

ИССЛЕДОВАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧНЫХ СИСТЕМ

Ю.Г. Косарев

В данной работе продолжают исследования свойств гармоничных систем, начатые в [1-3]. В §1 уточняется исходная концепция и обсуждаются свойства обобщенной модели гармоничных систем. В §2 изучаются ситуации, возникающие при нарушениях гармоничности. В §3 анализируются случаи взаимозаменяемых ресурсов.

§1. Основные понятия и свойства

1.1. Рассмотрим введенные в [3] неявные Н-функции - степенные функции вида:

$$f_i: \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j \in J_1} x_{ij}^{q_j} = a_i; \quad a_i, q_j, x_{ij} \in R^+, \quad (1)$$

здесь i - индекс Н-функции; j - индекс переменной. Множество индексов переменных обозначим через J , а число переменных - через $|J| \neq 0$, где 0 - число независимых переменных. Переменные x_{ij} относятся к одному из двух типов: нулевому ($j \in J_0$) и первому ($j \in J_1$), $J_0 \cup J_1 = J$, $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Над n -ками переменных нулевого типа определена процедура суммирования:

$$\Sigma: x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj}, \quad j \in J_0, \quad (2)$$

а над Π -ками переменных первого типа определено отношение уравнивания (эквивализации):

$$E: x_{1j} = x_{2j} = \dots = x_{nj}, \quad j \in J_1. \quad (3)$$

В тех случаях, когда в (3) значение переменной x_{ij} больше верхней границы области ее значения \hat{x}_{ij} , в (3) вместо x_{ij} условимся писать $\hat{x}_{ij} + \Delta x_{ij}$, где $\Delta x_{ij} \neq x_{ij} - \hat{x}_{ij}$.

Совокупность H -функций с одним и тем же набором показателей степени (q_1, \dots, q_{m+1}) и одним и тем же распределением переменных по типам образует семейство H -функций.

Таким образом, каждая H -функция обладает двумя наборами свойств: семейными, общими для всех H -функций семейства, и индивидуальными, к которым относятся величина коэффициента и область определения H -функции - подобласть $(R^+)^{m+1}$. Далее, H -функции, область определения которых совпадает с $(R^+)^{m+1}$, условимся называть всюду определенными.

Обозначим

$$\tilde{a}_i \neq a_i^{1/d}, \quad d \neq \sum_{j \in J_0} q_j, \quad (4)$$

тогда коэффициенты H -функций запишутся как \tilde{a}_i^d . Такую форму записи коэффициентов назовем приведенной.

1.2. Возводя левую и правую части неявных H -функций данного семейства в какую-либо вещественную степень, можно получать новые семейства. Условимся такие семейства называть родственными. Чтобы избавиться от произвола в выборе значений показателей степени и порождаемой при этом многовариантности представлений родственных семейств H -функций, можно поступить так же, как и в случае явных H -функций [1], у которых этой проблемы нет, поскольку оптимизируемая величина заранее выделена и всегда берется в первой степени. Однако такой подход (вообще говоря, вполне оправданный в определенных ситуа -

циях) нарушает одно из главных достоинств неявных H -функций - равноправие переменных.

Из канонических форм представления неявных H -функций, не нарушающих равноправия переменных, укажем две: целочисленную, у которой все показатели степени - целые, не имеющие общего делителя числа, и естественную, у которой суммарный показатель степени $d \neq \sum_{j \in J_0} q_j = 1$.

Первая форма удобна, например, когда H -функции выражают физические законы. Достоинства второй проявляются при оптимизации (см. п. 1.3.3).

1.3. Над конечной совокупностью H -функций из одного семейства

$$f_i: \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_{ij}^{q_j} = a_i, \quad i \in I, \quad |I| \neq n, \quad (5)$$

определим оптимизирующую процедуру \mathcal{H} , которая состоит в последовательном применении процедур H и R .

1.3.1. Процедура H

- устанавливает между переменными H -функций из совокупности (5) (с помощью процедуры суммирования и отношения уравнивания) оптимальные (гармоничные) соотношения:

$$\frac{x_{ij}}{x_{1j}} / \sum_i x_{ij} = a_i^{1/d} / \sum_i a_i^{1/d}, \quad i \in I, \quad j \in J_0; \quad d = \sum_{j \in J_0} q_j, \quad (6)$$

*) В [3] этим процедурам соответствовали операции H , $H1$ и $H2$. Поскольку термин "операция" употреблялся в [1-4] в широком смысле (местность операции задавалась в качестве параметра, а не фиксировалась заранее, как в традиционном определении алгебраической операции), то он заменен на термин "процедура", который допускает более свободную трактовку и не нуждается в специальных оговорках. Замена обозначений $H1$ и $H2$ на H и R вызвана не только удобством, а и тем, что функции процедур H и R шире, чем у $H1$ и $H2$.

$$\overset{\circ}{x}_{1j} = \overset{\circ}{x}_{2j} = \dots = \overset{\circ}{x}_{nj}, \quad j \in J_1; \quad (7)$$

- образует (путем подстановки оптимальных значений $\overset{\circ}{x}_{1j}$ в исходную совокупность (5), приведения H -функций этой совокупности к естественной форме и суммирования) суммарную H -функцию

$$f : \prod_{j \in J_0} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_j^{q_j} = a, \quad (8)$$

где

$$x_j = \sum_{i \in I} \overset{\circ}{x}_{ij}^q, \quad j \in J_0; \quad a = \left(\sum_{i \in I} a_i^{1/d} \right)^d, \quad (9)$$

$$x_j = \overset{\circ}{x}_{1j} = \overset{\circ}{x}_{2j} = \dots = \overset{\circ}{x}_{nj}, \quad j \in J_1; \quad (10)$$

- устанавливает (с помощью соотношений (6) и (7)) область определения суммарной H -функции (8):

$$\{ \check{x}_j \leq x_j \leq \hat{x}_j \}, \quad j \in J_0 \cup J_1, \quad (11)$$

где

$$\check{x}_j \triangleq \sup_i \{ \check{x}_{ij} (a/a_i)^{1/d} \}, \quad j \in J_0; \quad \check{x}_j \triangleq \sup_i \{ \check{x}_{ij} \}, \quad j \in J_1; \quad (12)$$

$$\hat{x}_j \triangleq \inf_i \{ \hat{x}_{ij} (a/a_i)^{1/d} \}, \quad j \in J_0; \quad \hat{x}_j \triangleq \inf_i \{ \hat{x}_{ij} \}, \quad j \in J_1. \quad (13)$$

Здесь \check{x}_{ij} и \hat{x}_{ij} - наименьшее и наибольшее значения переменной x_{ij} .

1.3.2. Процедура R

- подставляет в (8) вместо x_j , $j \neq 1$, соответствующие значения заданной m -ки ограничений

$$(x_1, \dots, x_{1-1}, x_{1+1}, \dots, x_{m+1}), \quad (14)$$

образуя результатирующую функцию

$$F: \prod_{j \in J_0} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_j^{q_j} = A, \quad (15)$$

где $A = a$ из (9), и вычисляет значение оптимизируемой величины x_1 ;

- проверяет в согласии с (11) выполнение условия

$$\forall j \quad x_j \in (\check{x}_j, \hat{x}_j); \quad (16)$$

если условие (16) выполняется, то конец, иначе фиксируется нарушение гармоничности^{*)}.

1.3.3. В процессе выполнения процедуры Н совокупность Н-функций (5) приводится к естественной форме, когда сумма показателей степени при переменных нулевого типа ($j \in J_0$) равна единице. Это является необходимым условием выполнения неравенства Гёльдера [4]:

$$\prod_{j \in J_0} \left(\sum_i x_{ij} \right)^{q_j} \geq \sum_i \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j}, \quad (17)$$

где $q_j > 0$, $x_{ij} \in \mathbb{R}^+$, $d \neq \sum_{j \in J_0} q_j = 1$.

Для превращения неравенства (17) в равенство необходимо и достаточно [4] выполнение соотношений

$$\frac{x_{i1}^0}{\sum_i x_{i1}} = \frac{x_{i2}^0}{\sum_i x_{i2}} = \dots = \frac{x_{im_0}^0}{\sum_i x_{im_0}}; \quad i = \overline{1, n}, j \in J_0, m_0 \neq |J_0|. \quad (18)$$

При этом если фиксирована правая часть неравенства (17), то его левая часть достигает наименьшего значения. Именно это и имеет место в интересующем нас случае.

*) См. §2.

В согласии с (6) и (9) при $d = 1$ (т.е. для H -функций, представленных в естественной форме) имеем

$$\frac{\overset{\circ}{x}_{ij}}{\sum_i x_{ij}} = \frac{a_i}{\sum_i a_i}; \quad i = \overline{1, n}, j \in J_0, d = 1, \quad (19)$$

и в согласии с (9) коэффициент a суммарной H -функции равен сумме коэффициентов a_i исходных H -функций. Поэтому величина a (при фиксированной сумме) не зависит от распределения $\{a_i, i = \overline{1, n}\}$ по величинам. При $d \neq 1$ это не так. Для $d > 1$ величина a минимальна, когда распределение $\{a_i\}$ сосредоточено в точке $\{a_k = a, a_{i \neq k} = 0\}$, и максимальна, когда распределение равномерно $\{a_i = a/n\}$. Для $d < 1$ эти распределения меняются ролями.

1.4. Прокомментируем свойства введенных выше понятий.

1.4.1. Можно видеть, что процедура H определяет внутренние связи между переменными исходной Π -ки H -функций, при которых устанавливаются взаимосогласованные (гармоничные) соотношения между значениями относительных величин (долей) переменных (независимо от выбора оптимизируемой величины и значений ограничений), а процедура R устанавливает внешние связи этих переменных с задаваемыми извне значениями Π -ки ограничений (14) и определяет абсолютные гармоничные значения всех переменных.

1.4.2. Как и ранее [1-3], полученную в результате применения процедуры H совокупность, состоящую из суммарной H -функции (8) и из исходной Π -ки H -функций вида (5) с наложенными на них связями (6) и (7), назовем гармоничной системой, или H -системой.

Можно сказать, что процедура H определяет структуру H -системы, а процедура R - ее конкретную реализацию. Это позволяет называть процессы, выполняемые этими процедурами, соответственно гармонизацией и реализацией.

1.4.3. Обратим внимание на следующее весьма важное обстоятельство. Для совокупностей H -функций вида (5) процесс гармонизации не зависит от конкретных значений ограничений $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{m+1}$. Иными словами, процесс гармонизации, т.е. установление с помощью процедуры H оптимальных взаимосогласованных значений переменных, не зависит от процесса реализации, выполняемого с помощью процедуры R . Именно благодаря тому, что результатом процедуры H является H -функция из того же семейства, и достигается свойство иерархической однородности, введенное в [1] в качестве одного из основополагающих требований к гармоничным системам.

Более того, оказалось, что процесс гармонизации не зависит также и от выбора оптимизируемой переменной, поскольку суммарная H -функция (8) одна и та же для любого $i \in J$.

1.4.4. Напомним, что в согласии с [1] величины x_j и x_{ij} интерпретируются как количество ресурсов вида j , предоставляемых H -системе и ее i -му элементу, а коэффициенты a , a_i - как удельные расходы любого из видов ресурсов при единичных количествах ресурсов всех остальных видов.

Заметим также, что процедура суммирования (2) и отношение уравнивания (3) соответствуют схемам распределения ресурсов S_0 и S_1 , рассмотренным в [1].

В согласии с вышеизложенным процедура H устанавливает пропорции (доли), в которых должны распределяться ресурсы между элементами системы для достижения оптимума по Парето, а процедура R устанавливает значение оптимизируемого ресурса при предоставленных системе количествах всех остальных ресурсов, а также определяет абсолютные значения количеств ресурсов, предоставляемых системой своим элементам.

Обратим внимание на то, что в согласии с (18) все виды ресурсов, распределяемые по схеме S_0 , $j \in J_0$, делятся между элементами в одинаковых пропорциях.

1.5. Рассмотрим алгебраические свойства процедуры Н .

1.5.1. Для удобства запишем коэффициенты Н-функций в приведенной форме (4) .

Можно видеть, что в согласии с (9) коэффициент суммарной Н-функции независимо от величины суммарного показателя степени \tilde{a} равен

$$\tilde{a} = \sum_i \tilde{a}_i . \quad (20)$$

При этом упрощаются соотношения (6) для оптимальных величин:

$$\tilde{x}_{ij}^0 / \sum_i x_{ij} = \tilde{a}_i / \sum_i \tilde{a}_i ; \quad j \in J_0 , i \in I . \quad (21)$$

1.5.2. Введем операцию объединения Н-функций, под которой будем понимать раздельное перемножение левых и правых частей Н-функций, не имеющих общих переменных. Например, рассмотрим объединение Н-функций f_1 и f_2 . Пусть

$$f_1: \prod_{j \in J_0^1} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1^1} x_j^{q_j} = \tilde{a}^{d_1}; \quad d_1 = \sum_{j \in J_0^1} q_j ; \quad (22)$$

$$f_2: \prod_{j \in J_0^2} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1^2} x_j^{q_j} = \tilde{a}^{d_2}; \quad d_2 = \sum_{j \in J_0^2} q_j ;$$

где $J_0^1 \cap J_0^2 = J_1^1 \cap J_1^2 = \emptyset$.

Тогда

$$f_1 \cup f_2 = f: \prod_{j \in J_0} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_j^{q_j} = \tilde{a}^d; \quad d = \sum_{j \in J_0} q_j , \quad (23)$$

где

$$J_0 = J_0^1 \cup J_0^2 ; \quad J_1 = J_1^1 \cup J_1^2 \Leftrightarrow d = d_1 + d_2 . \quad (24)$$

1.5.3. Введем также операцию разбиения H -функции как противоположную объединению. Для этого разобьем множества J_0 и J_1 на непересекающиеся подмножества. Например, если их разбить на подмножества J_0^1 и J_0^2 , J_1^1 и J_1^2 , то из исходной H -функции f получим те же H -функции f_1 и f_2 , что и в п. 1.5.2.

1.5.4. Покажем, что процедура H обладает свойством ассоциативности, под которым понимается следующее.

Пусть $\{f_i | i \in I\}$ - исходная конечная совокупность H -функций из одного семейства, имеющая вид (5), но с коэффициентами, представленными в приведенном виде (4). Разобьем ее на две подсовокупности $\{f_i | i \in I_1\}$ и $\{f_i | i \in I_2\}$ такие, что $I_1 \cup I_2 = I$ и $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Применяя процедуру H сначала к каждой из них, а потом к полученным суммарным H -функциям, нетрудно убедиться в том, что

$$H\{H\{f_i | i \in I_1\}, H\{f_i | i \in I_2\}\} = H\{f_i | i \in I\}. \quad (25)$$

Обратим внимание на то, что абсолютные значения оптимальных переменных нулевого типа подсовокупностей H -функций те же, что и у исходной совокупности. Действительно, в согласии с (21) и свойствами пропорций:

$$\frac{x_{ij}}{\tilde{a}_i} = \frac{\sum_{i \in I_\sigma} x_{ij}}{\sum_{i \in I_\sigma} \tilde{a}_i} = \frac{\sum_{i \in I} x_{ij}}{\sum_{i \in I} \tilde{a}_i}, \quad i \in I_\sigma, \sigma = 1, 2, j \in J_0. \quad (26)$$

1.5.5. Для доказательства свойства дистрибутивности процедуры H рассмотрим три совокупности H -функций:

$$f_i: \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j \in J_1} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^d, \quad i \in I; d = \sum_{j \in J_0} q_j; \quad (27)$$

$$f'_i: \prod_{j \in J'_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j \in J'_1} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^{d'}, i \in I; \quad d' = \sum_{j \in J'_0} q_j; \quad (28)$$

$$f''_i: \prod_{j \in J''_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j \in J''_1} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^{d''}, i \in I; \quad d'' = \sum_{j \in J''_0} q_j, \quad (29)$$

где

$$J'_\sigma \cup J''_\sigma = J_\sigma; \quad J'_\sigma \cap J''_\sigma = \emptyset \leftrightarrow d = d' + d'', \quad \sigma = 1, 2, \quad (30)$$

т.е. совокупности (28) и (29) представляют собой согласованное разбиение переменных H -функций из совокупности (26) и

$$\forall i \in I \quad f'_i \cup f''_i = f_i. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$H\{f'_i | i \in I\} \cup H\{f''_i | i \in I\} = H\{f_i | i \in I\}. \quad (32)$$

Обратим внимание на то, что относительные оптимальные значения переменных во всех трех совокупностях одни и те же:

$$\bar{x}_{ij} / \sum_{i \in I} x_{ij} = \tilde{a}_i / \sum_{i \in I} \tilde{a}_i, \quad j \in J_0, \text{ или } j \in J'_0, \text{ или } j \in J''_0; \quad (33)$$

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, \quad j \in J_1, \text{ или } j \in J'_1, \text{ или } j \in J''_1.$$

1.6. Можно видеть, что в H -системе из $(n+1)(m+1)$ переменных всего m независимых. Если фиксировать значения m переменных исходных H -функций (с различными значениями индекса j), то из (5)–(8) однозначно следуют значения для всех остальных переменных исходных и суммарной H -функций. Именно так устанавливалась область определения суммарной H -функции (11). И, наоборот, если зафиксировать значения m -ки переменных суммарной H -функции, то получим значения переменных всех исходных H -функций. Области определения суммарной H -функции соответствует у каждой из исходных H -функций область,

вообще говоря, меньшая, чем область определения этой H -функции.

Обозначим через \check{X}_j и \hat{X}_j , $j \in J$, наименьшие и наибольшие значения задаваемых надсистемой Π -ок ограничений (14) (и определяемых ими величин X_1). Набор этих значений определяет рабочую область суммарной H -функции и соответствующие ей рабочие области исходных H -функций. Очевидно, что для достижения взаимогласованности между H -системой и надсистемой необходимо, чтобы рабочая область не выходила за границы области определения суммарной H -функции, т.е.

$$\forall j \quad \check{X}_j \leq \check{X}_j, \quad \hat{X}_j \leq \hat{X}_j. \quad (34)$$

§2. Нарушение гармоничности

Рассмотрим ситуации, когда рабочая область больше области определения H -функции. Ограничимся простейшим случаем, когда такое несоответствие имеет место лишь для одной переменной одной из H -функций исследуемой совокупности.

2.1. Свойства ассоциативности (см. п.1.5) позволяют ограничиться рассмотрением совокупности из двух двухаргументных H -функций:

$$\varphi_i: \quad z_{iu}^{q_u} z_{iv}^{q_v} = a_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $z_{1u}, z_{2u}, z_{2v} \in R^+$, $z_{1v} = c$.

Совокупность (1) будем сравнивать с совокупностью всюду определенных H -функций

$$f_i: \quad x_{iu}^{q_u} x_{iv}^{q_v} = a_i, \quad i = 1, 2, \quad x_{ij} \in R^+, \quad j = u, v \quad (2)$$

из того же семейства, что и (1), и с теми же значениями коэффициентов.

Применяя к (1) и (2) процедуру Н, получаем суммарные Н-функции:

$$\varphi: z_u^{q_u} z_v^{q_v} = a; \quad (3)$$

$$f: x_u^{q_u} x_v^{q_v} = a, \quad (4)$$

где

$$a = \left(\sum_i a_i^{1/d} \right)^d, \quad d = \sum_{j \in J_0} q_j. \quad (5)$$

Т а б л и ц а 1

Области определения Н-функций и значений переменных
при фиксированном значении одного из переменных

| $q_u q_v$ | 00 | | 01 | | 10 | | 11 | |
|---|--|-------------------------------------|--------------------------|---|--|-------------------------------------|--------------|---|
| j | u | v | u | v | u | v | u | v |
| $\hat{z}_{1j}^< = \hat{z}_{1j}^>$ | $\tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | c | $\tilde{a}_1 c^{-\beta}$ | c | $\left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | c | $c^{-\beta}$ | c |
| $\hat{z}_{2j}^< = \hat{z}_{2j}^>$ | $\tilde{a}_2 \left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | $\tilde{a}_2 \frac{c}{\tilde{a}_1}$ | $\tilde{a}_2 c^{-\beta}$ | c | $\left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | $\tilde{a}_2 \frac{c}{\tilde{a}_1}$ | $c^{-\beta}$ | c |
| $\hat{z}_j^< = \hat{z}_j^>$ | $\tilde{a} \left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | $\tilde{a} \frac{c}{\tilde{a}_1}$ | $\tilde{a} c^{-\beta}$ | c | $\left(\frac{\tilde{a}_1}{c} \right)^\beta$ | $\tilde{a} \frac{c}{\tilde{a}_1}$ | $c^{-\beta}$ | c |
| d | $q_u + q_v$ | | q_u | | q_v | | 0 | |
| $\tilde{a}_i = a_i^{1/d}, \quad \tilde{a} = a^{1/d}, \quad \beta = q_v/q_u$ | | | | | | | | |

Заметим, что H -функции f и ϕ отличаются лишь областями определения: f всюду определена, а ϕ определена только в одной точке ($\check{z}_v = \hat{z}_v$; $\check{z}_u = \hat{z}_u$), конкретные значения координат которой зависят от свойств семейства (табл.1), где $\sigma_j = 0 \Leftrightarrow j \in J_0$; $\sigma_j = 1 \Leftrightarrow j \in J_1$.

2.2. Как можно видеть, из табл.1, для того чтобы область значений суммарной H -функции оказалась стянутой в точку, достаточно, чтобы была стянута в точку область значений одной из переменных одной из H -функций. В этом случае лишь в одной точке рабочей области суммарной H -функции достигается оптимальное распределение ресурсов системы между ее элементами. Нас будет интересовать, насколько отличается распределение во всех остальных точках рабочей области от оптимального. Для этого рассмотрим те же семейства H -функций, что и в табл.1, но при различном выборе оптимизируемой переменной. Решение, как и ранее, будем искать в виде результирующей функции

$$z_u^{q_u} z_v^{q_v} = A. \quad (6)$$

Поскольку расчеты достаточно просты, то приведем лишь результаты (табл.2), где оптимизируемые величины системы отмечены ноликом сверху.

Можно показать, что для распространения приведенных в табл.2 результатов на H -функции с числом переменных, большим двух, достаточно заменить q_u на d^* , где

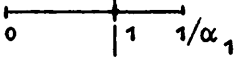
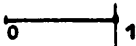
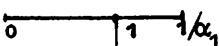
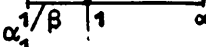
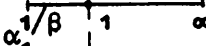

$$d^* \neq \sum_{j \in J_0^*} q_j, \quad J_0^* \neq J_0/v. \quad (7)$$

2.3. Как можно видеть из табл.2, отсутствие возможности изменять величину z_{1v} приводит к следующему:

- величина коэффициента A результирующей функции становится зависимой не только от величин коэффициентов исходных

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициента A результирующей функции
при нарушениях гармоничности

| Код | $A(\delta)/a$ | $\overset{I}{\delta} \leq \delta \leq 1$ $\overset{II}{1} \leq \delta \leq \hat{\delta}$ | δ |
|--|--|--|--------------------------------|
| 00 | $I-II. \left[\alpha_1 \delta^{-\beta} + \alpha_2 \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1 \delta} \right)^{\beta} \right]^{q_u}$ |  | $\frac{c/\dot{X}_V}{\alpha_1}$ |
| 01 | $I. [\alpha_1 \delta^{-\beta} + \alpha_2]^{q_u}$ |  | c/\dot{X}_V |
| 10 | $I. \delta^{-q_v}$ |  | $\frac{c/\dot{X}_V}{\alpha_1}$ |
| | $II. [\alpha_2/(1-\alpha_1 \delta)]^{q_u}$ | | |
| 00 | $I-II. \left[\alpha_1 \delta + \alpha_2 \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1 \delta^{-\beta}} \right)^{1/\beta} \right]^{q_v}$ |  | $\frac{c/\dot{X}_V}{\alpha_1}$ |
| 01 | $I. [\alpha_2/(1-\alpha_1 \delta^{-\beta})]^{q_u}$ |  | c/\dot{X}_V |
| | $II. \delta^{q_v}$ | | |
| 10 | $II. [\alpha_1 \delta + \alpha_2]^{q_v}$ |  | $\frac{c/\dot{X}_V}{\alpha_1}$ |
| $\alpha_1 \neq (a_1/a)^{1/d}; X_j = Z_j, \dot{X}_j \leq \dot{Z}_j, \dot{X}_V = a^{1/q_u} X_u^{-q_u/q_v}$ | | | |
| $\delta \neq c/\dot{X}_{1V}; \delta = c/\alpha_1 X_V, v \in J_0; \delta = c/X_V, v \in J_1$ | | | |

функций, но и от величин ограничений $Z_j, j \neq 1, j = \overline{1, m+1}$, т.е. результирующая функций (6) уже не является H -функцией. Она даже не степенная;

- для одних и тех же исходных функций величина коэффициента A получается различной в зависимости от выбора оптимизируемой величины, т.е. при $1 = v$ и при $1 \neq v$ (чего не было в тех случаях, когда рабочая область находилась в границах области определения H -функций). Но, как и ранее, величина A будет одной и той же для всех $1 = j, j \neq v, j = \overline{1, m+1}$;

- по мере удаления значения δ от единицы, характеризующего отличие величины $Z_{1v} = c$ от соответствующей величины \bar{X}_{1v} , происходит неограниченный рост величины коэффициента A , а в силу (6) и оптимизируемой величины \bar{Z}_1 ;

- допустимые значения c/Z_v ограничены сверху, а c/\bar{X}_v - снизу. Эти ограничения - следствие естественного предположения, что любой из элементов получает не больше ресурсов (любого из видов), чем их отведено для системы. Конкретные значения ограничений $(\check{\delta}, \hat{\delta})$ для величины δ приведены в табл. 2. Таким образом, при фиксированной m -ке ограничений $Z_j, j \neq 1, j = \overline{1, m+1}$, для рассмотренных случаев существуют значения величины δ , при которых система (1) не имеет решения.

Вообще говоря, можно распространить процедуру R и на ситуации, когда рабочая область больше области определения суммарной H -функции, но лежит в пределах, характеризующих предельными значениями величины δ . Так, в рассмотренных выше случаях для этого достаточно брать соответствующие значения коэффициента $A(\delta)$ и предельные значения для δ $(\check{\delta}, \hat{\delta})$ из табл. 2.

2.4. Итак, отсутствие возможности изменять величину даже одной какой-либо переменной в совокупности H -функций ведет не только к потере эффективности (определяемой перерасходом ресурсов по сравнению с аналогичной системой без ограничений на

изменения величин переменных), но и к возникновению трудностей при дальнейшем использовании результирующей системы в качестве элемента подсистемы, поскольку утрачивается свойство иерархической однородности [1], а также простота и прозрачность достижения взаимосогласованности всех элементов системы, которой обладают Н-функции). Заметим, что если даже специальным подбором величин ограничений (Z_v при $1 \neq v$, Z_j , $j \neq v$, при $1 = v$) (см. табл. 1) добиться той же величины эффективности (т.е. $A = a$) при той же результирующей Н-функции, то при последующем рассмотрении системы как элемента надсистемы придется вновь иметь дело с Н-функцией с фиксированными значениями переменных.

Аналогично будет обстоять дело и в тех ситуациях, когда $z_{1v} \in [c_1, c_2]$, а $\bar{x}_{1v} < c_1$ или $\bar{x}_{1v} > c_2$. Тогда в табл. 2 величина c заменится либо на c_1 , либо на c_2 .

Естественно, что если ограниченных переменных будет больше, чем одна, то задача еще более усложнится.

2.5. Как уже указывалось выше, величина коэффициента A (и оптимизируемой величины Z_1) неограниченно возрастает при отклонении величины δ от значения $\delta = 1$ как в большую, так и в меньшую сторону. Физическая природа этих отклонений различна. При $\delta < 1$ первый элемент не может воспринять больше, а при $\delta > 1$ меньше ресурса вида V , чем это требуется для достижения оптимума. Иначе говоря, при $\delta < 1$ первый элемент функционирует недостаточно интенсивно. При этом частично обесценивается вклад второго элемента и снижается интенсивность работы всей системы. При $\delta > 1$ первый элемент функционирует слишком интенсивно за счет ресурсов, отбираемых у второго элемента. Из-за этого второй элемент функционирует недостаточно интенсивно, что и ведет к ухудшению качества функционирования системы.

Ситуацию, возникающую при $\delta \neq 1$, назовем узким местом. Будем говорить об узком месте первого рода при $\delta < 1$ и второго рода при $\delta > 1$.

Узкое место первого рода возникает, например, когда надежность одного из блоков устройства ниже, чем у остальных блоков, а узкое место второго рода - когда его надежность выше, чем у всех остальных. В обоих случаях наличие менее надежного блока обесценивает ресурсы, затраченные на повышение надежности у всех остальных блоков.

Какого рода узкое место хуже - это зависит от конкретной ситуации. Так, для системы (1) при $a_1 > a_2$ хуже узкое место первого рода, при $a_1 < a_2$ - второго.

§3. Исследование случая взаимозаменяемости ресурсов

Продолжая изучение свойств процедуры R , начатое в §1, исследуем зависимость значения оптимизируемой величины X_1 от распределений $\{q_j\}$ и $\{X_j\}$. Сделаем это на примере пар величин.

3.1. Пусть X_u и X_v , $u, v \neq 1$, - ограничения, выступающие в качестве значений аргументов результирующей H -функции с показателями степени q_u и q_v . Предположим также, что в конкретной практической системе X_u и X_v (и соответственно x_{iu} и x_{iv} , $i = \overline{1, n}$) интерпретируются как аддитивные величины. (Иначе говоря, ресурсы u -го и v -го видов являются взаимозаменяемыми.)

Обозначим:

$$q_u + q_v \doteq q, \quad (1)$$

$$X_u + X_v \doteq X, \quad (2)$$

$$q_u/q \doteq \gamma \Rightarrow q_v/q = 1 - \gamma, \quad (3)$$

$$X_u/X \doteq \alpha \Rightarrow X_v/X = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Следуя той же манере представления выкладок, что и в [1],
имеем

$$X_u^{q_u} X_v^{q_v} \stackrel{(3)}{=} \stackrel{(4)}{=} [\alpha^\gamma (1-\alpha)^{1-\gamma} X]^q \doteq U^q(\alpha, \gamma) X^q; \quad (5)$$

при фиксированных q и X и $u, v \in J_0$ или $u, v \in J_1$ в
согласии с (1.15) *) имеем

$$X_1^{q_1} U^q(\alpha, \gamma) = \text{const}, \quad (6)$$

т.е. величина X_1 в данных условиях полностью определяется
значением функции $U(\alpha, \gamma)$, которое, в свою очередь, опреде-
ляется значениями параметров распределений α и γ .

3.2. Для исследования функции $U(\alpha, \gamma)$ зафиксируем вели-
чину γ и, приравнявая нулю логарифмическую производную
 $\partial \ln U(\alpha, \gamma) / \partial \alpha$, определим оптимальное значение α :

$$\frac{\gamma - \overset{\circ}{\alpha}}{\overset{\circ}{\alpha}(1-\overset{\circ}{\alpha})} = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{\alpha} = \gamma, \quad (7)$$

при котором, как нетрудно убедиться, достигается

$$\sup_{\alpha} U(\alpha, \gamma) = U(\gamma, \gamma). \quad (8)$$

Исследуя далее тем же способом функцию $U(\gamma, \gamma)$, имеем:

$$\inf_{\gamma} U(\gamma, \gamma) = U(1/2, 1/2) = 1/2; \quad (9)$$

$$\sup_{\alpha, \gamma} U(\alpha, \gamma) = \sup_{\gamma} U(\gamma, \gamma) = U(0, 0) = U(1, 1) = 1; \quad (10)$$

$$\inf_{\alpha} U(\alpha, \gamma > 0) = U(0, \gamma) = U(1, \gamma) = 0. \quad (11)$$

Все эти свойства видны и на рисунке. Можно также видеть, что
семейство функций $U(\alpha, \gamma)$ при различных значениях γ пере-

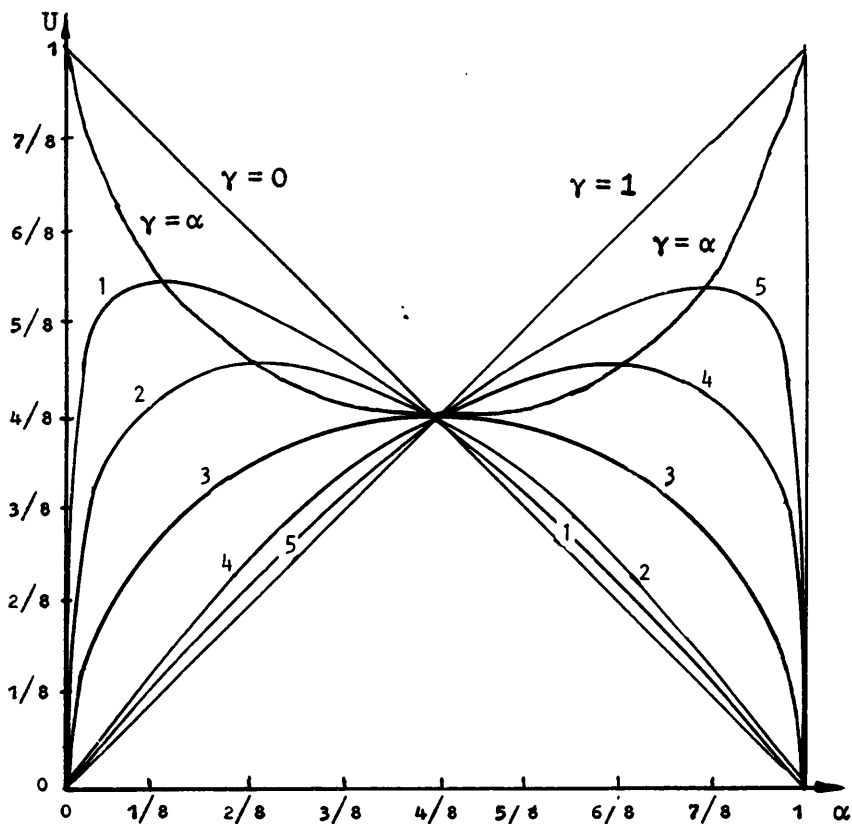
*) Здесь и далее первое число ссылки означает номер параграфа.

секается в одной точке ($U = 1/2, \alpha = 1/2$), т.е.

$$\forall \gamma \quad U(1/2, \gamma) = 1/2, \quad (12)$$

и что функция $U(\alpha, \gamma)$ обладает зеркальной симметрией:

$$U(1-\alpha, 1-\gamma) = U(\alpha, \gamma). \quad (13)$$



(1 - $\gamma = 1/8$; 2 - $\gamma = 1/4$; 3 - $\gamma = 1/2$; 4 - $\gamma = 3/4$; 5 - $\gamma = 7/8$)

При $\gamma = 1/2$ функция $U(\alpha, 1/2)$ превращается в уравнение окружности

$$U^2 + (\alpha - 1/2)^2 = 1/4 \quad (14)$$

радиусом $1/2$ и с центром в точке $(U = 0, \alpha = 1/2)$.

Попутно заметим, что полуокружность того же радиуса с центром в точке $(U = 1, \alpha = 1/2)$ окажется вписанной в фигуру, соответствующую функции $U(\alpha, \gamma)$.

В согласии с (6) и (11) наименьшее значение величины $X_1(\alpha, \gamma)$ достигается при $\alpha = \gamma = 0$ (или $\alpha = \gamma = 1$), когда $U(\alpha, \gamma) = 1$, т.е.

$$\overset{\circ}{X}_1(\alpha, \gamma) = \inf_{\alpha, \gamma} X_1(\alpha, \gamma) = X_1(0, 0) = X_1(1, 1).$$

Это означает, что наилучшим для наших целей будет случай, когда распределения величин $\{X_u, X_v\}$ и $\{q_u, q_v\}$ взаимно согласованны, т.е.

$$X_u/X = q_u/q; \quad X_v/X = q_v/q, \quad (16)$$

и сосредоточены в точке, т.е.

$$\alpha = \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_u = 0, q_u = 0; & X_u^{q_u} = 1, \\ X_v = X, q_v = q; & X_v^{q_v} = X^q; \end{cases} \quad (17)$$

$$\alpha = \gamma = 1 \Rightarrow \begin{cases} X_u = X, q_u = q; & X_u^{q_u} = X^q, \\ X_v = 0, q_v = 0; & X_v^{q_v} = 1. \end{cases}$$

В этом вырожденном случае у H -функции фактически на один аргумент становится меньше и соответственно уменьшается на единицу число ограничений (1.14).

Если принять за единицу величину $\overset{\circ}{X}_1$ из (15) и сопоставлять с нею значения $X_1(\alpha, \gamma)$ при других вариантах распределений, то наилучшим из взаимосогласованных распределений в со-

ответствии с (6) и (9) будет

$$X_1(1/2, 1/2) = 2^{q/q_1} X_1^0. \quad (18)$$

Для невязимосогласованных вариантов распределений величина $X_1(\alpha, \gamma)$ может быть сколь угодно большой, каковой и становится при $\alpha = 0, \gamma > 0$ и при $\alpha = 1, \gamma < 1$, т.е.

$$X_1(0, \gamma > 0) = X_1(1, \gamma < 1) = \infty. \quad (19)$$

Эти результаты можно интерпретировать следующим образом. При произвольном распределении величин ресурсов X_u и X_v и при неизменности их суммарного расхода (т.е. $X_u + X_v = X = \text{const}$) возникает значительный по сравнению с оптимальным случаем (15) перерасход ресурса 1-го вида (в пределе бесконечно большой).

3.3. Выше мы рассмотрели случай, когда $u, v \in J_0$ либо $u, v \in J_1$ и, следовательно, оставались неизменными величина суммарного показателя степени d и зависящая от него величина весового коэффициента a (см. (1.9)). Пусть теперь $u \in J_0$, а $v \in J_1$. В этом случае с изменением величины показателя степени q_u будет изменяться и величина d и соответственно a , т.е. $d = d(\gamma)$ и $a = a(\gamma)$.

Можно видеть, что

$$\inf_{\gamma} d(\gamma) = d(0) \quad \text{и} \quad \inf_{\gamma} a(\gamma) = a(0), \quad (20)$$

$$\sup_{\gamma} d(\gamma) = d(1) \quad \text{и} \quad \sup_{\gamma} a(\gamma) = a(1),$$

т.е. распределения ($\alpha = \gamma = 0$) и ($\alpha = \gamma = 1$) теперь уже перестают быть равноценными и

$$a(1) > a(0) \Rightarrow X_1(1, 1) > X_1(0, 0), \quad (21)$$

а, следовательно,

$$(u \in J_0, v \in J_1) \Rightarrow \inf_{\alpha, \gamma} X_1(\alpha, \gamma) = X_1(0, 0). \quad (22)$$

3.4. Последовательно применяя полученные результаты к парам, можно обобщить эти результаты на любое конечное число аддитивных величин, т.е. и в этом случае распределения $\{X_k\}$ и $\{q_k\}$ должны быть взаимосогласованными и сосредоточенными в точке (с индексом $k \in J_1$).

3.5. Из проделанного нами рассмотрения вытекает также следующий важный частный вывод: любая замена одного аргумента двумя и более аргументами в системе Н-функций ведет к увеличению расхода ресурсов.

Таким образом, при замене X^q на $X_u^{q_u} X_v^{q_v}$ даже при сохранении величины суммарного показателя степени d , т.е. $q_u + q_v = \text{const}$, имеет место

$$X_u^{q_u} X_v^{q_v} = X^q \Rightarrow X_u + X_v > X, \quad (23)$$

а при

$$X_u + X_v = X \Rightarrow X_u^{q_u} X_v^{q_v} < X^q, \quad (24)$$

т.е. в случае (23), растет величина ресурса, соответствующего заменяемому аргументу, а в случае (24) увеличивается расход оптимизируемого ресурса. Причина этого на первый взгляд неожиданного вывода таится в увеличении числа ограничений (одно ограничение X заменяется двумя: X_u и X_v). Здесь, видимо, имеет место проявление общего принципа: введение ограничения, затрудняющего свободу маневра ресурсами, ведет к перерасходу ресурсов.

Для гармоничных систем этот принцип не просто декларируется, а каждое подобное ограничение рассмотренного типа может быть оценено количественно, с помощью приведенных выше соотношений.

3.6. Для более наглядной демонстрации полученного результата сопоставим две возможные ситуации.

Ситуация 1. Каждым из m видов ресурсов (кроме оптимизируемого) ведает свой чиновник, который независимо от остальных определяет величину X_j представляемого системе ресурса j -го вида.

Ситуация 2. Всеми m видами ресурсов ведает один суперчиновник.

Из сделанного выше рассмотрения следует, что у суперчиновника больше возможностей для маневра ресурсами и при желании (и умении, конечно) он может добиться на много больше результатов, чем контора из его m собратьев.

Если чиновников заменить божествами, ведающими каждый своей сферой, а суперчиновника - единым всемогущим богом, то из нашей модели следует преимущество монотеизма перед многобожием, т.е. получается тот же результат, к которому на основе теоретико-игровой модели пришел в одной из своих последних работ Али Иванович Кокорин [5].

Л и т е р а т у р а

1. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. 1 //Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ. - Новосибирск, 1983. - Вып. 96: Вычислительные системы. - С. 3-28.

2. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. П //Анализ разнотипных данных. - Новосибирск, 1983. -Вып. 99: Вычислительные системы. - С. 15-38.

3. Его же. Обобщенная модель гармоничных систем //Машинный анализ сложных систем. -Новосибирск, 1986. - Вып. 118: Вычислительные системы. -С. 37-46.

4. ХАРДИ Г.Г., ЛИТТЛЬВУД Д.Е., ПОЛИЯ Г. Неравенства. -М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

5. KOKORIN A.I. Mathematical model of transition from polytheism to monotheism - Abstracts of 8 Int. Congr. LMPS'87, Moscow - 1987, -Vol. 1, Sect.1. -P. 98-100.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября 1987 года