики евклидовой и псевдоевклидовой плоскости в трех - мерном пространстве.

Далее, из Iа получаем также:

$[1,2]=(1)$ $[1,4]=(1)$ $[2,6]=0$ $[3,6]=0$

$[3,1]=(2)$ $[5,1]=(4)$ $[4,6]=0$ $[5,6]=0$

$[2,3]=(3)$ $[4,5]=(5)$ $[2,4]=\frac{1}{2}(2)-\frac{1}{2}(4)$ $[3,5]=0$

$[1,6]=0$ $[2,5]=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(5)-(6)$ $[3,4]=-\frac{1}{2}(3)-\frac{1}{2}(5)+(6)$

$$\Psi(ij)=y_i y_j(x_i-x_j)+z_i-z_j; \qquad (10)$$

$[1,2]=(1)$ $[1,4]=(1)$ $[2,6]=-n(2)+(6)$ $[3,6]=-n(3)$

$[3,1]=(2)$ $[5,1]=(4)$ $[4,6]=n(4)+(6)$ $[5,6]=n(5)$

$[2,3]=(3)$ $[4,5]=(5)$ $[2,4]=(2)-(4)$ $[3,5]=(6)$

$[1,6]=-(3)+(5)$ $[3,4]=n(1)-(5)$ $[2,5]=-n(1)+(3)$

$$\Psi(ij)=\frac{(x_i-x_j)^2+\varepsilon_1(y_i-y_j)^2+\varepsilon_2(z_i-z_j)^2}{z_i z_j}, \qquad (11)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - вещественные константы.

При $\varepsilon_2 \neq 0$ выражение (11), как и формула (8), дает метрику риманова или псевдориманова пространства постоянной кривизны. А при $\varepsilon_2 = 0$ имеем:

$$\Psi(ij)=\frac{(x_i-x_j)^2+\varepsilon_1(y_i-y_j)^2}{z_i z_j}. \qquad (12)$$

Здесь метрика уже не задает никакого пространства постоянной кривизны.

В варианте Iа других невырожденных решений нет.

Из варианта IIа:

$[1,2]=(2)$ $[1,4]=k(4)$ $[2,6]=n(2)$ $[3,6]=-km(3)$

$[3,1]=k(3)$ $[5,1]=(5)$ $[4,6]=km(4)$ $[5,6]=-n(5)$

$[2,3]=0$ $[4,5]=0$ $[2,4]=0$ $[3,5]=0$

$$[1,6]=0 \qquad [3,4]=n(1)+(6) \qquad [2,5]=m(1)+(6)$$

$$\Psi(ij) = x_i x_j (y_i - y_j)(z_i - z_j)^{\frac{1}{k}}, \ k \neq 0, \qquad (13)$$

$$[1,2]=(2)+(3) \quad [1,4]=k(4)+(5) \quad [2,6]=-(2) \quad [3,6]=-(3)$$

$$[3,1]=k(3) \quad [5,1]=(5) \quad [4,6]=(4) \quad [5,6]=(5)$$

$$[2,3]=0 \quad [4,5]=0 \quad [2,4]=(6) \quad [3,5]=0$$

$$[1,6]=0 \quad [2,5]=-(1)-k(6) \quad [3,4]=(1)-(6)$$

$$\Psi(ij) = \frac{z_i x_j - z_j x_i + y_i - y_j}{x_i - x_j} - \ln(x_i - x_j). \qquad (14)$$

Других невырожденных решений система (3) не имеет. Если для решений (8), (9), (11) ясен геометрический смысл, то для решений (10), (12), (13), (14) такой ясности пока нет.

В заключение автор выражает свою благодарность Ю.И.Кулакову и Г.Г.Михайличенко за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

## Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа //Докл. АН СССР. - 1971. -Т. 201, № 3. - С. 570-572.

2. КУЛАКОВ Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур //Сиб. мат. ж. - 1971. -Т. XП. -С. 1142-1145.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение фундаментальных уравнений в теории физических стрvктур //Докл. АН СССР. - 1972. -Т.206, № 5. - С. 1056-1058.

4. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П. Непрерывные группы преобразований. -М.: ИЛ, 1947.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии //Докл.АН СССР. - 1981. -Т.260, № 4. - С. 803-805.

6. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии //Сиб. мат. ж. - 1984. - Т. XXУ, № 5. - С. 99-113.

7. ЛЕВ В.Х. Бинарная физическая структура ранга (3,3) //Структурный анализ символьных последовательностей.- Новосибирск. - 1984. - Вып. 101: Вычислительные системы.-С.91-114.

8. КАМКЕ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. -М.: Наука, 1966.

9. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических структур //Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск.-1985. - Вып. 110: Вычислительные системы. - С. 89-94.

Поступила в ред.-изд.отд.

22 апреля 1988 года