

УДК 519.615:517.927.4

ЗАДАЧА О ПОРШНЕ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.  
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В.Л.Дятлов, С.И.Фадеев

В современных электромеханических емкостных преобразователях энергии микромеханики [1-2] давление на подвижный элемент не превышает 1 атм. В то же время это давление в электромагнитах приблизительно равно 10 атм [3], в керамических пьезоэлектриках оно достигает величин до 1000 атм [4]. У животных давление в поперечном сечении мышц достигает 10 атм [5]. Между тем и в емкостных электромеханических преобразователях энергии возвратно-поступательного движения можно получить высокие давления, используя колебательное движение подвижного элемента в электрическом поле при условиях нелинейной зависимости сил упругости от перемещений, малых диссипативных потерь и резонанса. При этих условиях возникает дополнительное давление, которое направлено против электростатического и которое может значительно превысить последнее. Это дополнительное давление аналогично тепловому давлению, возникающему при расширении или сжатии твердых тел, жидкости и газа, и названо электрокинетическим [6-7]. В указанных работах проведена оценка электрокинетического давления на основе метода энергетического баланса.

Целью настоящей работы является расчет электрокинетического давления в емкостных структурах без тех допущений о форме колебаний, которые необходимо делать при использовании энергетического баланса.

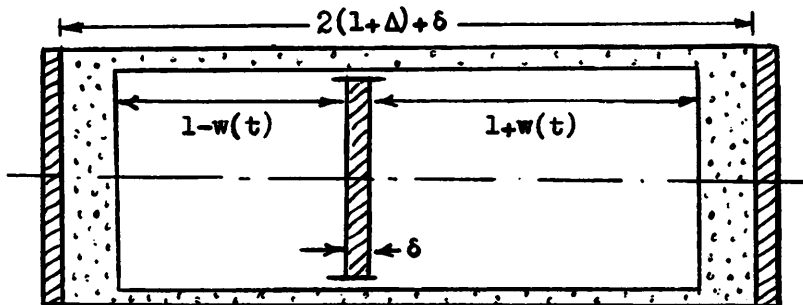


Рис. 1

Пусть в замкнутом цилиндре (рис.1) высотой  $2l + \delta$  находится подвижный элемент в виде поршня-электрода. Обозначим через  $M$  массу поршня. В положении, когда расстояния от поршня до торцов цилиндра одинаковы, т.е. равны  $l$ , цилиндр наполняется газом с давлением  $P_0$ . Далее к торцам присоединены неподвижные электроды, покрытые слоем диэлектрика толщиной  $\Delta$  с электрической постоянной  $\epsilon$ . Возбудим колебания поршня  $w(t)$ , приложив к подвижному электроду-поршню и неподвижным электродам разность потенциалов  $U$ , меняющуюся во времени  $t$  по закону:

$$U = U_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

где  $U_0$  и  $\omega$  - заданные параметры. Предполагается, что колебания сопровождаются чередованием изотермического сжатия и расширения газа в области между поршнем и торцом. Уравнение движения поршня имеет вид:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 w}{dt^2} + \mu \frac{dw}{dt} + P_0 \left( \frac{1}{1-w} - \frac{1}{1+w} \right) = \\ = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{2} \cos^2(\omega t) \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta}{\epsilon} - w\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta}{\epsilon} + w\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

или

$$M \frac{d^2 t}{dt^2} + \mu \frac{dw}{dt} + 2w \left[ \frac{p_0 l}{l^2 - w^2} - \epsilon_0 U_0^2 \frac{l_* \cos^2(\omega t)}{(l_*^2 - w^2)^2} \right] = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная для пустоты,  $\mu$  - коэффициент трения  $l_* = l + \Delta/\epsilon$ . При выводе уравнения движения поршня учтена малость зазоров между электродами, что позволило задать электростатическую нагрузку формулой, справедливой для плоского конденсатора.

Рассмотрим задачу численного описания периодических колебаний поршня с той же частотой  $\omega$ , что и разность потенциалов  $U$ , согласно (1). С этой целью введем безразмерные переменные:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} x, \quad w(t) = ly(x), \quad Q = \frac{\pi^2 p_0}{2\omega^2 M l}, \quad (3)$$

$$s_0 = 1 + \frac{\Delta}{\epsilon l}, \quad s_1 = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{l^2 p_0} s_0, \quad s_2 = \mu \sqrt{\frac{1}{2M p_0}}.$$

После подстановки (3) в уравнение (2) для определения введенной в (3) функции  $y$  аргумента  $x$  и периода 4, получим следующую краевую задачу:

$$0 \leq x \leq 4,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + s_2 \sqrt{Q} \frac{dy}{dx} + Qy \left[ \frac{1}{1-y^2} - s_1 \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} x)}{(s_0^2 - y^2)^2} \right] = 0 \quad (4)$$

$$y(0) = y(4), \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(4).$$

Помимо зависимости амплитуды от частоты колебаний нас будет интересовать осредненное по периоду  $T$ , равному  $2\pi/\omega$ , воздействие газа  $P_g$  и электростатического поля  $P_e$  на торец цилиндра:

$$P_g = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{P_0 l}{1-w(t)} - P_0 \right] dt, \quad P_e = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\epsilon_0 U_0^2 \cos^2(\omega t)}{[1-w(t)]^2} dt.$$

Составим отношение  $P_e/P_g$ . Используя безразмерные переменные (3), получаем:

$$\frac{P_e}{P_g} = \frac{s_1}{2s_0} \cdot \frac{J_e}{J_g},$$

где

$$J_g = \frac{1}{4} \int_0^h \frac{y(x) dx}{1-y(x)}, \quad J_e = \frac{1}{4} \int_0^h \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x) dx}{[s_0 - y(x)]^2}. \quad (5)$$

Рассматриваемая проблема дает нам повод кратко остановиться на численном решении нелинейной двухточечной краевой задачи общего вида для системы из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале  $(a, b)$  изменения скалярного аргумента  $x$ :

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{du}{dx} = f(x, u, Q),$$

$$g(u(a), u(b), Q) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $u$ ,  $f$  и  $g$  - векторы размерности  $n$  с компонентами  $u_1, u_2, \dots, u_n, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n$  соответствен-

но;  $Q$  - скалярный параметр. Предполагается, что  $f(x, u, Q)$  и  $g(u(a), u(b), Q)$  - достаточно гладкие вектор-функции по совокупности аргументов. В частности, к формулировке (6) сводится краевая задача (4), описывающая периодическое решение с заданным периодом. Применительно к ней имеем следующую формулировку вида (6):

$$0 \leq x \leq 4,$$

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, Q) \equiv u_2,$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2, Q) \equiv -s_2 \sqrt{Q} u_2 - Qu_1 F(x, u_1), \quad (7)$$

$$g_1(u_1(0), u_2(0), u_1(4), u_2(4), Q) \equiv u_1(0) - u_1(4) = 0,$$

$$g_2(u_1(0), u_2(0); u_1(4), u_2(4), Q) \equiv u_2(0) - u_2(4) = 0.$$

Здесь

$$F(x, u_1) = \frac{1}{1-u_1^2} - s_1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(s_0^2 - u_1^2)^2}.$$

Подробное описание численного метода, который мы будем использовать в дальнейшем, см. в [8]. Там же приведен список литературы.

Прежде всего, согласно методу [8], приближенное численное решение краевой задачи (6) ищется в узлах  $x_j$  сетки по  $x$ :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i. \quad (8)$$

Пусть  $u(x)$  - решение краевой задачи и  $u^i = u(x_i)$ . Тогда в силу дифференциального уравнения (6) справедливы равенства:

$$u^{i+1} - u^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x), Q) dx . \quad (9)$$

Чтобы из этих равенств и краевых условий (6) получить конечно-мерную систему трансцендентных уравнений относительно компонент векторов  $u^1, u^2, \dots, u^{m+1}$ , воспользуемся двумя приближениями.

Во-первых, на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  длиной  $h_i$  вектор-функцию  $u(x)$  приближенно заменим кубической параболой  $S^i(x)$ , определяемой из условий:

$$S^i(x_i) = u^i, \quad \frac{dS^i}{dx}(x_i) = f^i \equiv \frac{du}{dx}(x_i),$$

$$S^i(x_{i+1}) = u^{i+1}, \quad \frac{dS^i}{dx}(x_{i+1}) = f^{i+1} \equiv \frac{du}{dx}(x_{i+1}).$$

Параболу  $S^i(x)$  можно записать в виде:

$$x = x_i + h_i \tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$S^i(x_i + h_i \tau) = (1-\tau)u^2 + \tau u^{i+1} + \tau(1-\tau)[(1-\tau)A^i + \tau B^i],$$

где

$$A^i = h_i f^i + u^i - u^{i+1}, \quad B^i = -h_i f^{i+1} - u^i + u^{i+1}.$$

Во-вторых, при вычислении интеграла в правой части (9), где вектор-функция  $u(x)$  заменена на  $S^i(x)$ , воспользуемся формулой Симпсона. В результате искомая система из  $(m+1)n$  трансцендентных уравнений запишется следующим образом:

$$g(u^1, u^{m+1}, Q) = 0, \quad (10)$$

$$R^i(u^i, u^{i+1}, Q) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$R^i = u^i - u^{i+1} + \frac{h_i}{6} [f(x_i, u^i, Q) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \bar{u}^i, Q\right) + f(x_{i+1}, u^{i+1}, Q)],$$

$$u^i = S^i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{u^i + u^{i+1}}{2} + \frac{h_i}{8} [f(x_i, u^i, Q) - f(x_{i+1}, u^{i+1}, Q)].$$

Заметим, что погрешность аппроксимации краевой задачи (6) при переходе к ее дискретной модели (10) на решениях (6) имеет порядок  $h_{\max}^4, h_{\max} = \max_i h_i$ .

Как правило, вопрос о существовании решения нелинейной конечномерной системы уравнений вида (10)

$$\Phi(Y, Q) = 0, \quad (11)$$

где  $Y$  - вектор неизвестных,  $\Phi$  - вектор той же размерности, что и  $Y$ , является затруднительным. Однако в том случае, когда известно значение  $Q$ , равное  $Q_0$ , при котором решение (11) существует, применение метода Ньютона-Канторовича в сочетании с методом продолжения решения по параметру позволяет эффективно численно исследовать решение (11)  $Y(Q)$  в некоторой окрестности точки  $Q_0$ . Продолжение решения по параметру полезно сопровождать на каждом шаге процедурой параметризации, т.е. процедурой выбора "текущего" параметра системы (11) среди компонент  $Y$  и  $Q$ , после того как решение системы при некотором  $Q$  построено [9]. Применяя параметризацию, мы имеем возможность находить решение системы (11) и в том слу-

чае, когда гладкая пространственная кривая, описываемая функцией  $Y(Q)$ , не обязательно однозначно зависит от  $Q$ . Кроме того, параметризация позволяет более эффективно задавать начальные приближения в процессе продолжения решения по параметру. Эти обстоятельства используются в программе BPR-Q, предназначенной для решения краевой задачи (6), или, вернее, системы (10), являющейся дискретной моделью (6) на сетке (8) (см. [8]).

Возвращаясь к краевой задаче (4), отметим, что при  $\mu = 0$  ( $s_2 = 0$ ) достаточно рассмотреть решение  $y(x)$  на  $1/4$  периода, как это следует из свойств симметрии функции, описывающей воздействие сил на поршень. Пусть

$$y(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi_2(x), & 1 \leq x \leq 2, \\ \varphi_3(x), & 2 \leq x \leq 3, \\ \varphi_4(x), & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Тогда имеем симметрию вида

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi_2(1+x) &= -\varphi_1(1-x), \\ \varphi_3(2+x) &= -\varphi_1(x), \quad \varphi_4(3+x) = \varphi_1(1-x). \end{aligned}$$

Таким образом, построение периодического решения сводится к следующей краевой задаче:  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Qy \left[ \frac{1}{1-y^2} - s_1 \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{(s_0^2 - y^2)^2} \right] = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dx}(0) = y(1) = 0.$$



С учетом указанной симметрии  $y(x)$  формулы для определения  $J_g$  и  $J_e$  принимают вид:

$$J_g = \int_0^1 \frac{y^2(x) dx}{1-y^2(x)}, \quad J_e = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{s_0^2 + y^2(x)}{[s_0^2 - y^2(x)]^2} dx.$$

Вначале строится решение краевой задачи (12), отвечающее малым колебаниям поршня. Затем найденное решение используется для поиска его продолжения по "текущим" параметрам (процедура параметризации) в сторону возрастания амплитуды колебаний. В данном случае амплитуда колебаний равна  $y(0)$ . С этой целью разобьем отрезок  $[0,1]$  на  $m$  частей, и пусть  $x_i, i = 1, \dots, m+1$ , - узлы сетки (8). Введем обозначения индексов  $(i_*, j_*)$  "текущего" параметра  $\lambda$  дискретной модели (7), выбираемого среди  $u_1(x_i), u_2(x_i)$  и  $Q$ . Условимся, что если  $1 \leq i_* \leq m+1$  и  $j_* = 1$ , то  $\lambda = u_1(x_{i_*})$ , и если  $j_* = 2$ , то  $\lambda = u_2(x_{i_*})$ . Индексы  $j_* = 0, i_* = m+2$  означают, что  $\lambda = Q$ . При малых колебаниях поршня в качестве стартового "текущего" параметра задачи следует задать амплитуду колебаний  $u_1(0)$ , т.е.  $i_* = j_* = 1$ . Благодаря этому исключается возможность выхода на тривиальное решение задачи в качестве итога итерационного процесса по методу Ньютона-Канторовича. Соответствующее заданному  $u_1(0)$  значение  $Q$  находится из решения задачи. За начальное приближение могут быть взяты сеточные значения функций:

$$u_1(x) = u_1(0) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad u_2(x) = -\frac{\pi}{2} u_1(0) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right). \quad (13)$$

В табл.1 представлены результаты решения краевой задачи (12) по программе BPR-Q методом продолжения решения по параметру при  $s_0 = \sqrt{2}$ ,  $s_1 = 2/5$ . В стартовой позиции была за-

BPR-Q

TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM :

$$0 < X < 1$$

$$Y''(X) + Q * F[X, Y(X)] * Y(X) = 0$$

$$Y'(0) = 0, Y(0) = Y_0, Y(1) = 0; Q?$$

$$F(X, Y) = 1 / (1 - Y^2) - S1 * [\cos(1.5708 * X) / (S0^2 - Y^2)]^2$$

$$S0 = 1.41421 \quad S1 = .4$$

AMPL	Q	J0	R	I9	J9
0.0100	2.6670	0.0001	702.3474	21	2
0.0414	2.6638	0.0009	40.9827	21	2
0.0792	2.6548	0.0032	11.2413	21	2
0.1246	2.6363	0.0079	4.5576	21	2
0.1793	2.6032	0.0166	2.2148	21	2
0.2433	2.5491	0.0311	1.2172	21	2
0.3081	2.4772	0.0512	0.7701	21	2
0.3742	2.3860	0.0781	0.5315	22	0
0.4400	2.2765	0.1127	0.3919	22	0
0.5072	2.1451	0.1581	0.3013	22	0
0.5767	1.9874	0.2190	0.2381	22	0
0.6489	1.7982	0.3034	0.1915	22	0
0.7243	1.5712	0.4263	0.1550	22	0
0.8024	1.2988	0.6192	0.1242	22	0
0.8819	0.9718	0.9642	0.0945	22	0
0.9577	0.5795	1.7871	0.0596	22	0
0.9852	0.3795	2.7768	0.0393	2	2
0.9888	0.3449	3.0894	0.0353	2	2
0.9923	0.3075	3.5921	0.0302	2	2
0.9955	0.2666	4.6638	0.0230	2	2
0.9979	0.2189	7.5703	0.0139	2	2
0.9991	0.1462	15.3925	0.0066	2	2

дана амплитуда колебаний, равная 1/100. В табл.1 использованы следующие обозначения:  $AMPL = y(0)$ ,  $J0 = J_g$ ,  $R = p_e/p_g$ ,  $I9 = i_*$ ,  $J9 = j_*$ , обозначение  $Q$  осталось прежним (см.(3)). В данном случае использовалось равномерное разбиение отрезка  $[0,1]$  на 20 частей,  $m = 20$ . При этом значения индексов  $i_* = 22$ ,  $j_* = 0$  говорят о том, что на этом шаге программа выбрала  $Q$  в качестве текущего параметра.

BPR-Q

TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM :

$$0 < X < 4$$

$$Y''(X) + S2 * \text{SQR}(Q) * Y'(X) + Q * F[X, Y(X)] * Y(X) = 0$$

$$Y(0) = Y(4), Y'(0) = Y'(4), Y(0) = Y0; \quad Q?$$

$$F(X, Y) = 1 / (1 - Y^2) - S1 * [\text{COS}(1.5708 * X) / (S0^2 - Y^2)]^2$$

$$S0 = 1.41421$$

$$S1 = .4$$

$$S2 = .01$$

AMPL	Q	J0	R	I9	J9
0.0102	2.6615	0.0001	675.2456	12	2
0.0416	2.6582	0.0009	40.5157	32	2
0.0794	2.6491	0.0032	11.1595	12	2
0.1248	2.6307	0.0079	4.5312	32	2
0.1796	2.5975	0.0166	2.2031	12	2
0.2436	2.5433	0.0312	1.2107	32	2
0.3085	2.4714	0.0513	0.7656	12	2
0.3746	2.3801	0.0784	0.5280	42	0
0.4405	2.2706	0.1131	0.3889	42	0
0.5077	2.1392	0.1586	0.2986	42	0
0.5772	1.9815	0.2198	0.2356	42	0
0.6495	1.7922	0.3046	0.1892	42	0
0.7249	1.5651	0.4281	0.1529	42	0
0.8029	1.2926	0.6221	0.1221	42	0
0.8818	0.9656	0.9702	0.0925	42	0
0.9212	0.7693	1.2947	0.0754	42	0
0.9411	0.6516	1.5679	0.0648	42	0
0.9510	0.5810	1.7748	0.0583	2	2
0.9541	0.5573	1.8527	0.0559	22	2
0.9568	0.5524	1.8711	0.0553	2	2
0.9602	0.5424	1.9115	0.0540	2	2
0.9649	0.5220	1.9987	0.0517	2	2
0.9714	0.4837	2.1866	0.0473	22	2
0.9807	0.4171	2.6426	0.0393	22	2
0.9861	0.3728	3.1390	0.0331	22	2
0.9917	0.3185	4.2889	0.0240	24	2

Как следует из табл.1, отношение  $p_e/p_g$  убывает с уменьшением  $Q$ , т.е. с ростом частоты  $\omega$ . Уже при амплитуде, равной 1/3, осредненное электростатическое давление становится меньше осредненного давления газа. Согласно расче -

там это отношение может быть сколь угодно малым для достаточно больших частот.

Полученные результаты полностью совпадают с решением краевой задачи (4) при тех же  $s_0, s_1$  и  $s_2 = 0$ . Отметим, что при всех значениях амплитуды, равной  $y(0)$  (или  $u_1(0)$ ), форма колебаний имеет вид (12). В частности,  $y(0) = -y(2) = y(4)$ ,  $\frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(2) = \frac{dy}{dx}(4) = 0$ .

Функции (13) могут быть использованы и при решении краевой задачи (4) для "малых" значений параметра  $s_2$ . В табл. 2 даны результаты расчетов, аналогичные представленным в табл. 1 при  $s_2 = 1/100$ . При этом в качестве амплитуды бралось максимальное по модулю значение  $|y(x)|$  в узлах сетки с числом разбиения  $M = 40$  отрезка  $[0, 4]$ .

Укажем еще на одно интересное обстоятельство, связанное с влиянием величины коэффициента трения на колебания поршня. С этой целью возьмем решение (4) при  $s_2 = 0$  и заданной амплитуде колебаний в качестве начального приближения решения следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Q \sqrt{s_*} \frac{dy}{dx} + s_* y \left[ \frac{1}{1-y^2} - s_1 \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} x)}{(s_0^2 - y^2)^2} \right] = 0, \quad (14)$$

$$y(0) = y(4), \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(4).$$

Здесь  $s_*$  - значение  $Q$ , найденное из решения (4) при  $s_2 = 0$ , а через  $Q$  обозначено  $s_2$ , поскольку теперь  $s_2$  является параметром задачи в смысле (11). Таким образом, применительно к (14) метод продолжения решения по параметру используется для численного описания колебаний поршня в зависимости от параметра  $Q = s_2$  при фиксированных параметрах  $\omega$  и  $U_0$  (т.е.  $s_1$  и  $s_*$  фиксированы). В стартовой позиции  $Q = 0$ .

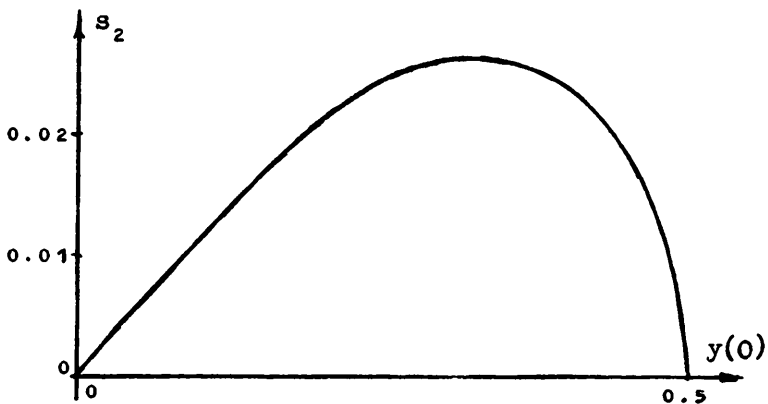


Рис. 2

Результаты вычислений, связанных с решением краевой задачи (14), отражены на рис. 2. Потребовав в стартовой позиции при  $y(0) = 1/2$ , чтобы параметр  $Q$  (14) возрастал, мы в итоге убеждаемся, что это возможно лишь до некоторого максимального значения  $Q$ , при котором периодическое решение (14) еще возможно. Для положительных  $Q$ , меньших максимального, краевая задача (13) имеет два решения.

Заметим, что при движении в сторону уменьшения  $y(0)$  от значения  $y(0) = 1/2$  положение  $\max_x y(x)$  смещается вправо, и когда коэффициент трения вновь обращается в 0, то  $\max_x y(x) = y(1)$ . Одновременно амплитуда колебаний монотонно убывает от 0.5 до 0.439 при  $y(0) = 0$ . В этом положении колебания имеют форму, качественно описываемую функцией  $y(1)\sin(\frac{\pi}{2}x)$ .

Другого рода решения краевых задач (4) и (12) мы получим, взяв в качестве начального приближения решения не функции (13),

а сеточные значения следующих функций:

$$u_1(x) = u_1(1) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right), \quad u_2(x) = \frac{\pi}{2} u_1(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

Качественно эту же форму имеют колебания при всех возможных значения амплитуды. "Косинусообразные" и "синусообразные" формы колебаний при амплитуде, равной 1/2,  $S_2 = 0$ ,  $m = 40$ , представлены в табл. 3,4.

Т а б л и ц а 3

BPR-Q

TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM :

$$0 < X < 4$$

$$Y''(X) + S2 * SQR(Q) * Y'(X) + Q * F[X, Y(X)] * Y(X) = 0$$

$$Y(0) = Y(4), Y'(0) = Y'(4), Y(0) = Y(4); \quad Q?$$

$$F(X, Y) = 1 / (1 - Y + 2) - S1 * [COS(1.5708 * X) / (S0 + 2 - Y + 2)] + 2$$

$$S0 = 1.41421 \quad S1 = .4 \quad S2 = 0$$

$$AMPL = .5 \quad Q = 2.1652 \quad JB = .152664$$

$$R = .309341 \quad I9 = 42 \quad J9 = 0$$

X, Y(X), Y'(X)	=====>	
0	.5	-6.67888E-06
.1	.493525	-.129092
.2	.474342	-.253392
.3	.443145	-.368766
.4	.400992	-.472083
.5	.349201	-.561259
.6	.289254	-.635049
.7	.222727	-.692784
.8	.151243	-.734145
.9	7.64479E-02	-.758992
1	-3.83774E-06	-.767278
1.1	-7.64555E-02	-.758991
1.2	-.15125	-.734141
1.3	-.222733	-.692779
1.4	-.28926	-.635042
1.5	-.349207	-.561251
1.6	-.400997	-.472074
1.7	-.443149	-.368754
1.8	-.474345	-.25338
1.9	-.493526	-.129078
2	-.5	6.59286E-06

BPR-Q

TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM :

$$0 < X < 4$$

$$Y''(X) + S2 * \text{SQR}(Q) * Y'(X) + Q * F(X, Y(X)) * Y(X) = 0$$

$$Y(0) = Y(4), Y'(0) = Y'(4), Y(1) = Y(3); \quad Q?$$

$$F(X, Y) = 1 / (1 - Y^2) - S1 * [\text{COS}(1.5768 * X) / (S0 * 2 - Y^2)]^2$$

$$S0 = 1.41421 \quad S1 = .4 \quad S2 = 6$$

AMPL = .5                    Q = 2.84556            J8 = .15868

R = .257978                I9 = 42            J9 = 8

X, Y(X), Y'(X)	=====	=====
0	3.38839E-06	.749328
.1	.874706	.742411
.2	.148018	.72145
.3	.218508	.68584
.4	.284669	.634701
.5	.3449	.567099
.6	.397519	.482412
.7	.440817	.380831
.8	.473172	.263954
.9	.493211	.135234
1	.5	-6.82285E-06
1.1	.493209	-.135245
1.2	.47317	-.263965
1.3	.440814	-.380841
1.4	.397514	-.482421
1.5	.344895	-.567106
1.6	.284663	-.634706
1.7	.218502	-.685844
1.8	.148012	-.721453
1.9	7.46993E-02	-.742413
2	-3.38064E-06	-.749328

В данной работе проблема устойчивости построенных нелинейных колебаний не затрагивается, поскольку она не имеет отношения к обсуждаемому здесь методу решения краевых задач. Для нас было важно обратить внимание на возможность достижения сколь угодно малого отношения  $p_e/p_g$ , а также на метод продолжения решения по параметру как на эффективное средство численного исследования нелинейных краевых задач.

В заключение отметим, что вместо (4) достаточно рассмотреть краевую задачу:

$$0 < x < 2,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + s_2 \sqrt{Q} \frac{dy}{dx} + Qy \left[ \frac{1}{1-y^2} - s_2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(s_0^2 - y^2)^2} \right] = 0,$$

$$y(0) + y(2) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) + \frac{dy}{dx}(2) = 0.$$

а затем воспользоваться симметрией:  $y(2-x) = -y(2+x)$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. ПЕТЕРСЕН К. Кремний как механический материал //ТИИЭР, 1982. - Т. 70, № 5. -С. 5-49.
2. ДЯТЛОВ В.Л., КОНЯШКИН В.В., ПОТАПОВ Б.С. Использование размерных физических эффектов в пленочной электромеханике //Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск, 1985. - Вып. 110: Вычислительные системы. -С. 18-34.
3. ВИТЕНБЕРГ М.И. Расчет электромагнитных реле для аппаратуры автоматики и связи: 3-е изд.-М.-Л.: Энергия,1966.-705 с.
4. ЛАВРИНЕНКО В.В., КАРТАШОВ И.А., ВИШНЕВСКИЙ В.С. Пьезоэлектрические двигатели. -М.: Энергия, 1980. - 112 с.
5. ГАЛЬПЕРИН С.И., ВАСЮТОЧКИН А.М. Курс анатомии и физиологии человека. - М.: Учпедгиз. 1950. - 500 с.
6. ДЯТЛОВ В.Л. Пленочная электромеханика - основа создания универсальных пленочных двигателей с высокой энергоемкостью //Моделирование в пленочной электромеханике. - Новосибирск, 1981. - Вып. 84: Вычислительные системы. - С. 3-32.
7. ДЯТЛОВ В.Л. Перспективы создания пленочных электростатических двигателей ВПД высокой энергоемкости //Промышленные роботы и их применение в народном хозяйстве (Сборник докладов Всероссийского научн. практич. семинара. г. Новосибирск, апрель, 1981 г.) - Новосибирск, 1982. - С. 41-57.
8. ФАДЕЕВ С.И. Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. - Новосибирск, 1988, ч.1, 47 с.; ч.П, 59 с.; ч.Ш, 36 с. (Препринт/СО АН СССР, Институт математики; № 31-33).



9. ФАДЕЕВ С.И. О решении системы трансцендентных уравнений с параметром методом Ньютона. - Новосибирск, 1984. - 25 с. - (Препринт/СО АН СССР, Институт математики; № 72).

Поступила в ред.-изд.отд.

11 октября 1989 года