АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.652

О ФОРМУЛАХ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ, ТОЧНЫХ НА КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНАХ

Ю.С. Завьялов

Локальная аппроксимация сплайнами степени n класса C^{n-1} [1-4] получила распространение по двум причинам. Первое - это простота построения аппроксимационного сплайна, где не требуется решать систем уравнений, как это имеет место при интерполяции. Второе - ее можно безбоязненно применять в случаях, когда исходные данные получены с погрешностями, которые для интерполяционных сплайнов приводят к неприятным осцилляциям. В этих случаях задачи "глобального" сглаживания (при n нечетных) путем минимизации среднеквадратических уклонений с регуляризацией, как и задачи интерполяции, сводятся к решению систем уравнений.

Локально-аппроксимационные сплайны рассматриваются на отрезке $[a,b]$ с сеткой Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, дополненной слева и справа n узлами $x_{-n} < \ldots < x_0$, $x_N < x_{N+1} < \ldots < x_{N+n}$. Тогда их можно представлять через базисные B-сплайны в виде

$$S_n(f;x) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i(f) B_n^i(x). \qquad (1)$$

(В периодическом случае суммирование ведется по $i = 1,\ldots,N$.)

Каждый сплайн $B_n^i(x)$ отличен от нуля на интервале-носителе (x_i, x_{i+n+1}). Коэффициенты $b_i(f)$ суть линейные непрерывные функционалы, действующие в пространстве $R[a,b]$ ограниченных вещественнозначных функций и определяемые через значения аппроксимируемой функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+n+1}]$.

Чаще всего на практике используются формулы локальной аппроксимации, точные на многочленах $P_l(x)$ степени не выше $l \le n$, т.е. $S_n(P_l; x) = P_l(x)$. Для этого функционалы в (1) должны быть такими, чтобы разложение правой части (1) по формуле Тейлора в точке x совпадало с $f(x)$ с точностью до малых порядка $O(H^l)$ включительно, где $H = \max\limits_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Это сравнительно просто достигается, если $b_i(f)$ суть линейные комбинации производных аппроксимируемой функции $f^{(p)}(\tau_i)$, $p = 0, \ldots, l$, в некоторой точке $\tau_i \in [x_i, x_{i+n+1}]$ [1,2,4] или ее разделенных разностей $f[\tau_{i0}, \ldots, \tau_{ip}]$ [1,3]. При $l = n$ в первом случае формулы автоматически точны на сплайнах $\bar{S}_n(x)$ степени n с той же сеткой узлов Δ, что и сплайн (1), во втором - это имеет место при специальном выборе аргументов разделенных разностей $\tau_{i0}, \ldots, \tau_{ip}$. Во всех этих случаях порядок приближения функций из класса W_∞^{n+1} есть $O(H^{n+1})$, т.е. максимально возможный для многочленов и сплайнов степени n.

Однако, как было установлено для сплайнов невысоких степеней ($n=2,3$), абсолютная величина погрешности оказывается существенно большей, чем, например, для интерполяционных сплайнов. Поэтому возникла идея добавлять в представления функционалов $b_i(f)$ дополнительные слагаемые порядка $O(H^{n+1})$, чтобы уменьшить погрешность, особенно если исходные данные достаточно точные.

В [3,5] таким способом были получены асимптотические наилучшие равномерные и среднеквадратические приближения сплайнами, погрешность приближения которых отличается от наилучших на малые порядка $O(H^{n+2})$.

В [6] были предложены формулы, точные на многочленах степени $l>n$ по заданной системе функционалов g_i , что означает $g_i[S_n(P_l)]=g_i(P_l), i=-n,\dots,N-1$. В частности, был рассмотрен случай, когда эти равенства являлись условиями интерполяции: $S_n(P_l;x_i) = P_l(x_i)$. В дополнение к этим результатам в [7] выведены формулы, интерполирующие тригонометрические и экспоненциальные функции.

В [8] рассматривались формулы с разделенными разностями, точные на многочленах степени n . Показано, что если все аргументы $\tau_{i0},\dots,\tau_{ip}$ разделенных разностей принадлежат только одному отрезку $[x_j,x_{j+1}]\subset[x_i,x_{i+n+1}]$, то эти формулы точны и на сплайнах $\bar{S}_n(x)$ с той же сеткой узлов Δ . Если же они принадлежат "двойному" отрезку $[x_j,x_{j+2}]\subset[x_i,x_{i+n+1}]$, то для сохранения этого свойства в выражения для коэффициентов $b_i(f)$ следует добавить слагаемое с $(n+1)$-й разделенной разностью от усеченной степенной функции $(x-x_{j+1})_+^n$ с добавочным аргументом $\tau_{i,n+1}\in[x_j,x_{j+2}]$. Эта разность пропорциональна значению ненормализованного В-сплайна, вычисленного в точке x_{j+1} из интервала, содержащего $\tau_{i0},\dots$ $\dots,\tau_{i,n+1}$, и потому отлична от нуля.

Рассмотрен пример кубических сплайнов [5,8], где принималось $\tau_{i0}=x_{i+1}$, $\tau_{i1}=(x_{i+1}+x_{i+2})/2$, $\tau_{i2}=x_{i+2}$, $\tau_{i3}=$ $=(x_{i+2}+x_{i+3})/2$, $\tau_{i4}=x_{i+3}$, т.е. использовались значения функции в $2N+1$ точках отрезка $[a,b]$. Такие формулы были названы однородно-минимальными в том смысле, что с меньшим объемом данных нельзя построить формулы, точные на сплайнах $\bar{S}_3(x)$ с сеткой Δ при выборе аргументов из "двойного" отрезка $[x_{i+1},x_{i+3}]$. Расширение отрезка, например, до $[x_i,x_{i+4}]$ требует использования разделенных разностей более высокого порядка. И хотя здесь достаточный объем данных $3N/2$, но зато в общем случае не гарантировано существование отличных от нуля разделенных разностей высших порядков.

Во всех приведенных конструкциях локально-аппроксимационных сплайнов удавалось существенно понизить абсолютное значение погрешности приближения.

В настоящей работе получены формулы, точные на сплайнах $\bar{S}_3(x)$, узлами которых являются не все точки сетки Δ, а лишь некоторые из них. При этом используются значения функции только в узлах сетки. Идея алгоритма построения таких формул высказана В.Л.Мирошниченко. Формулы, точные на сплайнах, следует применять, например, когда известно, что аппроксимируемая функция имеет непрерывные вторые производные всюду на отрезке, за исключением отдельных его точек, которые и должны быть взяты в качестве узлов сплайна $\bar{S}_3(x)$.

<u>Формулы аппроксимации, точные на кубических многочленах.</u> Будем обозначать для краткости $S_3(x) = S(x)$ и В-сплайны нумеровать по их средним узлам x_{i+2}, т.е. $B_3^i(x) = B_{i+2}(x)$. Тогда формулу (1) при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ можно переписать в виде

$$S(f;x) = \sum_{r=-1}^{2} b_{i+r}(f) B_{i+r}(x), \quad i = 0,\dots,N-1. \tag{2}$$

Для функционалов $b_{i+r}(f)$ возьмем формулы [4]:

$$b_{-1} = f_0 - \frac{1}{3}(h_{-2}+2h_{-1})f_0' + \frac{1}{6}h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})f_0'', \tag{3а}$$

$$b_i = f_i + \frac{1}{3}(h_i - h_{i-1})f_i' - \frac{1}{6}h_i h_{i-1} f_i'', \quad i = 0,\dots,N, \tag{3б}$$

$$b_{N+1} = f_N + \frac{1}{3}(2h_N + h_{N+1})f_N' + \frac{1}{6}h_N(h_N + h_{N+1})f_N'', \tag{3в}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, являющиеся частным случаем формул работы [1] и точные на кубических многочленах и сплайнах.

Формулы с разделенными разностями, точные на многочленах, получаются отсюда, если вместо производных $f_i^{(p)}$, $p = 0,1,2$, взять производные интерполяционного многочлена Ньютона третьей степени, построенного по узлам $x_{i-2},\dots,x_{i+1}$ или $x_{i-1},\dots,x_{i+2}$. Тогда получаем [4]

$$b_i^0 = f_i + \frac{1}{3}\,(h_i\lambda_i f[x_{i-1},x_i] - h_i\mu_i f[x_i,x_{i+1}], \quad (4б)$$

$$i = 1,\dots, N-1,$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$. Для граничных узлов x_0, x_1, x_2 используется один и тот же интерполяционный многочлен по узлам $x_0,\dots,x_3$, что равносильно интерполяции сплайном значений f_0 и f_1 . Аналогично обстоит дело с f_{N-1}, f_N . Имеем

$$b_{i-1}^0 = B_{i-1}^{-1}(x_i)[f_i - b_iB_i(x_i) - b_{i+1}B_{i+1}(x_i)],$$
$$i = 1,0, \quad (4а)$$

$$b_{i+1}^0 = B_{i+1}^{-1}(x_i)[f_i - b_iB_i(x_i) - b_{i-1}B_{i-1}(x_i)],$$
$$i = N-1, N. \quad (4в)$$

Оценим качество аппроксимации сплайнами (2), ограничиваясь рассмотрением их асимптотических разложений в случае равномерной сетки Δ $(h_i = h = \mathrm{const}, \lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2})$ для функций $f(x) \in W_\infty^6$. Для этого преобразуем (4б) к виду

$$b_i^0 = f_i - \frac{h^2}{3} f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]. \quad (5)$$

Так как $f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{1}{2} f_i'' + \frac{h^2}{24} f_i^{IV} + O(h^4)$, то

$$b_i^0 = f_i - \frac{h^2}{6} f_i'' - \frac{h^4}{72} f_i^{IV} + O(h^6). \quad (6)$$

В формуле (2) коэффициенты b^0_{i+r}, представленные в виде (6), разложим по формуле Тейлора с остаточным членом порядка $O(h^6)$. Учитывая еще, что при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$B_{i-1}(x) = \frac{1}{6}(1-t)^3,$$

$$B_i(x) = \frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3),$$

$$B_{i+1}(x) = \frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3),$$

$$B_{i+2}(x) = \frac{1}{6}t^3,$$

из (2) получаем

$$S(f;x) = f(x) - [\beta_4(t) + \frac{7}{10}] \frac{h^4 f^{IV}(x)}{4!} + $$

$$+ 4\beta_5(t) \frac{h^5 f^V(x)}{5!} + O(h^6), \qquad (7)$$

где $t = (x-x_i)/h$, $\beta_4(t)$ и $\beta_5(t)$ - многочлены Бернулли:

$$\beta_4(t) = t^2(1-t)^2 - \frac{1}{30},$$

$$\beta_5(t) = \frac{1}{2} t(1-t)(1-2t)(t^2-t-\frac{1}{3}).$$

В периодическом случае формула (7) справедлива для всех отрезков $[x_i, x_{i+1}] \subset [a,b]$, а в непериодическом только на $[x_2, x_{N-2}]$. Чтобы у нее сохранялись два первых члена справа для $[x_0, x_2]$, следует вычислять b_{-1}, b_0 по формулам (5), предварительно определив f_{-1}, f_{-2} путем экстраполяции многочленом четвертой степени. Аналогично находятся b_N и b_{N+1}.

Коэффициент при главном члене погрешности в (7) не превосходит по модулю $\frac{35}{48}$. Для интерполяционного сплайна он существенно меньше и равен $\beta_4(t) + \frac{1}{30} \leq \frac{1}{16}$ [3].

Формулы аппроксимации, точные на кубических сплайнах. Пусть на сетке Δ заданы значения f_i кубического сплайна $\bar{S}(x_i)$ с узлами в некоторых ее точках. Пусть точки $x_i, \ldots, x_{i+r}$ суть узлы сплайна, а точки x_{i-1} и x_{i+r+1} ими не являются. Сплайн должен интерполировать значения $f_{i-2}, \ldots, f_{i+r+2}$. При его восстановлении мы находимся в условиях задачи интерполяции при $r+5$ узлах с граничными условиями типа IV [3], заключающимися в том, что разрывы третьих производных сплайна в точках x_{i-1} и x_{i+r+1} отсутствуют, т.е. $\bar{S}'''(x_{i-1}-0) = \bar{S}'''(x_{i-1}+0)$, $\bar{S}'''(x_{i+r+1}-0) = \bar{S}'''(x_{i+r+1}+0)$.

Так как при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\bar{S}'''(x) = (M_{i+1}-M_i)/h$, где $M_j = \bar{S}''(x_j)$, то эти условия вместе с условиями гладкости сплайна дают систему уравнений [3]:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_{i-1}M_{i-2} - M_{i-1} + \mu_{i-1}M_i = 0, \\
&\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad j = i-1, \ldots, i+r+1, \\
&\lambda_{j+r+1}M_{j+r} - M_{j+r+1} + \mu_{j+r+1}M_{j+r+2} = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

После определения M_j величины $m_j = S'(x_j)$ находятся по формулам

$$m_j = f[x_j, x_{j+1}] - \frac{h_j}{6}[2M_j + M_{j+1}], \quad j = i, \ldots, i+r. \tag{9}$$

Подставляя в (3б) вместо f'_j и f''_j величины m_j и M_j, находим коэффициенты

$$b_j = f_j + \frac{1}{3}(h_j - h_{j-1})m_j - \frac{1}{6} h_j h_{j-1} M_j, j=i,\dots,i+r, \quad (10)$$

соответствующие точкам x_j, являющимся узлами сплайна $\bar{S}(x)$. Коэффициенты для остальных индексов i вычисляются по формулам (4).

Рассмотрим частные случаи.

Изолированный узел $(r=0)$ сплайна $\bar{S}(x)$. Пусть это будет точка x_i. Система (8) содержит пять уравнений. Из первых трех исключаются M_{i-2} и M_{i-1}, а из двух последних - M_{i+2}. В результате получается система

$$3\mu_i M_i + (1+\lambda_{i-1})\lambda_i(2M_i + M_{i+1}) = 6\{-\lambda_{i-1}\mu_i f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] + (1+\lambda_{i-1}) f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]\}, \quad (11)$$

$$3M_i - (1+\mu_{i+1})(2M_i + M_{i+1}) = -6\mu_{i+1} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]. \quad (12)$$

Отсюда

$$M_i = 2D_i^{-1}\{-\lambda_{i-1}\mu_i(1+\mu_{i+1}) f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] + (1+\lambda_{i-1})(1+\mu_{i+1}) f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] - \lambda_i\mu_{i+1}(1+\lambda_{i-1}) f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]\}, \quad (13)$$

где $D_i = 1 + \lambda_{i-1}\lambda_i + \mu_i\mu_{i+1}$, и

$$2M_i + M_{i+1} = 6D_i^{-1}\{-\lambda_{i-1}\mu_i f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] + (1+\lambda_{i-1}) f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] + \mu_i\mu_{i+1} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}].$$

Наконец, по формуле (9) находим

$$m_i = D_i^{-1}\{-\lambda_{i-1}^2\lambda_i f[x_{i-2}, x_{i-1}] + \lambda_i(1+\lambda_{i-1}+\lambda_{i-1}^2) f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i(1+\mu_{i+1}+\mu_{i+1}^2) f[x_i, x_{i+1}] -$$

$$- \mu_i \mu_{i+1}^2 f[x_{i+1}\ x_{i+2}]. \qquad (14)$$

Значение коэффициента b_i находится по формулам (10), (13) и (14).

Два смежных узла $(r=1)$ сплайна $\bar{S}(x)$. Пусть это будут точки x_i и x_{i+1}. Система (8) содержит шесть уравнений. Из трех первых, как и в предыдущем случае, получаем уравнение (11). Вместо (12) из трех последних уравнений находим

$$3(1+\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}\mu_{i+2})M_i-(2+\lambda_{i+1}+2\mu_{i+1}\mu_{i+2})(2M_i+M_{i+1})=$$
$$= 6\{-(1+\mu_{i+2})f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] +$$
$$+ \lambda_{i+1}\mu_{i+2}f[x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]\}. \qquad (15)$$

Из (11) и (15) находим

$$M_i=2G_i^{-1}\{(2+\lambda_{i+1}+2\mu_{i+1}\mu_{i+2})(-\lambda_{i-1}\mu_i f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]+$$
$$+(1+\lambda_{i-1})f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]) +$$
$$+ (1+\lambda_{i-1})\lambda_i(-(1+\mu_{i+2})f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] +$$
$$+ \lambda_{i+1}\mu_{i+2}f[x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]))\}, \qquad (16)$$

где $G_i=(1+\lambda_{i-1}\lambda_i)(1+\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}\mu_{i+2})+\mu_i(1+\mu_{i+1}\mu_{i+2})$ и

$$2M_i + M_{i+1} =$$
$$=6G_i^{-1}\{(1+\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}\mu_{i+2})(-\lambda_{i-1}\mu_i f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]+$$
$$+(1+\lambda_{i-1})f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}])+\mu_i((1+\mu_{i+2})f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]-$$
$$- \lambda_{i+1}\mu_{i+2}f[x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}])\}.$$

По формуле (9) определяем

$$m_i= G_i^{-1}\{\lambda_i(1+\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}\mu_{i+2})(-\lambda_{i-1}^2 f[x_{i-2},x_{i-1}]+$$
$$+(1+\lambda_{i-1}+\lambda_{i-1}^2)f[x_{i-1},x_i])+3\mu_i(1+\mu_{i+1}\mu_{i+2})f[x_i,x_{i+1}]+$$

$$+\mu_i\mu_{i+1}(-(1+\mu_{i+2}+\mu_{i+2}^2)f[x_{i+1},x_{i+2}]+$$

$$+\mu_{i+2}^2 f[x_{i+2},x_{i+3}]\}. \qquad (17)$$

Значение коэффициента b_i вычисляется по формулам (10), (16) и (17).

В силу симметрии в уравнениях (8) значения M_{i+1} и m_{i+1} получаются из (16) и (17), если в последних произвести замены аргументов в разделенных разностях: $x_{i-j} \to x_{i+j+1}$, $j = 0,\pm1,\pm2,\pm3$, и замены в коэффициентах: $\lambda_{i-j} \to \mu_{i+j+1}$, $\mu_{i-j} \to \lambda_{i+j+1}$, $j = 0,\pm1,\pm2$. После этого значение b_{i+1} находится по формуле (10).

Итак, если точка $x_i \in \Delta$ не является узлом сплайна $\bar{S}(x)$, то b_i вычисляется по формуле (4б). Если является, то b_i находится по формулам (10), (13) и (14), если узел изолированный, и (10), (16) и (17), если он смежный с другим узлом. Коэффициенты b_i при $i = -1,0,N,N+1$ вычисляются по формулам (4а) и (4в).

Случай равномерной сетки. Асимптотические формулы. Если сетка Δ равномерная, то для вычисления b_i по формуле (10) достаточно иметь значения M_i. В случае изолированного узла сплайна $\bar{S}(x)$ из (13) после упрощений и преобразований получаем выражение M_i через вторую и четвертую разделенные разности $M_i=2f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]-6h^2f[x_{i-2},\dots,x_{i+2}]$. Подставляя это значение в (10), находим

$$b_i = b_i^0 + h^4 f[x_{i-2},\dots,x_{i+2}], \qquad (18)$$

где b_i^0 определяется формулой (5) и соответствует формулам, точным на кубических многочленах. К нему добавляется слагаемое порядка $O(h^4)$.

В (18) четвертую разделенную разность с точностью до $O(h^2)$ можно заменить на $f_i^{IV}/4!$. Тогда получаем

$$b_i = b_i^0 + \frac{h^4}{4!} f_i^{IV},$$

где b_i^0 есть разложение (6).

Это выражение подставляется в (2). Поскольку коэффициент b_i отличается от b_i^0 на малую порядка $O(h^4)$, то асимп- тотическое разложение сплайна (2) будет отличаться от (7) только коэффициентами при h^4 и h^5. Так как при $x \in$ $\in [x_i, x_{i+1}]$

$$f_i^{IV} = f^{IV}(x) - thf^{V}(x) + O(h^2), \tag{19}$$

то в (7) добавится выражение $B_i(x)[f^{IV}(x) - thf^V(x)]h^4/4!$. В результате получаем

$$S(f;x) = f(x) + \gamma_4(t)\frac{h^4 f^{IV}(x)}{4!} + \gamma_5(t)\frac{h^5 f^V(x)}{5!} + O(h^6), \tag{20}$$

где

$$\gamma_4(t) = -t^2\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 2\right),$$

$$\gamma_5(t) = t\left(4t^4 - \frac{25}{2}t^3 + \frac{35}{3}t^2 - 4\right).$$

При $t = 0$ имеем $\gamma_4(0) = \gamma_5(0) = 0$ и $S(f;x_i) = f_i + O(h^6)$. Это так называемые точки <u>квазиинтерполяции</u> [1, 3]. При $t \in [0,1]$ оценка коэффициента при главном члене погрешности есть $|\gamma_4(t)| \le \frac{1}{2}$, что примерно в полтора раза меньше $\frac{35}{48}$ в оценке для формул, точных на многочленах (7). При $x \in [x_{i-1}, x_i]$ картина аналогичная. На отрезках, удаленных от точки x_i, коэффициент погрешности будет возрастать до $\frac{35}{48}$.

В случае двух смежных узлов сплайна $\bar{S}(x)$ из (16) после упрощений и преобразований находим

$$M_i = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] - \frac{24}{5} h^2 f[x_{i-2}, \ldots, x_{i+2}] +$$
$$+ 8h^3 f[x_{i-2}, \ldots, x_{i+3}] \; .$$

Подставляя это значение в (3б) вместо f_i'' , получаем

$$b_i = b_i^0 + \frac{4}{5} h^4 f[x_{i-2}, \ldots, x_{i+2}] - \frac{4}{3} h^5 f[x_{i-2}, \ldots, x_{i+3}], \quad (21)$$

где b_i^0 определяется формулой (5).

В (21) четвертые и пятые разделенные разности с точностью до $O(h^6)$ можно заменить значениями $\frac{f_i^{1V}}{4!}$ и $\frac{f_i^V}{5!}$. Тогда получаем

$$b_i = b_i^0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{h^4}{4!} f_i^{1V} - \frac{4}{3} \cdot \frac{h^5}{5!} f^V, \quad (22)$$

где b_i^0 есть разложение (6). В силу симметрии выражение для b_{i+1} будет иметь такую же форму, только знак при h^5 (нечетная степень) нужно сменить на противоположный. Получаем

$$b_{i+1} = b_{i+1}^0 + \frac{4}{5} \cdot \frac{h^4}{4!} f_{i+1}^{1V} + \frac{4}{3} \cdot \frac{h^5}{5!} f_{i+1}^V \; . \quad (23)$$

Выражения b_i и b_{i+1} подставляются в (2). При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеют место разложения (19) и

$$f_{i+1}^{1V} = f^{1V}(x) + (1-t)hf^V(x) + O(h^2),$$

$$f_i^V = f^V(x) + O(h),$$

$$f_{i+1}^V = f^V(x) + O(h).$$

За счет дополнительных слагаемых в (22) и (23) в разложении (7) в коэффициенты при $\dfrac{h^4 f^{IV}(x)}{4!}$ и $\dfrac{h^5 f^{V}(x)}{5!}$ добавляются соответственно выражения

$$\frac{4}{5}\,[B_i(x)+B_{i+1}(x)]=\frac{2}{5}\,t(1-t)+\frac{2}{3},$$

$$\frac{4}{3}\,[-(3t+1)B_i(x)+(4-3t)B_{i+1}(x)]=-\frac{1}{2}\,t(1-t)(1-2t).$$

Вследствие этого в асимптотической формуле (20) получаем

$$\gamma_4(t)=t(1-t)\left(\frac{2}{5}-t+t^2\right),$$

$$\gamma_5(t)=\frac{1}{2}\,t(1-t)(1-2t)\left(t^2-t-\frac{4}{3}\right).$$

Здесь две точки квазиинтерполяции $t=0$ и $t=1$. Оценка коэффициента при главном члене погрешности есть $|\gamma_4(t)|\leq \leq \frac{1}{25}$. Это значение даже меньше, чем при интерполяции, где константа равна $\frac{1}{16}$.

Пользуясь изложенной методикой, читатель без труда может вывести асимптотические разложения для других отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и иных конфигураций узлов сплайна $\bar{S}(x)$ на сетке Δ.

Дифференцируя выражение (20) по x, можно получить асимптотические формулы для производных аппроксимационного сплайна до третьего порядка включительно. При этом полезно использовать свойство многочленов Бернулли: $\beta'_\nu(t)=\nu\beta_{\nu-1}(t)$.

Литература

1. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам. -М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

2. LYCHE T., SCHUMAKER L.L. Local spline approximation methods //J.Approxim. Theory. - 1975. - Vol. 15, N 4. -P. 294-325.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

4. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами //Проблемы обработки информации. - Новосибирск. - 1983. - Вып. 100: Вычислительные системы. - С. 83-100.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ШУМИЛОВ Б.М. Локальная аппроксимация и наилучшее равномерное приближение сплайнами //Теория приближения функций. Тр. Международной конф. по теории приближения функций, Киев, 31 мая-5 июня 1983 г. - М., 1987. - С. 168-171.

6. ШУМИЛОВ Б.М. Локальная аппроксимация сплайнами, точная на многочленах по заданной системе функционалов //Методы сплайн-функций. - Новосибирск. - 1981. - Вып. 87: Вычислительные системы. - С. 25-43.

7. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Локальная аппроксимация кубическими сплайнами с элементами интерполяции //Аппроксимация сплайнами. -Новосибирск. - 1987. -Вып. 121: Вычислительные системы. -С.46-52.

8. ШУМИЛОВ Б.М. Локальная аппроксимация сплайнами: формулы, точные на сплайнах. - Новосибирск, 1981. - 24 с. (Препринт ВЦ СО АН СССР, № 86).

Поступила в ред.-изд.отд.

26 сентября 1988 года