АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1988 год Выпуск 128

УДК 519.65

# О ФОРМУЛАХ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Имамов, Б. Эргашев

Настоящая статья, в которой строятся два класса формул интерполирования функций многих переменных, является продолжением работ [1,2].

Пусть в ограниченной области $\Omega$ евклидова пространства $R^n$ заданы множество точек $\{a_i, i=0,1,\dots,N;\ a_i \neq a_k, i\neq k\}$ и значения $\{x(a_i)\}$ некоторой функции $x=x(t)$, определенной в $\Omega$. Требуется найти функцию $I_N(x;t)$ такую, что $I_N(x;a_i) = x(a_i)$, $i=0,1,\dots,N$.

Решение этой задачи представляется в виде цепных дробей:

$$I2_N(x;t) = x(a_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{[\psi(t)-\psi(a_{k-1})]\,|}{|\,[\check{x}_\psi^{(k)}(a_0,\dots,a_k)]},$$

$$I3_N(x;t) = x(a_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{[\psi(t-a_{k-1})]\,|}{|\,[\tilde{x}_\psi^{(k)}(a_0,\dots,a_k)]},$$

где $\check{x}_\psi^{(k)}$ и $\tilde{x}_\psi^{(k)}$ - специально определенные обратные разделенные разности функции $x(t)$ относительно некоторой функции $\psi(t)$. В обоих случаях найдены выражения остаточных членов.

## 1. Краткая справка о непрерывных (цепных) дробях

Непрерывной или цепной дробью называется [3,4] выражение вида

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k|}{|\beta_k} = \beta_0 + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_2}{\beta_2 + \dots + \cfrac{\alpha_k}{\beta_k + \dots}}} \tag{1.1}$$

Здесь в левой части мы привели символическое обозначение цепной дроби, а в правой - само выражение цепной дроби. Числа $\alpha_i$ и $\beta_i$ называются частными числителями и знаменателями, а $\alpha_i/\beta_i$ – $i$-м частным звеном, $\beta_0$ - свободным членом. Дроби вида

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{\beta_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \beta_0 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m} = \beta_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k|}{|\beta_k} \tag{1.2}$$

называются подходящими дробями. Известны соотношения:

$$P_k = \beta_k P_{k-1} + \alpha_k P_{k-2}, \quad Q_k = \beta_k Q_{k-1} + \alpha_k Q_{k-2}, \tag{1.3}$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = (-1)^k \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{1.4}$$

где $P_0 = \beta_0$, $P_{-1} = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$.

## 2. Обратные разделенные разности для функций многих переменных и формулы интерполирования. Вариант 1

Введем обратные разделенные разности функции $x(t)$ относительно функции $\phi(t)$ :

$$\left.\begin{aligned}
&\check{x}_{\phi}^{(0)}(a_i) = x(a_i) ,\\
&\check{x}_{\phi}^{(k)}(a_0,\ldots,a_k) =\\
&= \frac{\phi(a_k) - \phi(a_{k-1})}{\check{x}_{\phi}^{(k-1)}(a_0,\ldots,a_{k-2},a_k)-\check{x}_{\phi}^{(k-1)}(a_0,\ldots,a_{k-1})},\\
&\qquad k \geq 1 .
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

Естественно, будем предполагать, что знаменатели в выражениях разделенных разностей $\check{x}_{\phi}^{(k)}(a_0,\ldots,a_k)$ не обращаются в нуль. В отличие от прямых разделенных разностей [1], обратные разделенные разности симметричны только относительно последних двух аргументов и, кроме того, нелинейны относительно функции $x(t)$ .

Из равенства

$$\check{x}_{\phi}^{(1)}(a_0,t) = \frac{\phi(t)-\phi(a_0)}{x(t)-x(a_0)}$$

получаем следующую "ключевую формулу" разложения функции $x(t)$ в окрестности точки $t=a_0$:

$$x(t)=x(a_0)+\frac{\phi(t)-\phi(a_0)}{\check{x}_{\phi}^{(1)}(a_0,t)} = x(a_0) + \frac{[\phi(t)-\phi(a_0)]|}{|\check{x}_{\phi}^{(1)}(a_0,t)}, \quad (2.2)$$

которая напоминает формулу Лагранжа о конечных приращениях.

Применяя формулу (2.2) к $\check{x}_{\phi}^{(1)}(a_0,t)$ по аргументу $t$ при $t = a_1$, имеем

$$\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0,t) = \check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0,a_1) + \frac{[\psi(t)-\psi(a_1)]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(2)}(a_0,a_1,t)} .$$

Подставляя это выражение для $\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0,t)$ в (2.2), получаем

$$x(t)= x(a_0)+\frac{[\psi(t)-\psi(a_0)]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0,a_1)} + \frac{[\psi(t)-\psi(a_1)]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(2)}(a_0,a_1,t)} .$$

Продолжая этот процесс, находим формулу

$$x(t) = x(a_0) + \frac{[\psi(t)-\psi(a_0)]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0,a_1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{[\psi(t)-\psi(a_{N-1})]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(N)}(a_0,\dots,a_N)} + \frac{[\psi(t)-\psi(a_N)]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(N+1)}(a_0,\dots,a_N,t)} . \qquad (2.3)$$

Рассмотрим следующую конечную дробь:

$$I2_N(x;t)= x(a_0)+ \sum_{k=1}^{N} \frac{[\psi(t)-\psi(a_{k-1})]\,|}{|\check{x}_{\psi}^{(k)}(a_0,\dots,a_k)} \qquad (2.4)$$

и введем остаточный член $R2_N(x;t)=x(t)-I2_N(x;t)$.

ТЕОРЕМА 1. *Формула* $I2_N(x;t)$ *является интерполяционной, т.е.* $I2_N(x;a_i) = x(a_i)$, $i=0,1,\dots,N$. *Остаточный член имеет вид*

$$R2_N(x;t)= (-1)^N \frac{1}{Q_N Q_{N+1}} \prod_{k=0}^{N} [\psi(t)-\psi(a_k)], \qquad (2.5)$$

*где*

$$Q_{N+1}= \beta_{N+1}Q_N+ \alpha_{N+1}Q_{N-1}, \quad Q_0= 1, \quad Q_{-1}= 0;$$

$$\alpha_k = \psi(t)-\psi(a_{k-1}), \quad 1 \le k \le N+1;$$

$$\beta_k = \begin{cases} \check{x}_{\psi}^{(k)}(a_0, \dots, a_k), & 1 \le k \le N; \\ \check{x}_{\psi}^{(N+1)}(a_0, \dots, a_N, t), & k = N+1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $I2_N(x;a_0) = x(a_0)$. Далее, из (2.4) имеем

$$I2_N(x;a_m) = x(a_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{[\psi(a_m)-\psi(a_{k-1})]|}{|\check{x}_{\psi}^{(k)}(a_0, \dots, a_k)},$$

$$m = 1, \dots, N.$$

Вычисляя нижние звенья дроби $I2_N(x;a_m)$ и последовательно уменьшая число звеньев, получаем

$$\check{x}_{\psi}^{(m-1)}(a_0, \dots, a_{m-1}) + [\psi(a_m)-\psi(a_{m-1})]/\check{x}_{\psi}^{(m)}(a_0, \dots, a_m) =$$
$$= \check{x}_{\psi}^{(m-1)}(a_0, \dots, a_{m-2}, a_m),$$

$$\check{x}_{\psi}^{(m-2)}(a_0, \dots, a_{m-2}) + [\psi(a_m)-\psi(a_{m-2})]/\check{x}_{\psi}^{(m-1)}(a_0, \dots$$
$$\dots, a_{m-2}, a_m) = \check{x}_{\psi}^{(m-2)}(a_0, \dots, a_{m-3}, a_m),$$

...

$$\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0, a_1) =$$
$$= [\psi(a_m)-\psi(a_1)]/\check{x}_{\psi}^{(2)}(a_0, a_1, a_m) = \check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0, a_m),$$

$$I2_N(x;a_m) =$$
$$= x(a_0) + [\psi(a_m)-\psi(a_0)]/\check{x}_{\psi}^{(1)}(a_0, a_m) = x(a_m).$$

Для доказательства равенства (2.5) воспользуемся представлениями (2.3), (2.4) и свойством (1.4). В обозначениях теоремы имеем

$$I2_N(x;t) = \frac{P_N}{Q_N}, \qquad x(t) = \frac{P_{N+1}}{Q_{N+1}} .$$

Поэтому из (1.4) получаем следующие равенства:

$$R2_N(x;t) = x(t) - I2_N(x;t) = \frac{P_{N+1}}{Q_{N+1}} - \frac{P_N}{Q_N} =$$

$$= \frac{(-1)^N}{Q_N Q_{N+1}} \prod_{k=1}^{N+1} \alpha_k = \frac{(-1)^N}{Q_N Q_{N+1}} \prod_{k=1}^{N+1} [\psi(t) - \psi(a_{k-1})].$$

Теорема доказана.

### 3. Обратные разделенные разности для функций многих переменных и формулы интерполирования. Вариант П

Введем обратные разделенные разности для функции $x(t)$ относительно $\psi(t)$ несколько иначе, чем это было сделано в п.2. Положим

$$\tilde{x}_{\psi}^{(0)}(a_i) = x(a_i),$$

$$\tilde{x}_{\psi}^{(k)}(a_0, \ldots, a_k) = \tag{3.1}$$

$$= \frac{\psi(a_k - a_{k-1})}{\tilde{x}_{\psi}^{(k-1)}(a_0, \ldots, a_{k-2}, a_k) - \tilde{x}_{\psi}^{(k-1)}(a_0, \ldots, a_{k-1})},$$

$$k \geq 1.$$

Для существования обратных разделенных разностей достаточно, чтобы в (3.1) знаменатели не обращались в нуль. В отличие от обратных разделенных разностей (2.1), обратные разделенные разности (3.1) не обладают свойством симметрии даже относительно последних аргументов $a_{k-1}, a_k$, если функция $\psi(t)$ не является нечетной. В дальнейшем предполагается выполненным условие $\psi(0) = 0$.

Используя "ключевую формулу"

$$x(t) = x(a_0) + \frac{[\psi(t-a_0)]|}{|\tilde{x}_\psi^{(1)}(a_0,t)}$$

и повторяя рассуждения, проделанные в п.2, получаем

$$x(t) = x(a_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{[\psi(t-a_{k-1})]|}{|\tilde{x}_\psi^{(k)}(a_0, \ldots, a_k)} + \frac{[\psi(t-a_N)|}{|\tilde{x}_\psi^{(N+1)}(a_0, \ldots, a_N, t)}.$$

Рассмотрим конечную дробь

$$I3_N(x;t) = x(a_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{[\psi(t-a_{k-1})]|}{|\tilde{x}_\psi^{(k)}(a_0, \ldots, a_k)}$$

и введем остаточный член $R3_N(x;t) = x(t) - I3_N(x;t)$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Формула* $I3_N(x;t)$ *является интерполяционной, т.е.* $I3_N(x;a_i) = x(a_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$. *Остаточный член имеет вид:*

$$R3_N(x;t) = \frac{(-1)^N}{Q_N Q_{N+1}} \prod_{k=0}^{N} [\psi(t-a_k)],$$

*где*

$$Q_{N+1} = \beta_{N+1} Q_N + \alpha_{N+1} Q_{N-1}, \quad Q_0 = 1, \ Q_{-1} = 0;$$

$$\alpha_k = \psi(t - a_{k-1}), \quad 1 \le k \le N+1,$$

$$\beta_k = \begin{cases} \hat{x}_{\psi}^{(k)}(a_0, \ldots, a_k), & 1 \le k \le N, \\ \hat{x}_{\psi}^{(N+1)}(a_0, \ldots, a_N, t), & k = N+1. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.

## Литература


1. ИМАМОВ А. Формулы интерполирования функций многих переменных //Методы сплайн-функций. -Новосибирск,1978. -Вып. 75: Вычислительные системы. - С. 50-55.

2. Его же. Явные формулы интерполирования функций многих переменных //Сплайны в вычислительной математике.-Новосибирск, 1986. - Вып. 115: Вычислительные системы. -С. 93-97.

3. ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970. - 664 с.

4. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). - М.: Наука, 1978. - 832 с..



Поступила в ред.-изд.отд.

9 февраля 1988 года