

УДК 517.2: 519.68: 681.31

ПРЕДЕЛЫ НАДЕЖНОСТИ  
ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. Воробьев, Н. В. Лаходынова

1. Однородные вычислительные системы,  
структуры и среды

Насущной задачей развития современной вычислительной техники является достижение сверхвысокой производительности. Ближайшая цель - достижение быстродействия  $10-30 \text{ ГФ}$  (гигафлопс<sup>\*</sup>) [1]. Есть сообщения о разработках, ставящих своей целью достижение быстродействия  $10^{12} \text{ Ф}$  [2,3]. В большинстве этих проектов предполагается соединение тысячи или десятков тысяч вычислительных модулей.

Следует заметить, что в СССР соответствующие фундаментальные разработки начались в 60-х годах. Основные результаты этих исследований сосредоточены в [4-8]. Предлагаемые в [4,5] однородные вычислительные системы (ОВС) являются коллективами одинаковых универсальных вычислителей, связанных регулярной и программно управляемой системой связи. В [4,6] рассматриваются также и однородные вычислительные среды. В качестве элемента среды используется автомат, реализующий полную систему функций алгебры логики, задержку сигнала и полную систему соединений с соседними элементами. Промежуточное положение занимают вычислительные структуры [7,8].

---

\* ) Флопс - число операций с плавающей точкой в секунду.

Особое внимание идее однородных вычислительных сред, структур и систем стало уделяться в связи с разработкой сверхбольших интегральных схем (СБИС). Большую популярность получили матричные процессорные СБИС, в частности систолические матрицы [9] и волновые машины [10].

Далее через ОВС будем обозначать все вышеперечисленные системы, а через ЭМ - элемент такой системы - элементарный модуль или машину.

Нашей задачей является исследование математической модели системы связей ОВС с точки зрения способности этой системы выполнить свою задачу в условиях отказов отдельных элементов.

Ясно, что надежность связи зависит как от структуры системы, так и от применяющихся в ней алгоритмов коммутации соединений. Мы абстрагируемся от этих алгоритмов, считая, что они исчерпывают возможности структуры. Такой подход позволит нам оценить принципиальные возможности самих структур.

## 2. Локальные однородные структуры

Структурой вычислительной системы называют граф  $G$ , вершинам которого поставлены в соответствие элементы системы (вычислительные модули, автоматы, ключи), а дугам - связи между ними (линии связи, электрические соединения). Двухнаправленным связям ставятся в соответствие ребра графа. Дуги (ребра) графа помечены номерами соответствующих входов и выходов соединяемых элементов (рис. 1).

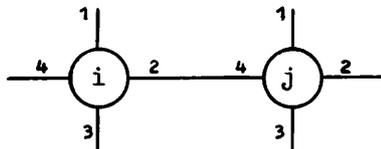


Рис. 1

Однородной структурой называется граф  $G$ , в группе автоморфизмов которого существует транзитивная подгруппа  $Aut$ , сохраняющая отметки ребер. Структура графа  $G$  может быть задано

некоторым представлением подгруппы  $\text{Aut}$  определяющими соотношениями, так что одна и та же группа описывает столько графов, сколько имеет она различных представлений.

Итак, однородная структура  $S$  есть пара  $\langle G, \text{Aut} \rangle$ . Столь жесткое ограничение на класс рассматриваемых графов вызвано двумя серьезными причинами: требованием простоты и локальности. Рассмотрим первое требование.

С точки зрения программирования основной трудностью является организация взаимодействий между модулями в процессе параллельных вычислений. Согласно концепции ОВС каждая элементарная машина имеет свою память. Если в процессе счета необходимо использовать данные, расположенные в памяти других ЭВМ, то доставка этих данных происходит по системе связи. Регулярность связей между ЭМ должна, по мнению авторов [4], в значительной мере облегчить программирование соответствующих коммутаций. Окончательный вид эта идея приобрела в теории Конечных Абелевых Изотропных и Симметричных структур (КАИС-структур) [11 - 13].

КАИС-структура - неориентированный граф, который получается из групп-графа [14] конечной абелевой группы  $A$  заменой дуг на ребра. В частности, двумерная КАИС-структура представляет собой квадратную решетку, нарисованную на торе. Исходная абелева группа является алгеброй коммутаций КАИС-структуры: произведению  $Q \cdot a_i$  некоторой конфигурации  $Q \subseteq A$  на образующую  $a_i \in A$  соответствует сдвиг этой конфигурации по  $i$ -му направлению (рис.2). На рис.2 элементу структуры соответствует квадрат, а связи - общая сторона. Легко предложить и алгоритм блуждания конфигурации по КАИС-структуре с обходом препятствий [15].

Структура системы, изображенной на рис.2, соответствует абелевой группе  $A = C_{16} \times C_8$  с определяющими соотношениями  $a^{16} = 1, b^8 = 1, ab = ba$ . Она же является и группой  $\text{Aut}$

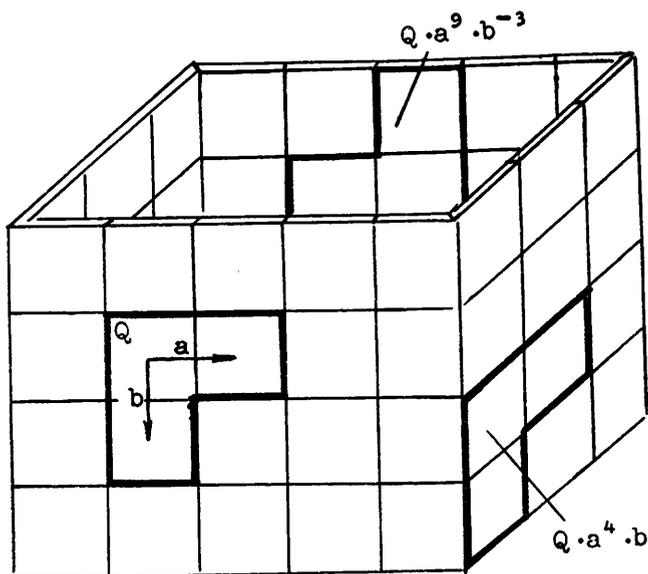


Рис. 2

для соответствующего графа  $G$ . Такие структуры названы [12] евклидовыми (E-графами), так как их фрагменты суть фрагменты целочисленной евклидовой решетки  $Z^d$ , где  $d$  - размерность структуры.

Другой тип КАИС-структур получается, если в качестве образующих циклической группы  $C_n$  взять некоторые числа  $s_i < n$ . Граф  $G$ , полученный из описания группы  $C_n$  с образующими  $s_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , будет иметь подгруппу  $\text{Aut} = C_n$ . Такие структуры, названные [12] диофантовыми (D-графами), имеют параметрическое описание  $\{n; s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ . Двумерные диофантовы структуры тоже могут быть уложены на поверхности

тора. Алгебра коммутаций для диофантовых структур несколько сложнее, чем для евклидовых. Нахождение пути между элементами с номерами  $m$  и  $l$  связано с решением по модулю  $n$  диофантова уравнения

$$l - m = \sum_{i=0}^{k-1} x_i s_i,$$

где  $x_i$  - число сдвигов по  $i$ -й образующей. Это и послужило основанием для названия структуры. Ясно, что диофантова структура коммутативна, т.е. сдвиги информации вдоль образующих можно делать в произвольном порядке:  $s_i + s_j \equiv s_j + s_i \pmod{n}$ . На рис. 3а изображена евклидова структура  $C_4 \times C_4$  с определяющими

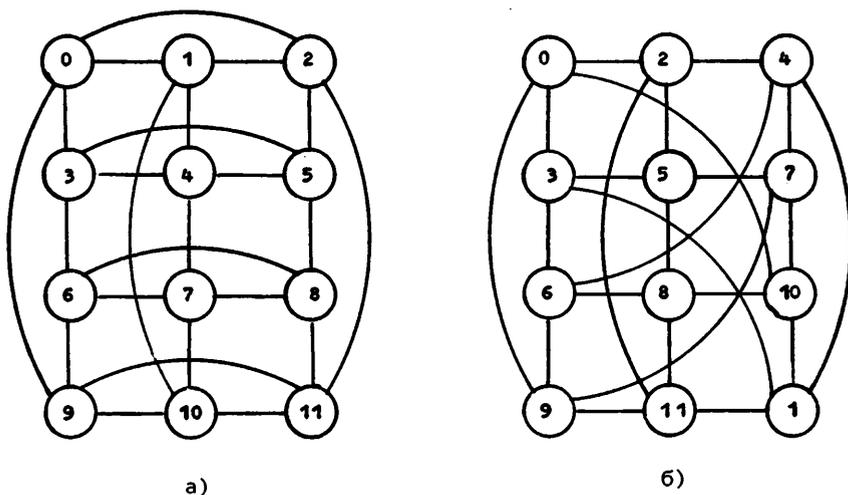


Рис. 3

ми соотношениями:  $a^3 = 1, b^4 = 1, ab = ba$ . На рис. 3б - диофантова структура  $\{12; 2, 3\}$  с определяющими соотношениями:  $a^6 = 1, b^4 = 1, a^3 = b^2, ab = ba$ .

Второе ограничение на класс однородных структур - требование локальности - связано с физическими ограничениями на длину реальных линий связи в вычислительной системе. Поскольку речь идет о быстродействии порядка  $10^{12}$   $\text{F}$ , то это ограничение становится решающим.

Известно, что расстояние  $l$  между элементами классической синхронной ЭВМ, как последовательной, так и параллельной, ограничено соотношением

$$l < c\tau, \quad (1)$$

где  $c$  - скорость света,  $\tau$  - длительность такта. Нетрудно подсчитать, что линейный размер классической последовательной ЭВМ с быстродействием  $10^{12}$   $\text{F}$  не может превышать 0,3 мм. Размер соответствующей двумерной ОВС, состоящей из  $10^4$  процессоров с быстродействием  $10^8$   $\text{F}$  каждый, не более 3 м, так что каждая ЭВМ должна быть не более чем 3 см.

Для достижения быстродействия  $10^{12}$   $\text{F}$  на реальной технологической основе необходимо отказаться от центрального управления и синхронизации в параллельной машине. Кроме того, необходимо, чтобы всякое взаимодействие в системе происходило только между элементами, находящимися на ограниченном расстоянии  $l < l_0 < c\tau$  в физическом пространстве  $R^3$ .

Ограничение (1) при этих условиях снимается, однако теория вычислений приобретает релятивистский характер. Параллельные вычислительные события суть события, интервал между которыми пространственно-подобен: термины "одновременно", "мгновенное состояние" приобретают релятивистский смысл; оценки временной сложности алгоритмов, полученные в классической теории вычислений [16], будут неверны, так как пренебрегают временем доставки данных; некоторые задачи классической теории коллективного поведения автоматов [17] вообще теряют смысл. Какой, например, смысл имеет "синхронизация цепи стрелков", если со-

бытия одновременны в одной системе отсчета, но не одновременны в другой?

Таким образом, ОВС ближайшего будущего будут релятивистскими машинами. Структура и возможности таких машин обсуждаются в [10,18,19], соответствующая теоретическая проблематика в [20], оценки временной сложности параллельных алгоритмов - в [21].

Для целей данной работы сформулируем требования локальности для графа  $G$  - структуры ОВС.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что при математическом моделировании технических устройств графами нельзя рассматривать граф в отрыве от его вложения в физическое пространство  $R^3$ . В противном случае может оказаться, что соответствующее устройство технически нереализуемо. Например, в [22] рассматривается архитектура и организация функционирования системы, ориентированной на структуру, заданную  $\Pi(N, v, g)$ -графом. Рассмотрение единственного изображения  $\Pi(N, v, g)$ -графа (см. [22, с.52, рис. 2.4 и рис. 2.5]) обнаруживает всю надуманность и несостоятельность такой структуры. Реальная ОВС с такой структурой не может быть единообразно вложена в физическое пространство. При наращивании структуры необходимо удлинять связи, а элементы и связи, имеющие конечный объем, не могут быть равномерно размещены на конструктиве.

Опираясь на высказанные выше соображения, потребуем, чтобы структура ОВС допускала однородное и равномерное вложение в физическое пространство. Пусть  $g_{ij}$  - расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м элементами в метрике графа  $G$ ,  $l_{ij}$  - расстояние между теми же элементами в физическом пространстве  $R^3$ . Структура должна выкладываться в  $R^3$  так, чтобы расстояние  $l_{ij}$  между любыми элементами было не менее 1, а элементы, соседние в графе  $G$ , располагались в  $R^3$  на расстоянии  $l_{ij} \leq l_0$ , короче,

$$\forall i, j \in G \{ (1_{ij} \geq 1) \wedge [(g_{ij} = 1) \rightarrow (1_{ij} \leq 1_0)] \}, \quad (2)$$

где  $1_0$  - физический радиус взаимодействия - константа, независимая от размера системы. Отсюда следует, что любая сфера конечного радиуса в  $R^3$  содержит внутри себя конечную и ограниченную часть графа  $G$  и пересекается конечным и ограниченным числом дуг (ребер) графа. Далее мы не будем без крайней необходимости различать граф и его образ в  $R^3$ . Структуры, удовлетворяющие (2), назовем локальными.

Учитывая техническое назначение структуры и однородность, добавим следующие требования:

- граф  $G$  должен быть связан и не иметь петель; (3)

- степени (полустепени) вершин графа  $G$  должны быть равны некоторой константе, независимо от размера структуры. (4)

Требования локальности и однородности сразу исключают из рассмотрения большинство структур, предлагаемых в литературе [1] для связи между ЭМ. Простейшие КАИС-структуры с одной и двумя образующими удовлетворяют требованиям (2)-(4). Способ вложения соответствующего технического устройства в  $R^3$  показан на рис. 2.

При увеличении числа образующих в E- или D-графах необходимо учесть некоторые ограничения, чтобы не нарушить физическую размерность структуры. В  $R^2$  могут быть вложены D-графы вида  $\{n; s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ , где все  $s_i \leq s_{\max}$  при произвольном  $n$ . В  $R^3$  могут быть вложены E-графы, имеющие при произвольном  $n$  две независимые образующие  $a$  и  $b$ . Всякая другая образующая  $c$  должна быть связана с  $a$  и  $b$  соотношением

$$c = a^i b^j, \quad (5)$$

где  $i + j \leq s_{\max} = \text{const}$ .

Аналогичное ограничение на  $D$ -графы имеет вид

$$s_i = f \cdot s_0 + g \cdot s_1, \quad 1 < i < k, \quad f + g = s_{\max}. \quad (6)$$

Константу  $s_{\max}$  назовем структурным радиусом взаимодействия.

Введем в рассмотрение бесконечные локальные однородные структуры. Сюда входят  $E$ -графы, имеющие группу  $\text{Aut} \in \{C_\infty, C_\infty \times C_\infty, C_\infty \times C_\infty \times C_\infty\}$ , и все получаемые из них с учетом ограничения (5). В трехмерном случае допускаются три независимые образующие  $a, b$  и  $c$ . Всем этим структурам соответствуют бесконечные целочисленные решетки  $Z, Z^2, Z^3$ . Мотивы для такого расширения класса структур следующие.

Во-первых, кроме КАИС-структур, практическое применение имеют незамкнутые процессорные матрицы СБИС, которые можно рассматривать как фрагменты бесконечных решеток: квадратной, треугольной и т.д.

Во-вторых, бесконечные структуры являются более удобными объектами для изучения, так как каждая из них "представляет" счетное множество конечных. Так, квадратная решетка "представляет" все  $E$ -графы с двумя образующими и все  $D$ -графы вида  $\{n, 1, s\}$ , у которых  $\sqrt{n-1} \leq s \leq n/2$ . Термин "представляет" понимается так. Возьмем в КАИС-структуре фрагмент, не содержащий циклов ни по одной образующей, например, если  $a^m = 1$ , то размер фрагмента по образующей  $a$  строго меньше  $m$ . Этот фрагмент является одновременно фрагментом соответствующей бесконечной решетки.

Множество конечных структур, представляемых одной и той же бесконечной решеткой, назовем типом структуры, или типом ОВС.

Таким образом, бесконечные решетки дают возможность исследовать типовые свойства КАИС-структур, не зависящие от их порядка  $n$ , или выполняющиеся для них асимптотические оценки при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку число ЭМ в проектируемых ОВС порядка

$10^2 - 10^6$ , то эти асимптотические оценки достаточно точны для практических нужд.

### 3. Проблема надежности ОВС

Обеспечение надежности или, более широко, гарантоспособности [23] вычислений - наиболее трудная техническая и теоретическая проблема на пути построения релятивистской ОВС. Современная техническая традиция опирается в основном на такие методы, как обеспечение надежности исходных элементов, прогнозирование неисправностей и отказов, сложные процедуры аттестации изделия, эффективный контроль, диагностика и устранение неисправностей в период эксплуатации [23]. Между тем технология достигла такого уровня интеграции, что замена элемента в готовом изделии становится все труднее. Бескорпусная сборка "прячет" в единый герметичный корпус все изделие или его основную часть, неразрезная технология позволяет выращивать процессорную матрицу на одной кремниевой пластине. Таким образом, основным методом обеспечения надежных вычислений является разработка отказоустойчивых систем. Методы построения таких систем восходят к классической работе Дж.фон Неймана [24] и сводятся в основном к трехкратному (троирование) или еще большему резервированию с применением процедуры голосования (мажорирование). Помимо чрезмерного увеличения аппаратуры, недостаток метода в том, что надежность систем ограничивается надежностью единственного выходного мажоритарного элемента - "сторожа". Проблема "кто будет сторожить сторожей?" не имеет решения в рамках неймановского подхода, если не допустить существования абсолютно надежного элемента.

Другой подход к построению надежных машин предложили Е.Мур и К.Шеннон [25] для релейных схем. Фундаментальными результатами [25] являются:

- метод построения сколь угодно надежных релейных схем из сколь угодно ненадежных реле;

- отсутствие абсолютно надежных элементов и проблемы "кто сторожит сторожей";

- обнаружение ступенчатого вида предельной (при  $n \rightarrow \infty$ ) функции  $P_3 = P_3(n, p)$  вероятности замыкания релейной схемы, где  $P$  - вероятность замыкания одного реле.

На рис. 4 показан последний результат и способ наращивания релейной схемы.

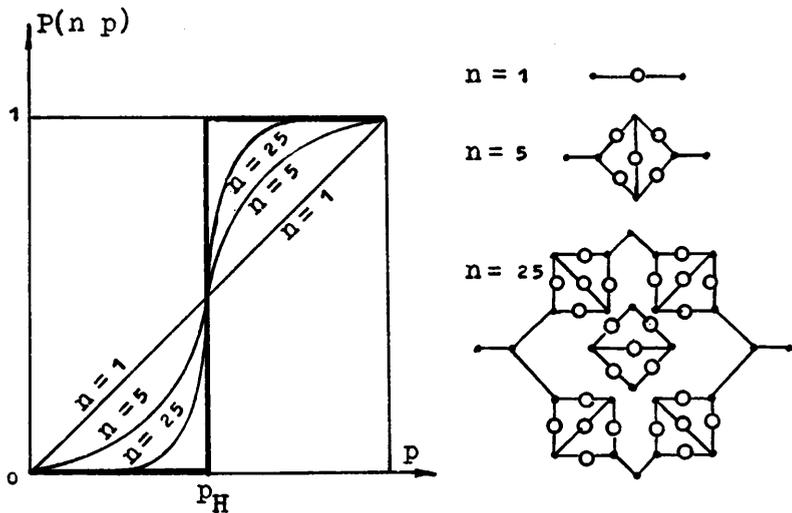


Рис. 4

Классическая работа [25] продемонстрировала радикальное решение проблемы надежности, когда

- неисправность обнаруживается и блокируется в рабочем режиме;

- интенсивность обнаружения и блокировки неисправностей пропорциональна числу  $n$  элементов;
- наличие абсолютно надежных элементов не предполагается;
- множественные неисправности не нарушают функций системы.

Эти требования следует предъявлять к "хорошим" методам обеспечения отказоустойчивости ОВС. Однако в этой области получено исключительно мало конструктивных результатов.

Первый цикл исследований надежности, живучести и осуществимости вычислений на ОВС полностью отражен в [5]. Под надежностью ОВС понималась способность системы иметь  $n_1 < n$  исправных ЭМ в течение заданного времени; под живучестью - свойство системы выполнять свои функции, может быть, более медленно, в условиях отказов ЭМ и при постепенной деградации ОВС; осуществимость - вероятность решения заданной задачи на ОВС. Однако все эти исследования проводились без учета структуры и не сопровождались построением алгоритмов самодиагностики и реконфигурации системы в случае отказа. Поэтому выводы о высокой надежности и живучести ОВС малоубедительны, а численные результаты практически неприменимы.

В [11] была сделана первая попытка осмыслить понятие структурной живучести ОВС и исследовать поведение вектор-функции структурной живучести

$$R = \{ R_m(s, p, r), \quad m = \overline{1, n} \},$$

где  $R_m(s, p, r)$  - вероятность существования исправной связи подсистемы порядка  $m$  в структуре  $S$  при числе узлов  $n$ , вероятности исправного узла  $p$  и исправной связи  $r$ . Статистические эксперименты показали, что компоненты вектор-функции тем больше, чем меньше диаметр (в смысле теории графов) КАИСтруктуры. Это обстоятельство наложило значительный отпечаток на все дальнейшие исследования. "Оптимальными" были признаны

КАИС-структуры минимального диаметра, и методы синтеза КАИС-структур суть методы их поиска [5, 12, 15].

Вектор-функция структурной живучести учитывает слишком много деталей и ее аналитическое выражение вряд ли будет получено. Попытка [11] ввести интегральную характеристику качества структуры - добротность, т.е. вероятность  $Q(S, \mathcal{M})$  того, что исправная подсистема порядка  $\mathcal{M}$  существует в системе  $S$  при случайном и равновероятном выборе величин  $P$  и  $\Gamma$ , оказалась непродуктивной. Добротность позволяет сравнивать структуры, но при этом исчезают величины  $P$  и  $\Gamma$ , которые представляют наибольший интерес.

Следующая попытка учесть структуру связей в ОВС была сделана в [26]. Исправной в ОВС считалась та ЭМ, которая сама исправна и имеет хотя бы одного исправного соседа. Такое соглашение особенно естественно, если исправность ЭМ устанавливается в результате взаимопроверок [27]. ОВС представляется многокомпонентной случайной системой, в которой поведение любой компоненты зависит от окрестности. Стационарное состояние такой системы - случайное поле. Выявлены условия обратимости, при которых это случайное поле марковское. Для марковского случайного поля подсчитана вероятность состояния одного элемента.

Результаты [26] показывают, что теория живучести, развитая в [5], имеет весьма ограниченное применение. Однако в [26] показана и ограниченность модели марковского случайного поля. Реальные потоки отказов и восстановлений ЭМ в ОВС таковы, что система необратима и ее равновесное состояние не является марковским полем. Кроме того, для практики важно, чтобы ЭМ не просто имела соседа, "согласного с ней при взаимопроверке", а была бы включена в действующую часть системы.

Перечисленные работы по надежности ОВС не предлагали конкретных алгоритмов самодиагностики и реконфигурации структуры отказоустойчивых ОВС, хотя поиск таких алгоритмов был главной

целью программы, выдвинутой в [11]. Исследования "застряли" на выяснении принципиальных возможностей однородных структур. В последние годы получены [27-29] обнадеживающие результаты в построении алгоритмов самодиагностики, взаимопроверки и реконфигурации процессорных матриц СБИС. Работы [27-29] демонстрируют различные возможности для поисков в этом направлении, однако вопрос о том, чего можно достичь в этих поисках, остается открытым.

В следующих разделах данной статьи дается ответ на этот вопрос.

#### 4. Надежность ОВС

с точки зрения теории просачивания

Мы рассмотрим надежность ОВС при следующих предположениях:

1. Ресурсы ОВС, т.е. число ЭМ и связей, не ограничены.
2. Структура ОВС удовлетворяет требованиям локальности и однородности.
3. Алгоритмы самодиагностики и реконфигурации ОВС используют возможности структуры наилучшим образом.
4. Элементы и связи ОВС выходят из строя и восстанавливаются независимо друг от друга.

Предположения 1-3 позволяют нам изучить влияние типа структуры ОВС на ее надежность в чистом виде, т.е. структурную надежность. Предположение 4 достаточно близко к реальности и позволит получить простые результаты.

Рассмотрим статическую модель структурной надежности ОВС. Положим, что элемент структуры исправен с вероятностью  $p$  и неисправен с вероятностью  $(1-p)$ , а связь (дуга или ребро) исправна с вероятностью  $r$  и неисправна с вероятностью  $(1-r)$ . Выделим в структуре максимальный блок размера  $n = n_1 \times n_2$ , не

содержащий циклов по независимым образующим  $a$  и  $b$ . На рис.3 такой блок размера  $3 \times 4$  получается удалением всех ребер, замыкающих структуру в тор. Назовем элементы, лежащие на левой стороне блока, входами, а на правой стороне - выходами. Функционирование ОВС будем рассматривать как просачивание информации от входов к выходам через исправные элементы и связи. Структура считается исправной, если такое просачивание возможно, и не исправной в противном случае. Следовательно, в исправной ОВС существует связанная подсистема (кластер), содержащая  $n_k > n_0$  элементов, включая входы и выходы, где  $n_0$  - число элементарных машин, необходимых для решения задачи. При  $n_k < n_0$  ОВС отказывает, несмотря на исправность своей структуры, так как в ней недостаточно ресурсов (вычислителей) для решения задачи.

Нарастание избыточности ОВС понимается теперь как неограниченный рост размера  $n$  выделенного блока. Ясно, что существует такой размер  $n$ , что наличие  $n_k > n_0$  элементов в исправном кластере будет гарантировано. Решающее значение будет иметь только факт существования или несуществования исправного кластера. По предположению, алгоритмы реконфигурации его обнаружат и полностью используют для организации вычислений. В этом и состоит их задача.

Увеличивая размер  $n$ , мы должны требовать увеличения размера исправного кластера. В пределе, при  $n \rightarrow \infty$ , в бесконечной структуре должен существовать бесконечный исправный кластер. В противном случае структура "рассыплется" на несвязные куски, т.е. выйдет из строя.

Имея в виду применение достаточно больших ОВС при  $n \geq 10^2$ , мы ограничимся исследованием их бесконечных представителей. Проблема надежности свелась теперь к следующему вопросу: при каких вероятностях  $p$  и  $\Gamma$  в бесконечной локальной однородной структуре данного типа существует бесконечный исправный кластер?

Ответ на этот вопрос является основной задачей теории просачивания. Систематическое изложение этой теории и библиографию можно найти в [30]. Теория просачивания исследует описанный выше феномен просачивания в широком классе периодических графов. Локальные однородные структуры превращаются в периодические графы соответствующим преобразованием координат в  $\mathbb{R}^3$ , но класс периодических графов шире, так как не ограничен требованием существования группы  $\text{Aut}$ .

Содержание основной задачи просачивания состоит в поиске области просачивания, точнее, такой функции  $f(p, r)$ , что при  $f(p, r) < 0$  бесконечный исправный кластер отсутствует, а при  $f(p, r) \geq 0$  - существует. Результатов, относящихся к этой задаче, крайне мало. Для наших целей достаточно остановиться на частных задачах: просачивание по вершинам, когда  $p < 1$  и  $r = 1$ , и просачивание по связям, когда  $p = 1$ , а  $r < 1$ . Вторая задача сводится к первой, поэтому мы будем проводить исследование структурной надежности, считая связи абсолютно надежными. Во многих последующих выкладках термин "вершина" может быть заменен термином "связь", а символ  $p$  - символом  $r$ .

Основной результат теории просачивания, который нам потребуется, можно содержательно сформулировать следующим образом.

**ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ.** Для всякого периодического графа  $G$ , вложенного в  $\mathbb{R}^2$ , существует критическая вероятность  $p_H$  такая, что если  $p < p_H$ , то бесконечный исправный кластер существует в  $G$  с вероятностью 0, и если  $p \geq p_H$ , то существует и притом единственный бесконечный исправный кластер в  $G$  с вероятностью 1.

Существование критической вероятности не подвергается сомнению и для периодических графов, вложенных в  $\mathbb{R}^3$ , однако в этом случае нет единственности бесконечного исправного кластера. Для практических целей пока достаточно ограничиться двумерным случаем, так как ОВС выращиваются на поверхности кристалла или размещаются на поверхности несущей конструкции.

Критическая вероятность  $P_H$  - единый показатель, характеризующий предельную надежность всех локальных однородных структур одного типа.

Пусть  $P(n, p)$  - вероятность просачивания через структуру размера  $n$  в данный момент времени. Эта величина называется коэффициентом готовности. Следующее утверждение о свойствах  $P(n, p)$  является, по существу, перефразировкой основного утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. На множестве локальных однородных структур одного типа, вложенных в  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p < P_H, \\ 1 & \text{при } p \geq P_H. \end{cases}$$

Иными словами, с ростом избыточности ОВС становится сколь угодно надежной, если  $p \geq P_H$ , и сколь угодно ненадежной, если  $p < P_H$ .

Рис. 4 наглядно демонстрирует типичное поведение функции  $P(n, p)$ . Вспомним, что Мур и Шеннон [25] строили сколь угодно надежные схемы из сколь угодно ненадежных реле. Их задачу можно было бы поставить как задачу просачивания по связям, однако это не меняет сути дела: утверждение 1 противоречит результатам [25] и многих последующих работ (см., например, [31]). Причина противоречия в том, что мы ограничены в выборе структуры. Требова-

ния локальности и однородности сами по себе лишают нас возможности использовать слишком ненадежные элементы.

### 5. Динамические модели надежности ОВС

Способ изучения структурной надежности ОВС в динамике ясен из основного утверждения. Будем рассматривать ансамбль независимых и идентичных ЭМ и везде требовать выполнения условия

$$p \geq p_H. \quad (7)$$

Пусть время безотказного функционирования ЭМ распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha$ . Среднее время наработки на отказ для ЭМ равно  $\tau = \alpha^{-1}$ . Величина  $\alpha$  - интенсивность отказов ЭМ,  $\tau$  - время жизни. Отказавшая ЭМ обнаруживается и восстанавливается с интенсивностью  $\beta$  за среднее время восстановления  $\beta^{-1}$ . Теперь для вероятности исправного состояния ЭМ в момент времени  $t + \Delta t$  можно записать  $p(t + \Delta t) = p(t) - \alpha \cdot p(t) \cdot \Delta t + \beta(1 - p(t)) \cdot \Delta t$ , откуда при  $\Delta t \rightarrow 0$  имеем

$$dp(t) = [\beta(1 - p(t)) - \alpha p(t)] dt. \quad (8)$$

Пусть  $p_0 = p(0)$  и  $p = p(t)$ . Вероятность  $p_0$  называется "выходом годных элементов" и характеризует качество СБИС при неразрезанной технологии. Если бракованные ЭМ можно заменить, то  $p_0 = 1$ . Решение уравнения (8) при указанных начальных условиях имеет вид

$$p = p_{\infty} + [p_0 - p_{\infty}] e^{-t(\alpha + \beta)}, \quad (9)$$

где  $p_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  - финальная вероятность исправного состояния ЭМ.

Уравнение (9) описывает процесс гибели - восстановления в бесконечном ансамбле ЭМ. Наглядно этот процесс представлен на рис. 5.

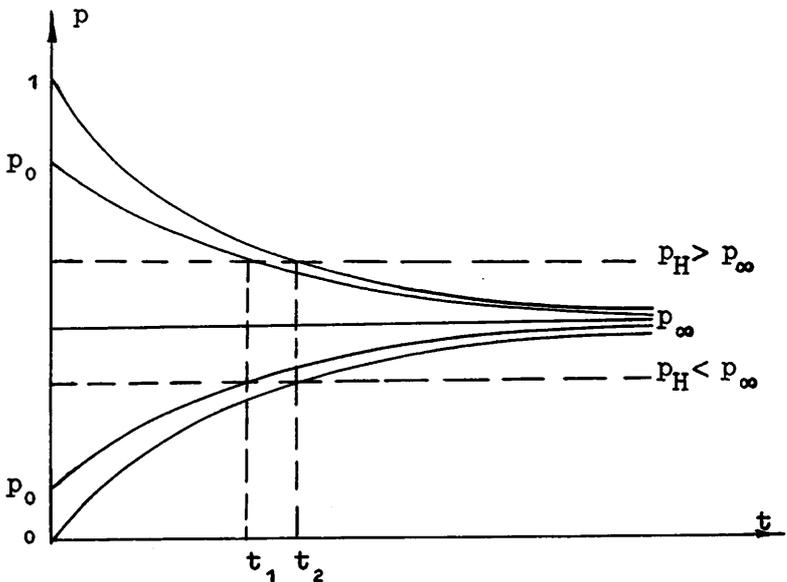


Рис. 5

Учитывая требование (7) как условие связности локальной однородной структуры, легко получить следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Время существования бесконечного исправного кластера в локальной однородной структуре равно

$$t = \begin{cases} 0, & \text{если } P_0 < P_\infty < P_H, \\ \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \frac{P_0 - P_\infty}{P_H - P_\infty}, & \text{если } P_\infty < P_H < P_0, \\ \infty, & \text{если } P_H < P_\infty. \end{cases} \quad (10)$$

В частности, в системе без восстановления

$$t = \tau \ln \frac{p_0}{p_H} \leq -\tau \ln p_H, \quad (11)$$

где  $\tau = \alpha^{-1}$  - время жизни одного элемента.

Итак, избыточность не увеличивает времени жизни локальной однородной структуры. Однако избыточность должна гарантировать не только исправность структуры, но и наличие в исправном кластере  $n_k > n_0$  исправных ЭМ. В конечной ОВС, содержащей достаточно большое число  $n$  элементов, размер исправного кластера  $n_k = np_k$ , где  $p_k$  - вероятность попадания элемента в исправный кластер. Отсюда  $n \geq n_0 p_k^{-1}$ . К сожалению, зависимость  $p_k$  от вероятности  $p$  неизвестна. Ясно, что  $p_k(p_H) < p_H$ , откуда

$$n \geq n_0 p_H^{-1}. \quad (12)$$

Возникает, однако, подозрение, что при большой избыточности структура выйдет из строя раньше, чем будет достигнуто критическое число  $n_0$  элементов исправного кластера. Такая ситуация нежелательна. Действительно, наблюдаемая часть ОВС - исправный кластер и его ближайшая окрестность. Остальные элементы системы изолированы, и их диагностика без специального "посмертного вскрытия" невозможна. Если исправный кластер существует, то систему нужно "лечить" в специальном режиме. Отсутствие исправного кластера означает "смерть" системы.

Это замечание бросает тень и на формулу (10). При ее получении мы предполагали, что интенсивность восстановления не зависит от окрестности элемента. Но как реально обеспечить диагностику и восстановление изолированного элемента? Для этого необходима постоянно действующая и абсолютно надежная (!) система восстановления, функционирующая независимо от ОВС. Формула (11) является более реальной оценкой.

Особенно ярко последствия чрезмерной избыточности выявляются на модели конечной ОВС с ограниченным восстановлением. Для наших целей достаточно воспользоваться приближенным методом динамики средних и рассмотреть только стационарное состояние. Пусть  $n$  - число ЭМ;  $m$  - число восстанавливающих органов, работающих параллельно;  $\alpha$  и  $\beta$  - интенсивности потока отказов и восстановлений.

При  $m > n(1-p)$  система ведет себя как самовосстанавливающаяся. При  $m < n(1-p)$  имеет место ограниченное восстановление, а условие равенства потоков отказов и восстановлений имеет вид

$$n \alpha p = m \beta . \quad (13)$$

Известно также, что при полной загрузке ограниченной восстанавливающей системы математическое ожидание числа исправных элементов равно  $m \beta \alpha^{-1}$ . Потребуем, чтобы это число превышало  $n_0$  и, кроме того, выполнялось  $p > p_H$ . Учитывая (13), получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. ОВС с ограниченным восстановлением работоспособна, если выполняется условие

$$n_0 < m \beta \alpha^{-1} \leq n \leq m \beta (\alpha p_H)^{-1} . \quad (14)$$

В противном случае при  $n > m \beta (\alpha p_H)^{-1}$  стационарное состояние ОВС есть состояние отказа.

Последнее утверждение есть одно из проявлений забавного "закона Мэрфи", который гласит: дополнительное оборудование, введенное в систему для обеспечения ее надежности, выводит систему из строя.

В заключение этого раздела напомним, что все полученные утверждения справедливы и для просачивания информации по ненадежным связям. Более того, если бы нам был известен вид грани-

цы области просачивания  $f(p,r) = 0$ , то можно было бы получить более сложные динамические модели, но выводы остались бы по существу прежними.

## 6. Обсуждение результатов

Утверждения 1-3 не являются теоремами в общепринятом смысле. Это содержательная интерпретация некоторых результатов теории просачивания в совокупности с общеизвестными моделями надежности. В таких случаях на первый план в обсуждении по- дает не истинность, которая не вызывает сомнений, а полезность, зависящая от приемлемости интерпретации. С этой точки зрения наиболее нереальным кажется предположение о самовосстановлении ОВС. Однако самовосстановление возможно и естественно, если отказом считать временный выход ЭМ из строя, например, при попадании в нее альфа-частицы. В этом случае  $\alpha$  - интенсивность потока частиц на ЭМ,  $\beta$  - интенсивность рассасывания ионизированного следа частицы в кристалле вместе с обнаружением и исправлением ошибки.

Предположение об ограниченном восстановлении естественно, если ОВС отказоустойчива, т.е. имеет место самодиагностика и реконфигурация структуры. Самодиагностика в процессе вычислений не составляет проблемы: отказы каналов связи обнаруживаются специальным кодированием, отказы ЭМ - либо внутренними средствами ЭМ, либо их взаимопроверкой.

Наиболее сложной оказывается реконфигурация структуры. В первых, алгоритмы реконфигурации требуют отделения коммутационной сети от вычислительных модулей, так что отказ вычислителя еще не означает отказа соответствующих коммутаторов. На рис. 6 показаны примеры таких структур. Коммутаторы обозначены точками.

Число таких примеров легко увеличить, ограничиваясь только требованием локальности. Однородность структуры теперь означа-

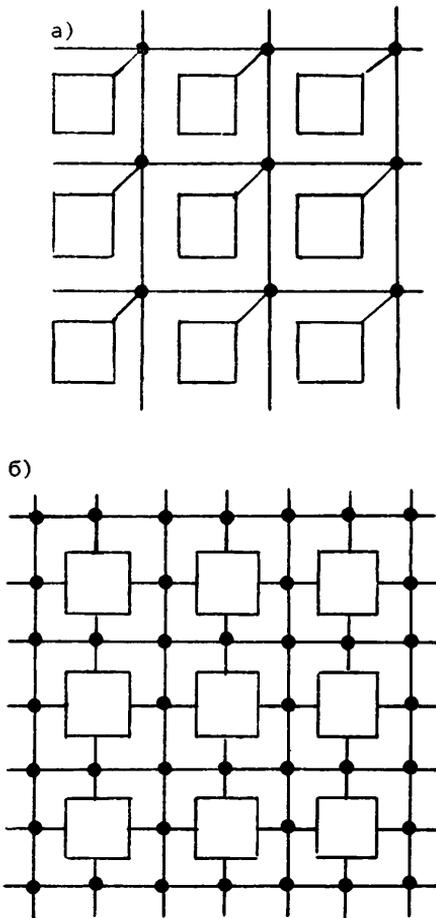


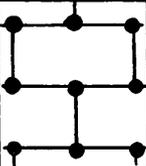
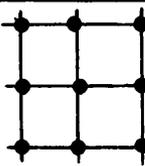
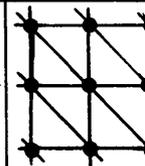
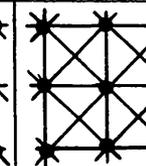
Рис. 6

ет, что группа  $\text{Aut}$  может быть заказана программистом и реализована коммутационной сетью. Последняя представляет собой произвольный периодический граф. Ясно, что результаты теории просачивания относятся теперь к коммутационной сети - в случае рис.6а или к сети с двумя типами вершин, как на рис.6б. В первом случае необходимо дополнить анализ отдельным рассмотрением процессов гибели и восстановления на множестве вычислительных модулей. Во втором - воспользоваться более общей постановкой задачи просачивания [30] и найти границу области просачивания  $f(p_2, p_1) = 0$ . Заранее ясно, что ничего принципиально нового такое усложнение моделей не дает, но позволит уточнить численные оценки.

Во-вторых, во многих применениях необходимо сохранить не только  $\Pi_0$  исправных и связанных ЭМ, но и соответствующую структуру. В [28] предлагаются такие алгоритмы реконфигурации, что перестроенная структура снова образует процессорную матрицу размера  $\Pi = \Pi_1^2$ . Это достигается размещением на периферии

Т а б л и ц а

Параметры просачивания  
в локальных однородных структурах

Параметр	С т р у к т у р а			
	Шеннона	Квадратная	Треугольная	К*
				
Aut		ab = ba ab = ba	ab = ba  c = ab	ab = ba c = ab d = ab <sup>-1</sup>
P <sub>H</sub>	0.7	0.59	0.5	0.41
p <sub>H</sub> <sup>-1</sup>	1.4	1.7	2.0	2.44
ln(p <sub>H</sub> <sup>-1</sup> )	0.34	0.53	0.69	0.89
r <sub>H</sub> <sup>-1</sup>	0.653	0.5	0.347	
r <sub>H</sub> <sup>-1</sup>	1.53	2.0	2.88	
ln(r <sub>H</sub> <sup>-1</sup> )	0.42	0.69	1.06	
$\frac{\ln(p_H^{-1})}{\text{slog } s}$	0.075	0.065	0.045	0.033

матрицы резервного столбца и строки. Алгоритмы реконфигурации обеспечивают сохранение структуры, если число отказов порядка  $n_1$ . Приняв величину  $(n-n_1)/n$  за оценку  $P_H$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_H = 1$ . Таким образом, приходится признать алгоритмы из [28] неперспективными. Видимо, резерв должен быть распределен по всей структуре равномерно и быть достаточно большим - порядка  $O(n)$ .

Как видно из нашего краткого обсуждения, достичь предельной надежности структуры достаточно сложно и рассмотрение этой задачи в терминах теории просачивания может дать некоторые ориентиры.

Интересны численные оценки предельной надежности ОВС. Относящиеся к этому вопросу параметры некоторых хорошо изученных периодических графов представлены в таблице. Величина  $p_H^{-1}$  показывает, в каких относительных пределах может колебаться размер  $n$  для ОВС с ограниченным восстановлением согласно условию (14). Величина  $\ln(p_H^{-1})$  - коэффициент при  $\tau$  в формуле (11). Аналогичен смысл  $r_H^{-1}$  и  $\ln(r_H^{-1})$ . Из таблицы видно, что время существования исправного кластера в представленных структурах не превышает времени жизни коммутатора, соответствующего элементу решетки. Создается впечатление, что с ростом степени  $S$  - вершины периодического графа - надежность структуры будет безгранично расти, как  $\ln(p_H^{-1})$  при  $p_H \rightarrow 0$ . Но не приведет ли усложнение коммутатора к быстрому падению величины  $\tau$ ? Действительно, элемент структуры есть полный коммутатор на  $S$  входов и выходов. Согласно К.Шеннону [32], объем памяти полного коммутатора растет как  $O(s \log_2 s)$  бит. Следовательно, интенсивность отказов коммутатора имеет оценку  $\alpha = O(\alpha_3 s \log_2 s)$ , где  $\alpha_3$  - интенсивность отказов исходного элемента схемы, т.е. вентиля. Учитывая (11), имеем оценку времени жизни структуры без восстановления:

$$t = O\left(\tau_3 \frac{\ln(p_H^{-1})}{s \log_2 s}\right), \quad (15)$$

где  $\tau_3$  - время жизни вентиля. Коэффициент при  $\tau_3$ , приведенный в таблице, быстро падает с ростом  $S$ , и есть все основания полагать, что эта тенденция сохранится и при дальнейшем увеличении  $S$ .

Итак, время жизни локальной однородной структуры без восстановления того же порядка, что и время жизни вентиля, а точнее, значительно меньше  $\tau_3$ . И это при всех, почти фантастических предположениях о самодиагностике и реконфигурации ОВС и при отсутствии требований к структуре исправного кластера!

Мы начали свой анализ со старинных упреков в адрес результатов Дж.фон Неймана [24], схемы которого не могут быть надежнее выходного "восстанавливающего" элемента. Но стоило довести этот анализ до вентиля, и результат оказался тот же. Правда, теперь это уже не ограничение метода, а фундаментальное свойство локальной однородной структуры.

Можно, конечно, пытаться строить отказоустойчивый коммутатор, но эта задача уже не относится к структуре ОВС. С равным успехом можно увеличивать надежность вентиля, и этот путь представляется более перспективным.

#### Л и т е р а т у р а

1. ХОКНИ Р., ДЖЕСХОУП К. Параллельные ЭВМ. -М.: Радио и связь, 1986. -392 с.
2. Вычислительная техника за рубежом в 1983 году. -М., 1984. -240 с. (ИТМ и ВТ АН СССР)
3. МОКНОФФ N. Parallelism makes strong big for next generation computers //Comput. Des. -1984. -Vol.23, N 10.-P.104-131 (Э.-и. Вычислительная техника, 1985, №27, с.1-14.)
4. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. - Новосибирск: Наука, 1966. - 308 с.
5. ЕВРЕИНОВ Э.В., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы. - Новосибирск: Наука, 1978. - 315 с.
6. ЕВРЕИНОВ Э.В., ПРАНГИШВИЛИ И.В. Цифровые автоматы с настраиваемой структурой. Однородные среды. - М.: Энергия, 1974. - 240 с.
7. КАЛЯЕВ А.В. Однородные коммутирующие регистровые структуры. - М.: Сов. радио, 1978. - 334 с.
8. БАЛАШОВ Е.П., СМОЛОВ В.Б., ПЕТРОВ Г.А. ПУЗАНКОВ Д.В. Многофункциональные вычислительные структуры. - М.: Сов. радио, 1978. - 288 с.

9. KUNG H.T., Why Systolic Architectures? //Computer.-1982. - Vol. 15, N 1. - p. 37-46.
10. KUNG S.Y., ARUN K.S. GAL-EZER R.J., BHASKAR RAO D.V. Wavefront array processor: language, architecture and applications //IEEE Trans. Comput. - 1982. -Vol. 31, N 11. -P.1054-1066.
11. ВОРОБЬЁВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур вычислительных систем //Вычислительные системы. - Новосибирск, 1974. - Вып. 60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. - С. 3-16.
12. ВОРОБЬЁВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем //Там же. - С. 35-49.
13. Его же. Относительная адресация элементов циклического графа //Однородные вычислительные системы из микро-ЭВМ.-Новосибирск, 1983. - Вып. 97: Вычислительные системы. -С. 87-103.
14. МАГНУС В., КАРРАС А., СОЛИТЕР Д. Комбинаторная теория групп. - М.: Наука, 1974. - 455 с.
15. ВОРОБЬЁВ В.А., МОНАХОВА Э.А. Оптимальные диофантовы структуры, синтез и путевые процедуры //Всесоюз. науч.-техн. сов. "Проблемы создания и использования высокопроизводительных информационно-вычислительных машин". Кишинёв, октябрь, 1979.Тез.докл. Кишинёв, 1979. - С. 73-74.
16. АХО А., ХОПКРОФТ Дж., УЛЬМАН Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. -М.: Мир, 1979. - 536 с.
17. ВАРШАВСКИЙ В.И. Коллективное поведение автоматов. - М.: Наука, 1973. - 408 с.
18. МИШИН А.И., СЕДУХИН С.Г. Однородные вычислительные системы и параллельные вычисления //Автоматика и вычислительная техника. - 1981. - №1. -С. 20-24.
19. ВАЛИЕВ М.К., МИШИН А.И. Организация параллельных вычислений на системе с локальными взаимодействиями элементов //Автоматика. - 1983. - № 6. -С. 88-96.
20. ВОРОБЬЁВ В.А. Модель коллектива вычислителей, основанная на принципе быстрогодействия //Вычислительные системы с программируемой структурой. -Новосибирск, 1982. - Вып. 94: Вычислительные системы. - С. 103-109.
21. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., МИШИН А.И. Временная сложность алгоритмов задач гидро-аэродинамики и производительность параллельных вычислительных систем. - Новосибирск, 1985. - 7 с. -(Препринт/АН СССР Институт математики, № 20).
22. КОРНЕЕВ В.В. Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. -Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. - 166 с.

23. АВИДЖЕНИС А., ЛАПРИ Ж.-К. Гарантоспособные вычисления: От идей до реализации в проектах //ТИИЭР. - 1986. - Т. 74, № 5. - С. 8-21.

24. ФОН НЕЙМАН Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент //Автоматы. - М., 1956.

25. МУР Е., ШЕННОН К. Надежные схемы из ненадежных реле //Работы по теории информации и кибернетике. -М., 1963.-С.114-153.

26. ЛАХОДЫНОВА Н.В. Стохастическая модель однородной вычислительной системы, учитывающая межмашинные связи //Вычислительные системы с программируемой структурой.- Новосибирск, 1982. -Вып. 94: Вычислительные системы. -С. 120-137.

27. КОРЕН И., ПРАДХАН Д. Избыточность как средство повышения надежности и выхода годных мультипроцессорных систем с интеграцией на уровне кристаллов и пластины //ТИИЭР.-1986.-Т.74, № 5. - С. 93-106.

28. САМИ М., СТЕФАНЕЛЛИ Р. Перестраиваемые архитектуры матричных процессорных СБИС //Там же. -С. 107-118.

29. МУР У.Р. Обзор методов повышения отказоустойчивости, повышающих выход годных интегральных схем //Там же.-С. 76-92.

30. КЕСТЕН Х. Теория просачивания для математиков.-М.:Мир, 1986. - 392 с.

31. ПИРС У. Построение надежных вычислительных машин. -М.: Мир, 1986. - 270 с.

32. ШЕННОН К. Требования, предъявляемые к объему памяти телефонного коммутатора //Работы по теории информации и кибернетике. -М., 1963. -С. 106-113.

Поступила в ред.-изд.отд.

17 декабря 1987 года