АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.65

АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНЫХ КОНСТАНТ В ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СПЛАЙНАМИ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

П.У.Калиев

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки Δ_N: $x_i = a+ih, i=0,1,\dots,N$, с шагом $h=(b-a)/N$ заданы значения $f_i = f(x_i)$ некоторой $(b-a)$-периодической функции $f(x) \in W_\infty^{k+1}$, $0 \le k \le 2n+1$. Обозначим через $S_{2n+1}(x)$ интерполяционный периодический сплайн степени $2n+1$ дефекта 1 [1,2], удовлетворяющий условиям $S_{2n+1}(x_i) = f_i$, $i = 0,1,\dots,N$.

Целью данной работы является построение алгоритма вычисления значений функций $C_{n,k,r}(t)$ при любом $t \in [0,1]$ в оценках вида

$$|S^{(r)}_{2n+1}(x) - f^{(r)}(x)| \le C_{n,k,r}(t) \frac{h^{k-r+1}}{k!} \|f^{(k+1)}\|_\infty, \tag{1}$$

$$k=0,1,\dots,2n+1; \quad r=0,1,\dots,k,$$

где $x = x_i + th$, $i = 0,1,\dots,N-1$.

Оценку (1) будем называть асимптотически точной, если она справедлива для всех N, но достигается, вообще говоря, только при $N \to \infty$ и тем самым она не может быть улучшена одновременно для всех N. В частных случаях оценка может достигаться при некоторых N, например при N четных. В этом случае оценку будем называть точной. Из оценок (1) вытекают точные (асимптотически точные) оценки в норме L_∞ :

$$\| S^{(r)}_{2n+1}(x)-f^{(r)}(x) \|_\infty \le C_{n,k,r} \frac{h^{k-r+1}}{k!} \|f^{(k+1)}\|_\infty, \tag{2}$$

$$k=0,1,\dots,2n+1; \quad r=0,1,\dots,k,$$

где $C_{n,k,r}= \max\limits_{t\in[0,1]} C_{n,k,r}(t)$.

В настоящее время известны точные оценки приближения сплайнами произвольной степени лишь в некоторых частных случаях. Так, в [2] приводятся точные поточечные оценки при четных $N=2m$ для функций из класса W^{2n+2}_∞ и $r=0$, при этом $C_{n,2n+1,0}(t)=|\varphi_{2m,2n+2}(t)|$, где $\varphi_{2m,2n+2}(t)$ - эйлеров идеальный сплайн, определенный на $[a,b]$. Кроме того, приводятся точные оценки в норме L_∞ для $r=0,1$ с постоянными

$$C_{n,2n+1,r}= \|\varphi_{2m,2n+2-r}\|_\infty = \frac{K_{2n+2-r}}{(2m\pi)^{2n+2-r}},$$

где K_{2n+2-r} - постоянные Фавара.

Алгоритм , излагаемый в статье, позволяет получать асимптотически точные поточечные оценки для функций класса W^{k+1}_∞ при любом $k=0,1,\dots,2n+1$ и при всех $r=0,1,\dots,k$. В явном виде найти функции $C_{n,k,r}(t)$ и постоянные $C_{n,k,r}$ удается только в редких случаях. Поэтому построение алгоритма проводилось так, чтобы обеспечить вычисление значений функций $C_{n,k,r}(t)$ с помощью ЭВМ. Вопросы, связанные с реализацией алгоритма на ЭВМ, будут рассмотрены в следующей работе автора.

В первом параграфе данной работы собраны необходимые вспомогательные результаты о симметрических циркулянтных матрицах A_N порядка $N\ge 2n+1$. Методом, использованным в [3], получены формулы для элементов обратной матрицы A_N^{-1} . Во втором параграфе строится алгоритм вычисления асимптотически точных поточечных оценок приближения функций из класса W_∞^{k+1}, $k=0,1,\dots,2n+1$. Отметим, что на основе полученных результатов может быть построен также алгоритм нахождения асимптотически точных оценок для $f(x)\in C^{2n+1}$. Этот вопрос рассматривается в §3.

§1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим $(2n+1)$-диагональную симметрическую циркулянтную матрицу порядка $N\ge 2n+1$, $n\ge 1$,

$$A_N=\operatorname{circ}(b_n, b_{n+1},\dots,b_{2n},0,\dots,0,b_0,\dots,b_{n-1}), \tag{1.1}$$

где

$$b_i=\sum_{s=0}^{i}(-1)^s C_{2n+2}^s(1+i-s)^{2n+1},\quad i=0,1,\dots,2n. \tag{1.2}$$

Такие матрицы возникают при построении интерполяционных сплайнов дефекта 1 на равномерной сетке [4]. Пусть

$$A_N^{-1}=\operatorname{circ}(a_1^N, a_2^N,\dots,a_N^N) - \tag{1.3}$$

матрица, обратная циркулянтной матрице A_N. В дальнейшем нам потребуются явные выражения для элементов A_N^{-1}. Из уравнения $A_N^{-1}\cdot A_N=E$, где E - единичная матрица порядка N, имеем систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} a_i^N b_{n-i+1}+\sum_{i=1}^{n} a_{N-n+i}^N b_{i-1}=1,\\
&\sum_{i=1}^{n+j} a_i^N b_{n-i+j}+\sum_{i=1}^{n-j+1} a_{N-n+i+j-1}^N b_{i-1}=0,\\
&\qquad\qquad j=2,3,\dots,n,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} a^N_{i+j-n-1} b_{2n+1-i} = 0,$$
$$j = n+1, n+2, \ldots, N-n,$$
$$\sum_{i=1}^{j-N+n} a^N_i b_{j-N+n-i} + \sum_{i=1}^{N+n-j+1} a^N_{j-n+i-1} b_{i-1} = 0,$$
$$j = N-n+1, N-n+2, \ldots, N.$$

Сопоставим матрице A_N характеристический полином

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i ,$$

который известен в литературе как полином Эйлера. Корни ω_l, $l = 1,2,\ldots,2n$, этих полиномов вещественны, отрицательны и различны [5,6]. Пусть $|\omega_l| < 1$, $l = 1,2,\ldots,n$, и $-1 < \omega_n < \ldots < \omega_1 < 0$, тогда $\omega_l \cdot \omega_{2n+1-l} = 1$. С возрастанием n все эти корни сдвигаются влево по направлению к (-1), $\lim_{n\to\infty} \omega_n = -1$, однако всегда $\omega_n \neq -1$, т.е. $P_n(-1) \neq 0$ [5]. Будем искать a^N_i в виде

$$a^N_i = \sum_{l=1}^{2n} c^N_l \omega_l^{i-1},$$

где c^N_l - коэффициенты, которые необходимо определить.

Подставив это выражение в (1.4) и учитывая, что $P_n(\omega_l) = 0$, получаем систему из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными c^N_l:

$$\sum_{l=1}^{2n} c^N_l \left[\sum_{i=1}^{n+j+1} b_{n-i+j+1} \omega_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1} \omega_l^{N-n+i+j-1} \right] = 0,$$
$$j = 1,2,\ldots,n-1,$$
$$\sum_{l=1}^{2n} c^N_l \left[\sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1} \omega_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{3n-j} b_{i-1} \omega_l^{N-3n+i+j-1} \right] = 0,$$
$$j = n, n+1, \ldots, 2n-1,$$

$$\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{n+1} b_{n-i+1}\omega_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}\omega_l^{N-n+i-1}\right] = 1.$$

Далее, учитывая, что $b_{i-1} = b_{2n+1-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, преобразуем выражения в левой части первых $(n-1)$ уравнений системы к виду:

$$\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=-n+j+1}^{n+j+1} b_{n-i+j+1}\omega_l^{i-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1}\omega_l^{N-n+i+j-1} - \sum_{i=1}^{n-j} b_{2n+1-i}\omega_l^{-n+i+j-1}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[P_n(\omega_l) - (1-\omega_l^N)\sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1}\omega_l^{i-1}\right]\omega_l^{j-n},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Аналогично

$$\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1}\omega_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{2n+1} b_{i-1}\omega_l^{N-3n+j+i-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=3n-j+1}^{2n+1} b_{i-1}\omega_l^{N-3n+j+i-1}\right] = \sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\omega_l^{N-3n+j} P_n(\omega_l) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1}\omega_l^{i-1} - \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{3n+i-j-1}\omega_l^{N+i-1}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{2n} c_l^N (1-\omega_l^N) \sum_{i=1}^{j-n} b_{j-n-i+1}\omega_l^{i-1},$$

$$j = n, n+1, \ldots, 2n.$$

Обозначив $a_l = c_l^N(1-\omega_l^N)$, отсюда получаем систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{2n} \left[a_l \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1}\omega_l^{i-1}\right]\omega_l^{j-n} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{l=1}^{2n}\Big[a_l \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1}\,\omega_l^{i-1}\Big]=0\,,\quad j=n,n+1,\ldots,2n-1\,,$$

$$\sum_{l=1}^{2n} a_l \sum_{i=1}^{n+1} b_{n-i+1}\,\omega_l^{i-1} = 1\,,$$

которая, как нетрудно видеть, эквивалентна системе

$$\sum_{l=1}^{2n} a_l\,\omega_l^{j-n} = 0\,,\quad j = 1,2,\ldots,2n-1\,,$$

$$\sum_{l=1}^{2n} a_l\,\omega_l^{n} = 1\,. \tag{1.5}$$

Определитель полученной системы представляет собой определитель Вандермонда, а ее решение записывается в виде

$$a_l = \frac{\omega_l^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2n}(\omega_l-\omega_j)}\,,\quad l = 1,2,\ldots,2n\,. \tag{1.6}$$

Таким образом,

$$c_l^N = a_l/(1-\omega_l^N), \tag{1.7}$$

и поэтому

$$a_i^N = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\omega_l^{n+i-2}}{(1-\omega_l^N)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2n}(\omega_l-\omega_j)}\,,\quad i=1,2,\ldots,N\,. \tag{1.8}$$

Учитывая равенство $\omega_l\,\omega_{2n+1-l} = 1$, нетрудно показать, что

$$a_i^N = \sum_{l=1}^{n} c_l^N(\omega_l^{i-1}+\omega_l^{N-i+1})\,,\quad i = 1,2,\ldots,N\,. \tag{1.9}$$

В дальнейшем будет удобно ввести величины a_i^N при $i=-n+2,-n+3,\ldots,0,N+1,N+2,\ldots,N+n+1$, определяемые также формулой (1.8). Тогда из (1.5) и (1.9) получаем следующие свойства:

$$a_i^N = a_{N-i+2}^N,\ i=-n+2,-n+3,\ldots,0,\ldots,N+n,$$

$$a_i^N = a_{i+N}^N,\ i=-n+2,-n+3,\ldots,0,\ldots,n, \tag{1.10}$$

$$a_{n+1}^N - a_{n+1+N}^N = 1.$$

§2. Алгоритм получения точных поточечных оценок приближения периодических функций класса W_∞^{k+1}

Запишем известные соотношения [4], связывающие значения сплайна $S_{2n+1}(x)$ и его производных в узлах сетки со значениями интерполируемой функции:

$$\sum_{j=0}^{2n} b_j^{(0)} S_{2n+1}^{(r)}(x_{i+j-n}) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_j^{(r)} f_{i+j-n},\ i=0,\ldots,N, \tag{2.1}$$

где

$$b_j^{(r)} = r!C_{2n+1}^r \sum_{s=0}^{j} (-1)^{s+r} C_{2n+2}^s (j+1-s)^{2n+1-r},$$
$$r=0,1,\ldots,2n+1.$$

Заметим, что $b_j^{(0)} = b_j,\ j=0,1,\ldots,2n$, где b_j определяются формулой (1.2). Умножая уравнения (2.1) соответственно на $t^r h^r/r!$, $t\in[0,1]$, $r=0,1,\ldots,2n+1$, и затем складывая их, получаем

$$\sum_{j=0}^{2n} b_j(0) S_{2n+1}(x_{i+j-n}+th) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_j(t) f_{i+j-n}, \tag{2.2}$$
$$i=0,1,\ldots,N-1,$$

где

$$b_j(t) = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s C^s_{2n+2} (j+1-s-t)^{2n+1}, \tag{2.3}$$

$$j = 0,1,\ldots,2n+1.$$

Отметим следующие свойства:

$$b_j(0) = b_{j+1}(1), \quad j = 0,1,\ldots,2n, \tag{2.4}$$

$$b_{2n+1-j}(t) = b_j(1-t), \quad j = 0,1,\ldots,2n+1. \tag{2.5}$$

Равенство (2.4) непосредственно вытекает из формулы для $b_j(t)$. Далее, используя (2.3), легко показать, что имеет место равенство $b_{2n+1-j}(t) - b_j(1-t) = b_{2n+2}(1+t-j)$, правая часть которого, также определяемая формулой (2.3), есть разность $(2n+2)$-го порядка от полинома степени $(2n+1)$ и поэтому тождественно равна нулю. В результате имеем (2.5).

Введем обозначения:

$$R_{2n+1}(x_{i-n+j}+th) = S_{2n+1}(x_{i+j-n}+th) - f(x_{i-n+j}+th),$$

$$D_{2n+1}(x_i+th) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_j(t) f_{i+j-n} - \sum_{j=0}^{2n} b_j(0) f(x_{i-n+j}+th).$$

В дальнейшем, с целью сокращения записи, индекс степени сплайна $(2n+1)$ опускается. Из (2.2) имеем

$$\sum_{j=0}^{2n} b_j(0) R^{(r)}(x_{i-n+j}+th) = D^{(r)}(x_i+th),$$

$$i = 0,1,\ldots,N-1; \quad r = 0,1,\ldots,k,$$

или в матричном виде $A_N R^{(r)} = D^{(r)}$, где A_N - циркулянтная матрица, задаваемая формулой (1.1),

$$R^{(r)} = [R^{(r)}(x_0+th),\ldots,R^{(r)}(x_{N-1}+th)]^T,$$

$$D^{(r)} = [D^{(r)}(x_0+th), \dots, D^{(r)}(x_{N-1}+th)]^T.$$

Отсюда

$$R^{(r)} = A_N^{-1} D^{(r)}, \qquad r = 0,1,\dots,k, \tag{2.6}$$

где A_N^{-1} задается формулой (1.3) с элементами a_i^N, $i = 1, 2, \dots, N$, определяемыми формулой (1.8). Соотношения (2.6) являются исходными для вывода всех оценок.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $S_{2n+1}(x)$ *интерполирует* $(b-a)$-*периодическую функцию* $f(x) \in W_\infty^{k+1}[a,b]$, $k = 0,1,\dots$ $\dots, 2n+1$, *в узлах сетки* Δ_N. *Тогда имеют место неулучшаемые в каждой точке* $x = x_i + th$, $t \in [0,1]$, $i = 0,1,\dots,N-1$, *асимптотические оценки*

$$|S_{2n+1}^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \le C_{n,k,r}(t) \frac{h^{k-r+1}}{k!} \|f^{(k+1)}\|_\infty, \tag{2.7}$$

$$r = 0,1,\dots,k,$$

где

$$C_{n,k,r}(t) = \int_0^t |G_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^{1-t} |G^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 |G_i^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^1 |G_i^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau \right], \tag{2.8}$$

$$G_0(t,\tau) = \sum_{l=1}^{n} a_l Q_l(t,\tau) + \psi_0(t,\tau),$$

$$G_i(t,\tau) = \sum_{l=1}^{n} a_l Q_l(t,\tau)\omega_l^i, \quad i = 1,2,\dots,\infty;$$

$$Q_l(t,\tau) = \sum_{m=0}^{2n} \psi_m(t,\tau)\omega_l^{m-n}, \quad l = 1,2,\dots,n;$$

$$\psi_m(t,\tau) = (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{m} [b_j(t)(m-j+\tau)^k -$$

$$- b_j(1)(m-j+1-t+\tau)^k], \quad m = 0,1,\ldots,n;$$

$$\psi_m(t,\tau) = (-1)^{k+1}\psi_{2n-m}(1-t,1-\tau) -$$

$$- b_{2n-m}(0)(t-\tau)^k, \quad m = n+1,n+2,\ldots,2n;$$

$b_j(t)$, $j=0,1,\ldots,n$, *и* a_l, $l=1,2,\ldots,n$, *задаются формулами* (2.3), (1.6); ω_l, $l=1,2,\ldots,n$, *- корни характеристического полинома* $P_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i(0)x^i$, *удовлетворяющие условию* $|\omega_l| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим случай $r = 0$. В силу периодичности $f(x)$ нам достаточно рассмотреть одну из величин $R(x_i + th)$. Из (2.6) имеем

$$R(x_0 + th) = \sum_{j=1}^{N} a_j^N D(x_{j-1} + th) \quad . \tag{2.9}$$

Разложим значения $f(x_{i-n+j} + th)$ и f_{i-n+j}, входящие в выражения для $D(x_i + th)$, по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th$ с остаточным членом в интегральной форме. После тождественных преобразований и приведения подобных в $D(x_i + th)$ останутся только интегральные слагаемые. В результате

$$D(x_i + th) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{ \sum_{j=0}^{2n+1} b_j(t) \int_{x}^{x_{i-n+j}} (x_{i-n+j} - v)^k f^{(k+1)}(v)dv - \right.$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1} b_j(0)\int_{x}^{x_{i-n+j}+th} [(x_{i-n+j}+th)-v]^k f^{(k+1)}(v)dv -$$

$$\left.-\sum_{j=n+1}^{2n} b_j(0)\int_{x}^{x_{i-n+j}+th} [(x_{i-n+j}+th)-v]^k f^{(k+1)}(v)dv\right\} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{-\sum_{m=0}^{n}\int_{x_{i-n+m}}^{x_{i-n+m}+th}\sum_{j=0}^{m}[b_j(t)(x_{i-n+j}-v)^k -\right.$$

$$- b_j(1)(x_{i-n+j-1}+th-v)^k]f^{(k+1)}(v)dv +$$

$$+\sum_{m=n+1}^{2n}\int_{x_{i-n+m}}^{x_{i-n+m}+th}\sum_{j=0}^{2n-m}[b_{2n+1-j}(t)(x_{i+n+1-j}-v)^k -$$

$$- b_j(0)(x_{i+n-j}+th-v)^k]f^{(k+1)}(v)dv-$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}\int_{x_{i-n+m}+th}^{x_{i-n+m+1}}\sum_{j=0}^{m}[b_j(t)(x_{i-n+j}-v)^k -$$

$$- b_j(0)(x_{i-n+j}+th-v)^k]f^{(k+1)}(v)dv +$$

$$+\sum_{m=n}^{2n}\int_{x_{i-n+m}+th}^{x_{i-n+m+1}}\sum_{j=0}^{2n-m}[b_{2n+1-j}(t)(x_{i+n+1-j}-v)^k -$$

$$\left.- b_j(1)(x_{i+n-j+1}+th-v)^k]f^{(k+1)}(v)dv\right\} .$$

Сделаем в интегралах замену переменных $v-x_{i-n+m} = \tau h$. Тогда

$$D(x_i+th) = \sum_{m=0}^{2n} d_{i+1,m+1}(t), \quad i= 0,1,\dots,N-1,$$

где

$$d_{i+1,m+1}(t)= \frac{h^k}{k!}\left[\int_0^t \psi_m(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{i-n+m}+\tau h)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^1 \tilde{\psi}_m(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{i-n+m}+ \tau h)d\tau \right],$$

$$\psi_m(t,\tau)=(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{m} [b_j(t)(m-j+\tau)^k-b_j(1)(m-j+1-t+\tau)^k],$$

$$m = 0,1,\dots, n;$$

$$\psi_m(t,\tau)= \sum_{j=0}^{2n-m} [b_{2n+1-j}(t)(2n-m+1-j-\tau)^k -$$

$$- b_j(0)(2n-m-j+t-\tau)^k], \ m = n+1,n+2,\dots,2n;$$

$$\tilde{\psi}_m(t,\tau)=(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{m} [b_j(t)(m-j+\tau)^k-b_j(0)(m-j-t+\tau)^k],$$

$$m = 0,1,\dots, n-1;$$

$$\tilde{\psi}_m(t,\tau) = \sum_{j=0}^{2n-m} [b_{2n+1-j}(t)(2n+1-m-j-\tau)^k -$$

$$- b_j(1)(2n+1-m-j+t-\tau)^k], \ m = n,n+1,\dots,2n.$$

Отметим следующие свойства функций $\psi_m(t,\tau)$ и $\tilde{\psi}_m(t,\tau)$:

$$\psi_m(t,\tau) = (-1)^{k+1}\tilde{\psi}_{2n-m}(1-t,1-\tau), \quad m=0,\dots,2n, \tag{2.10}$$

$$\psi_m(t,\tau) = \tilde{\psi}_m(t,\tau) + (-1)^{k+1} b_m(0)(\tau-t)^k,$$
$$m = 0,\dots,2n. \tag{2.11}$$

Равенства (2.10) для всех m и (2.11) для $m \neq n$ непосредственно вытекают из формул для $\psi_m(t,\tau)$, $\tilde{\psi}_m(t,\tau)$. При $m=n$, подставив выражения $\psi_n(t,\tau)$ и $\tilde{\psi}_m(t,\tau)$ в (2.11), получаем

$$(-1)^{k+1}\left[\sum_{j=0}^{n} b_j(t)(n-j+\tau)^k + \sum_{j=0}^{n} b_{2n+1-j}(t)(j-1-n+\tau)^k\right] =$$

$$= (-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{n} b_j(0)[\tau-j+n-t]^k - \sum_{j=0}^{n} b_j(1)(n-j+1+t-\tau)^k. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.4), преобразуем правую часть (2.12) к виду:

$$(-1)^{k+1}\left\{\sum_{j=0}^{n} b_j(0)[(\tau+n-j)-t]^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} b_j(0)[(\tau+j-n)-t]^k\right\} =$$

$$= (-1)^{k+1}\left\{\sum_{j=0}^{n} b_j(0)[(\tau+n-j)-t]^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1}(0)[(\tau-j-1)-t]^k\right\} =$$

$$= (-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{2n} b_j(0)[(\tau+n-j)-t]^k.$$

После преобразования левой части (2.12) получаем

$$\sum_{j=0}^{2n} b_j(0)[(j-n-\tau)+t]^k = \sum_{j=0}^{2n+1} b_j(t)(j-n-\tau)^k . \qquad (2.13)$$

Соотношения (2.1) при $i = n, n+1, \ldots, N-n$ выполняются для непериодических сплайнов степени $(2n+1)$. Поскольку функция x^k, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, является сплайном степени $(2n+1)$, то выполняются (2.1), следовательно и (2.2) при $i = n, n+1, \ldots, N-n-1$. Откуда при $i = n$ и $x_j = (-\tau - n+j)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n+1$, получаем (2.13), и тем самым формула (2.11) доказана.

Из (2.10) и (2.11), а также из равенства $b_j(0) = b_{2n-m}(0)$, $m = 0, 1, \ldots, 2n$, вытекающего из (2.4), (2.5), легко получаем

$$\psi_m(t,\tau) = (-1)^{k+1}\psi_{2n-m}(1-t, 1-\tau) - b_{2n-m}(0)(t-\tau)^k,$$
$$m = n+1, n+2, \ldots, 2n . \qquad (2.14)$$

В силу периодичности $f(x)$ имеем

$$d_{i+1,m+1}(t) = d_{N+i+1,m+1}(t), \qquad (2.15)$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Подставим полученные выражения для $D(x_i+th)$ в (2.9). Тогда

$$R(x_0+th) = \sum_{i=-2n+1}^{0} \sum_{m=1-i}^{2n} A_{im} + \sum_{i=1}^{N-2n} \sum_{m=0}^{2n} A_{im} +$$
$$+ \sum_{i=N-2n+1}^{N} \sum_{m=0}^{N-i} A_{im}, \qquad (2.16)$$

где обозначено $A_{im} = a^N_{i+m} d_{i+m, 2n+1-m}$. Преобразуем первую и третью суммы в (2.16) следующим образом:

$$\sum_{i=-2n+1}^{0}\ \sum_{m=1-i}^{2n} A_{im} = \sum_{i=-n+2}^{0}\ \sum_{m=0}^{2n} A_{im} +$$

$$+ \sum_{i=-2n+1}^{-n+1}\ \sum_{m=1-i}^{2n} A_{im} - \sum_{i=-n+2}^{0}\ \sum_{m=0}^{-i} A_{im};$$

$$\sum_{i=N-2n+1}^{N}\ \sum_{m=0}^{N-i} A_{im} = \sum_{i=N-2n+1}^{N-n+1}\ \sum_{m=0}^{2n} A_{im} +$$

$$+ \sum_{i=N-n+2}^{N}\ \sum_{m=0}^{N-i} A_{im} - \sum_{i=N-2n+1}^{N-n+1}\ \sum_{m=N-i+1}^{2n} A_{im}.$$

Подставляя полученные выражения в (2.16) и учитывая равенства (2.15), получаем

$$R(x_0+th)=S_N+\sum_{i=-n+2}^{0}\ \sum_{m=0}^{-i}(a^N_{i+m+N}-a^N_{i+m})d_{i+m,\,2n+1-m} +$$

$$+\sum_{i=-2n+1}^{-n+1}\ \sum_{m=1-i}^{2n}(a^N_{i+m}-a^N_{i+m+N})d_{i+m,\,2n+1-m},$$

где $$S_N=\sum_{i=-n+2}^{N-n+1}\ \sum_{m=0}^{2n} a^N_{i+m} d_{i+m,\,2n+1-m}.$$

Далее, пользуясь свойствами (1.10), окончательно имеем $R(x_0+th)= S_N+ d_{n+1,1}$.

Так как

$$S_N=\sum_{i=0}^{N-1}\ \sum_{m=0}^{2n} a^N_{-n+2+i+m} d_{-n+2+i+m,\,2n+1-m} =$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\ \sum_{m=0}^{2n} a^N_{n+2+i-m} d_{n+2+i-m,\,m+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{2n} a^N_{N+1-i-m+n} d_{N+1-i-m+n,m+1},$$

то, учитывая равенства $a^N_i = a^N_{N-i+2}, i=-n+2,-n+3,\ldots,0,\ldots$ $\ldots,N+n$, получаем

$$R(x_0+th) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{2n} a^N_{1-n+i+m} d_{N+n+1-i-m,m+1} + d_{n+1,1}.$$

Откуда, переходя к явным выражениям a^N_i, имеем

$$R(x_0+th) = \left[\sum_{m=0}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} c^N_l \omega_l^{m-n} d_{N+1-m+n,m+1} + d_{n+1,1} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{l=1}^{2n} c^N_l \omega_l^{i+m-n} \right) d_{N+1-i-m+n,m+1}$$

и с учетом явных выражений $d_{i+1,m+1}$

$$R(x_0+th) = \frac{h^{k+1}}{k!} \left\{ \int_0^t P_0(t,\tau) f^{(k+1)}(x_0+\tau h)\,d\tau + \right.$$

$$+ \int_t^1 \tilde{P}_0(t,\tau) f^{(k+1)}(x_0+\tau h)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[\int_0^t P_i(t,\tau) f^{(k+1)}(x_{N-i}+\tau h)\,d\tau + \right.$$

$$\left.\left. + \int_t^1 \tilde{P}_i(t,\tau) f^{(k+1)}(x_{N-i}+\tau h)\,d\tau \right] \right\},$$

где

$$P_0(t,\tau) = \sum_{l=1}^{2n} c^N_l Q_l(t,\tau) + \psi_0(t,\tau), \qquad (2.17)$$

$$P_i(t,\tau)=\sum_{l=1}^{2n} c_l^N Q_l(t,\tau)\omega_l^i\ ,\ i=1,2,\ldots,N-1; \tag{2.18}$$

$$Q_l(t,\tau)=\sum_{m=0}^{2n} \psi_m(t,\tau)\omega_l^{m-n}\ ,\quad l=1,2,\ldots,2n. \tag{2.19}$$

Функции $\widetilde{P}_0(t,\tau)$ и $\widetilde{P}_i(t,\tau)$ получаются из соответствующих функций $P_0(t,\tau)$ и $P_i(t,\tau)$ заменой $\psi_0(t,\tau)$ на $\widetilde{\psi}_0(t,\tau)$ и $Q_l(t,\tau)$ на $\widetilde{Q}_l(t,\tau)$, которые, в свою очередь, получаются заменой функций $\psi_m(t,\tau)$ на $\widetilde{\psi}_m(t,\tau)$.

Из (2.11) следует $Q_l(t,\tau)=\widetilde{Q}_l(t,\tau), l=1,2,\ldots,2n$, и, значит,

$$R(x_0+th)=\frac{h^{k+1}}{k!}\left\{\int_0^t P_0(t,\tau)f^{(k+1)}(x_0+\tau h)d\tau+\right.$$

$$+\int_t^1 \widetilde{P}_0(t,\tau)f^{(k+1)}(x_0+\tau h)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^1 P_i(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{N-i}+\tau h)d\tau\right\}. \tag{2.20}$$

Отсюда после применения неравенства Гёльдера имеем

$$|R(x_0+th)|\le C_{n,k}(N;t)\,\frac{h^{k+1}}{k!}\|f^{(k+1)}\|_\infty, \tag{2.21}$$

где

$$C_{n,k}(N;t)=\int_0^t|P_0(t,\tau)|d\tau+\int_t^1|\tilde{P}_0(t,\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^1|P_i(t,\tau)|d\tau. \qquad (2.22)$$

Нетрудно видеть, что (2.21) является точной поточечной оценкой. Однако в общем случае функции $C_{n,k}(N;t)$ зависят от N, в силу чего их явные выражения удается вычислить лишь в редких случаях. Исходя из (2.21), получим асимптотически точные оценки. Для этого введем функции:

$$G_0(t,\tau)=\sum_{l=1}^{n}a_lQ_l(t,\tau)+\psi_0(t,\tau),$$

$$\tilde{G}_0(t,\tau)=\sum_{l=1}^{n}a_l\tilde{Q}_l(t,\tau)+\tilde{\psi}_0(t,\tau),$$

$$G_i(t,\tau)=\sum_{l=1}^{n}a_lQ_l(t,\tau)\omega_l^i,\ i=1,2,\dots,N-1,$$

$$G_{N,i}(t,\tau)=\sum_{l=1}^{n}c_l^NQ_l(t,\tau)\omega_l^i,\ i=1,2,\dots,N-1,$$

где $a_l, l=1,2,\dots,n,$ определяются формулой (1.6). Из свойств (1.10) и (2.11) нетрудно показать, что $\tilde{G}_0(t,\tau)=$ $=(-1)^{k+1}G_0(1-t,1-\tau)$. Из (1.7), (1.10) и (2.11) можно также вывести

$$c_{2n+1-l}^N\omega_{2n+1-l}^i=c_l^N\omega_l^{N-i},\ l=1,2,\dots,n;$$

$$Q_{2n+1-l}(t,\tau)=(-1)^{k+1}Q_l(1-t,1-\tau),\ l=1,2,\dots,n.$$

С учетом всех этих равенств преобразуем подынтегральные выражения в (2.22) к виду:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(t,\tau) = G_0(t,\tau) + G_{N,N}(t,\tau) + \\
&\qquad + (-1)^{k+1} G_{N,N}(1-t,1-\tau), \quad \tau \in [0,t], \\
&\tilde{P}_0(t,\tau) = (-1)^{k+1} G_0(1-t,1-\tau) + G_{N,N}(t,\tau) + \\
&\qquad + (-1)^{k+1} G_{N,N}(1-t,1-\tau), \quad \tau \in [t,1], \\
&P_i(t,\tau) = G_{N,i}(t,\tau) + (-1)^{k+1} G_{N,N-i}(1-t,1-\tau), \\
&\qquad i = 1,2,\ldots,N-1; \quad \tau \in [0;1].
\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Имеем $\quad C_{n,k}(N;t) = \tilde{C}_{n,k}(N;t) + \tilde{\delta}_N(t)$, где

$$\tilde{C}_{n,k}(N;t) = \int_0^t |G_0(t,\tau)|\,d\tau + \int_0^{1-t} |G_0(1-t,\tau)|\,d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^1 |G_{N,i}(t,\tau)|\,d\tau + \int_0^1 |G_{N,i}(1-t,\tau)|\,d\tau \right],$$

$$\tilde{\delta}_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\delta}_{N,i}(t), \quad \tilde{\delta}_{N,i}(t) = O(\omega_n^{N/2}) \quad .$$

Величина $\tilde{\delta}_N(t)$ появилась в результате перехода от модуля суммы к сумме модулей, поэтому $\tilde{\delta}_{N,i}(t) \le 0$ и, значит, $\tilde{\delta}_N(t) \le 0$. Отметим также, что $\tilde{\delta}_N(t) \to 0$ при $N \to \infty$.

Учитывая, что

$$G_{N,i}(t,\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} G_{lN+i}(t,\tau), \tag{2.24}$$

имеем

$$\tilde{C}_{n,k}(N;t)=\int_0^t|G_0(t,\tau)|d\tau+\int_0^{1-t}|G_0(1-t,\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1\sum_{l=0}^{\infty}|G_{lN+i}(t,\tau)|\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\sum_{l=0}^{\infty}|G_{lN+i}(1-t,\tau)|d\tau\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}[\delta_{lN+i}(t)+\delta_{lN+i}(1-t)]=C_{n,k}(t)+\delta(t),$$

где

$$C_{n,k}(t)=\int_0^t|G_0(t,\tau)|d\tau+\int_0^{1-t}|G_0(1-t,\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^1|G_i(t,\tau)|d\tau+\int_0^1|G_i(1-t,\tau)|d\tau\right],$$

$$\delta(t)=\sum_{i=1}^{\infty}[\delta_{N+i}(t)+\delta_{N+i}(1-t)],$$

$$\delta_{N+i}(t)=O(\omega_n^{N+i}),$$

$$\delta_{N+i}(1-t)=O(\omega_n^{N+i}).$$

Величина $\delta(t)$, так же как $\tilde{\delta}_N(t)$, неположительна и стремится к нулю при $N\to\infty$. Отсюда $\lim\limits_{N\to\infty}C_{n,k}(N;t)=$ $=C_{n,k}(t)$.

Итак, окончательно получаем асимптотически точную поточечную оценку

$$|R(x_0+th)| \le C_{n,k}(t)\frac{h^{k+1}}{k!}\|f^{(k+1)}\|_\infty . \qquad (2.25)$$

При $\tilde{\delta}_N = 0$, $\delta = 0$, что выполняется при совпадении знаков слагаемых в выражениях (2.23) и (2.24), имеем $C_{n,k}(N;t) = C_{n,k}(t)$, и, значит, в этом случае (2.25) будет точной поточечной оценкой. Доказательство теоремы для случая $r = 0$ закончено.

Введем обозначение

$$\psi_m^{(r)}(t,\tau) = \frac{\partial^r\psi_m(t,\tau)}{\partial t^r}, \quad m=0,1,\ldots, 2n.$$

Из (2.11) следует, что $\psi_m^{(r)}(t,t)= \tilde{\psi}_m^{(r)}(t,t)$, $m = 0,\ldots,2n$; $r=0,\ldots,k-1$. Поэтому

$$D^{(r)}(x_i+th)= \sum_{m=0}^{2n} d_{i+1,m+1}^{(r)}(t), \ i= 0,1,\ldots,N-1,$$

где

$$d_{i+1,m+1}^{(r)}= \frac{h^{k-r+1}}{k!}\left[\int_0^1\psi_m^{(r)}(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{i-n+m}+\tau h)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^1 \tilde{\psi}_m^{(r)}(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{i-n+m}+\tau h)d\tau\right].$$

Отсюда и из (2.20) нетрудно получить

$$R^{(r)}(x_0+th)=\frac{h^{k-r+1}}{k!}\left\{\int_0^t P_0^{(r)}(t,\tau)f^{(k+1)}(x_0+\tau h)d\tau+\right.$$

$$+\int_t^1 \tilde{P}_0^{(r)}(t,\tau)f^{(k+1)}(x_0+\tau h)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^1 P_i^{(r)}(t,\tau)f^{(k+1)}(x_{N-i}+\tau h)d\tau\right\}. \quad (2,26)$$

Далее, повторив все рассуждения, проделанные при $r = 0$, получаем утверждение теоремы для всех $r = 0,1,\ldots,k$; $k=0,1,\ldots,2n+1$.

СЛЕДСТВИЕ. *При выполнении условий теоремы 1 справедливы следующие асимптотически точные оценки:*

$$\| S_{2n+1}^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty \le C_{n,k,r}\frac{h^{k-r+1}}{k!}\|f^{(k+1)}\|_\infty ,$$
$$r = 0,1,\ldots,k,$$

где $C_{n,k,r} = \max\limits_{t\in[0,1]} C_{n,k,r}(t)$.

§3. Алгоритм получения точных констант в оценках погрешности приближения функций класса C^{2n+1}

В предположении, что $f(x)\in W_\infty^{2n+1} \supset C^{2n+1}$, рассмотрим равенство (2.26), в котором функции $P_0(t,\tau), P_i(t,\tau)$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, определяются формулами (2.17) - (2.19) при $k = 2n$. Справедлива

ЛЕММА. *Для* $t\in[0,1]$ *выполняются тождества*

$$\int_0^t P_0^{(r)}(t,\tau)d\tau + \int_t^1 \tilde{P}_0^{(r)}(t,\tau)d\tau = 0 ,$$

$$\int_0^1 P_i^{(r)}(t,\tau)d\tau = 0, \quad i=1,2,\dots, N-1 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.11) следует

$$\tilde{\varphi}_0^{(r)}(t,\tau) = \psi_0^{(r)}(t,\tau) + \frac{(2n)!}{(2n-r)!} b_0(0)(t-\tau)^{2n-r},$$

$$\tilde{Q}_l(t,\tau) = Q_l(t,\tau), \quad l = 1,2,\dots, 2n .$$

Отсюда

$$P_0^{(r)}(t,\tau) = \sum_{l=1}^{2n} a_l Q_l^{(r)}(t,\tau) + \psi_0^{(r)}(t,\tau) + \frac{(2n)!}{(2n-r)!}(t-\tau)^{2n-r}.$$

Так как

$$\int_0^1 \psi_0^{(r)}(t,\tau)d\tau + \frac{(2n)!}{(2n-r)!}\int_t^1 (t-\tau)^{2n-r}d\tau = 0,$$

то первое равенство леммы преобразуется к виду

$$\int_0^1 \sum_{l=1}^{2n} a_l Q_l^{(r)}(t,\tau)d\tau = 0 .$$

Итак, вычисление интегралов в лемме сводится к вычислению интегралов от функций $\psi_m^{(r)}(t,\tau)$. При $m = 0,1,\dots,n$ имеем

$$\psi_m^{(r)}(t,\tau) = (-1)^{r+1}\left[\frac{(2n+1)!}{(2n+1-r)!}\sum_{j=0}^{m}(\tau-j+m)^{2n} \times\right.$$

$$\times \sum_{s=0}^{j} (-1)^s C_{2n+2}^s (1+j-s-t)^{2n+1-r} -$$

$$- \frac{(2n)!}{(2n-r)!} \sum_{j=0}^{m} b_j(1)(1+\tau-j+m-t)^{2n-r} \Bigg] =$$

$$= (-1)^{r+1} \Bigg[\frac{(2n+1)!}{(2n+1-r)!} \sum_{j=0}^{m} (1+j-t)^{2n+1-r} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m-j} (-1)^s C_{2n+2}^s (m-j-s+\tau)^{2n} -$$

$$- \frac{(2n)!}{(2n-r)!} \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}(1)(\tau+j+1-t)^{2n-r} \Bigg].$$

Поэтому при $m = 0,1,\ldots,n$

$$\int_0^1 \varphi_m^{(r)}(t,\tau)d\tau = (-1)^{r+1} \frac{(2n)!}{(2n+1-r)!} \Big\{ (1-t)^{2n+1-r} b_m(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (1+j-t)^{2n+1-r} [b_{m-j}(0) - b_{m-j}(1)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (1+j-t)^{2n+1-r} [b_{m-j}(1) - b_{m-j+1}(1)] \Big\} =$$

$$= (-1)^{r+1} \frac{(2n)!}{(2n+1-r)!} b_m(0)(1-t)^{2n+1-r}.$$

Для $m = n+1, n+2, \ldots, 2n$

$$\int_0^1 \varphi_m^{(r)}(t,\tau)d\tau = (-1)^{2n+1-r} \int_0^1 \varphi_{2n-m}^{(r)}(1-t,1-\tau)d\tau -$$

$$-\frac{(2n)!}{(2n-r)!}\int_0^1(t-\tau)^{2n-r}\,d\tau=\frac{(2n)!}{(2n+1-r)!}[b_m(0)t^{2n+1-r}+$$

$$+b_m(0)(t-1)^{2n+1-r}-b_m(0)t^{2n+1-r}]=$$

$$=(-1)^{r+1}\frac{(2n)!}{(2n+1-r)!}b_m(0)(1-t)^{2n+1-r}.$$

В результате

$$\int_0^1 Q_1^{(r)}(t,\tau)d\tau=$$

$$=\sum_{m=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n+1-r)!}(-1)^{2n+1-r}b_m(0)(1-t)^{2n+1-r}\omega_1^m=$$

$$=(-1)^{2n+1-r}\frac{(2n)!}{(2n+1-r)!}P_n(\omega_1)=0,$$

и тем самым доказана лемма.

Функции $f(x)\in C^{2n+1}$ будем характеризовать их колебанием на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ [1]:

$$\omega_i(f)=\max_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x'')-f(x')|.$$

Обозначим $\omega(f)=\max\limits_{0\le i\le N-1}\omega_i(f)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $S_{2n+1}(x)$ *интерполирует* $(b-a)$-*периодическую функцию* $f(x)\in C^{2n+1}[a,b]$ *в узлах сетки* Δ_N, *то имеют место неулучшаемые в каждой точке* $t\in[0,1]$ *асимптотические оценки*

$$|S_{2n+1}^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|\le\frac{1}{2}C_{n,2n,r}(t)\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\omega(f^{(2n+1)}),\quad(3.1)$$

где $C_{n,2n,r}(t)$ *определены формулой* (2.8) *при* $k=2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $t\in[0,1]$. В общем случае подынтегральные функции в (2.26) имеют корни. Пусть $\tilde\tau_{0,j}(t), j=1,2,\dots,\tilde m_0$; $\tau_{i,j}(t), i=0,1,\dots,N-1$; $j=1,2,\dots,m_i$, - корни, а $\tilde m_0$, m_i - число корней полиномов $\tilde P_0(t,\tau)$ при $\tau\in[t,1]$, $P_0(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$ и $P_i(t,\tau)$, $i=1,2,\dots,N-1$, $\tau\in[0,1]$. Очевидно, что $\tilde m_0\le 2n$, $m_i\le 2n$. Введем также величины $\tilde\tau_{0,0}=t$, $\tilde\tau_{0,\tilde m_0+1}=1$; $\tau_{i,0}=0$, $i=0,1,\dots,N-1$; $\tau_{0,m_0+1}=t$, $\tau_{i,m_i+1}(t)=1$, $i=1,2,\dots,N-1$.

Представим теперь (2.26) в виде

$$R^{(r)}(x_0+th)=$$

$$=\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\Bigg\{\sum_{j=0}^{m_0}\int_{\tau_{0,j}(t)}^{\tau_{0,j+1}(t)}P_0^{(r)}(t,\tau)f^{(2n+1)}(x_0+\tau h)d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{\tilde m_0}\int_{\tilde\tau_{0,j}(t)}^{\tilde\tau_{0,j+1}(t)}\tilde P_0^{(r)}(t,\tau)f^{(2n+1)}(x_0+\tau h)d\tau\ +$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{m_i}\int_{\tau_{i,j}(t)}^{\tau_{i,j+1}(t)}P_i^{(r)}(t,\tau)f^{(2n+1)}(x_{N-i}+\tau h)d\tau\Bigg\}.$$

Далее, рассуждая так же, как в [1, гл. II, §11], после применения теорем о среднем для интегралов и непрерывных функций получаем

$$R^{(r)}(x_0+th) =$$

$$= \frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\{A_0(t)f^{(2n+1)}(\xi_0)+B_0(t)f^{(2n+1)}(\eta_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}[A_i(t)f^{(2n+1)}(\xi_{N-i})+B_i(t)f^{(2n+1)}(\eta_{N-i})]\},$$

где

$$A_0(t)=\sum_j{}^{+}\int_{\tau_{0,j}(t)}^{\tau_{0,j+1}(t)} P_0^{(r)}(t,\tau)d\tau+$$

$$+\sum_j{}^{+}\int_{\tilde\tau_{0,j}(t)}^{\tilde\tau_{0,j+1}(t)} \tilde P_0^{(r)}(t,\tau)d\tau,$$

$$B_0(t)=\sum_j{}^{-}\int_{\tau_{0,j}(t)}^{\tau_{0,j+1}(t)} P_0^{(r)}(t,\tau)d\tau+$$

$$+\sum_j{}^{-}\int_{\tilde\tau_{0,j}(t)}^{\tilde\tau_{0,j+1}(t)} \tilde P_0^{(r)}(t,\tau)d\tau,$$

$$A_i(t)=\sum_j{}^{+}\int_{\tau_{i,j}(t)}^{\tau_{i,j+1}(t)} P_i^{(r)}(t,\tau)d\tau,$$

$$B_i(t)=\sum_j^- \int\limits_{\tau_{i,j}(t)}^{\tau_{i,j+1}(t)} P_i^{(r)}(t,\tau)d\tau,\ i=1,\ldots,N-1.$$

$$\xi_i,\eta_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\ldots,N-1.$$

Символы $\sum_j^+,\sum_j^-$ обозначают суммы интегралов соответст - венно с положительными и отрицательными подынтегральными выра- жениями. Согласно лемме

$$A_0(t)=-B_0(t)=\frac{1}{2}\left[\int_0^t|P_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau+\int_t^1|\tilde{P}_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau\right],$$

$$A_i(t)=-B_i(t)=\frac{1}{2}\int_0^1|P_i^{(r)}(t,\tau)|d\tau.$$

Поэтому

$$|R^{(r)}(x_i+th)|\le\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}[A_0(t)\omega_0(f^{(2n+1)})+$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}A_i(t)\omega_{N-i}(f^{(2n+1)})]\le\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\omega(f^{(2n+1)})\sum_{i=0}^{N-1}A_i(t),$$

что приводит к оценке

$$|R^{(r)}(x_i+th)|\le\frac{1}{2}C_{n,2n,r}(N;t)\,\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\,\omega(f^{(2n+1)}),$$

где $C_{n,2n,r}(N;t)$ определяются формулами (2.27) при $k=2n$.

Полученная оценка является точной поточечной оценкой. Да - лее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы : по- лучаем асимптотически точную оценку (3.1).

СЛЕДСТВИЕ. *При выполнении условий теоремы 2, справедливы следующие асимптотически точные оценки*

$$\|S^{(r)}_{2n+1}(x)-f^{(r)}(x)\|_C\leq\frac{1}{2}\,C_{n,2n,r}\,\frac{h^{2n+1-r}}{(2n)!}\omega(f^{(2n+1)}),$$

$$r=0,\ldots,k,$$

где $C_{n,2n,r}=\max\limits_{t\in[0,1]}C_{n,2n,r}(t)$.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. КОРНЕЙЧУК Н.П. Сплайны в теории приближений. - М.: Наука, 1985. - 350 с.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции //Методы сплайн-функций. - Новосибирск. - 1975. - Вып. 65: Вычислительные системы. - С. 29-49.

4. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives //J. Inst. Math. Appl. - 1971. - Vol. 7, N 3. - P. 398-406.

5. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.

6. СОБОЛЕВ С.Л. О корнях многочленов Эйлера //ДАН СССР.-1977.-Т. 235, № 2. - С. 277-280.

Поступила в ред.-изд.отд.

13 октября 1988 года