ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 133

УДК 510.51

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ НЕАВТОУСТОЙЧИВОСТЬ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Е.И.Латкин

Исходя из свойств класса функций, вычислимых за полиномиальное время, а также классов Гжегорчика $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 2$, в статье сформулирован новый подход к измерению сложности алгоритмов, позволяющий упростить исследование многих известных малых классов. Новый подход основан на анализе алгебраических свойств меры сложности вычислений.

С его помощью автор рассматривает классы "эффективных" и "наследственно эффективных" алгоритмов, являющиеся обобщением полиномиально вычислимого класса и классов Гжегорчика соответственно, и показывает, что для этих классов справедлива теорема о $\mathcal{B}$-неавтоустойчивости.

Теорема о $\mathcal{B}$-неавтоустойчивости, доказанная в §2, утверждает, что при выполнении некоторых условий "тонкости", налагаемых на класс функций $\mathcal{B}$, не существует бесконечных $\mathcal{B}$-автоустойчивых $\mathcal{B}$-конструктивных моделей.

§1. Сложность алгоритмов. Алгебраический подход

В работе нас будут интересовать алгебраические свойства классов алгоритмов, т.е. свойства, характерные не для отдельно взятых алгоритмов, а лишь для некоторой их совокупности, обогащенной генерическими соотношениями между ними, такими как выразимость одних алгоритмов через другие посредством операций суперпозиции и рекурсии.

1. <u>Алгоритмический универсум</u>. Мы будем считать классами алгоритмов любые подалгебры некоего "алгоритмического универсума" - фиксированной абстрактной алгебры $\mathcal{A}$ клоновской (плюс некоторые константы) сигнатуры. Аналогично будем предполагать существование функционального универсума $\mathcal{F}$ - множества всех частичных функций на $\mathbf{N}$. Соответствие между алгоритмами и функциями определяется гомоморфизмом $\varkappa : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$.

По определению, $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{F}_n$, где $\mathcal{F}_n$ - множество всех частичных функций из $\mathbf{N}^n$ в $\mathbf{N}$. Через σ_0 обозначим сигнатуру, содержащую символы следующих операций над элементами из $\mathcal{F}$:

(1) $S_m(f;\, g_1,\dots,g_m):\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto f(g_1(\bar{x}),\dots$ $\dots,\, g_m(\bar{x}))$ - суперпозиция;

(2) $I^n_m:\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_m,\ \ 1 \le m \le n;$

$\underline{\text{zero}} \equiv 0\ (\underline{\text{zero}} \in \mathcal{F}_0);$

$\underline{\text{succ}}:\ x \mapsto x+1;$

$\underline{\text{if}}:\ (x,y,z) \mapsto$ [если $x=0$, то y, иначе z];

$\underline{\text{sub}}:\ (x,y) \mapsto x \dot{-} y =$ [если $x \ge y$, то $x-y$, иначе 0];

$\underline{\text{and}}:\ (x,y) \mapsto$ [если $x=0$ и $y=0$, то 0, иначе 1];

$\underline{\text{not}}:\ x \mapsto$ [если $x \ne 0$, то 0, иначе 1] - константы сигнатуры σ_0 .

Сигнатура σ_1 богаче σ_0 - в нее добавлены символы операций:

(3) $\mathcal{R}(f,g) = h$ - примитивная рекурсия:

$$h(0,\bar{x}) = f(\bar{x}),$$

$$h(y+1,\bar{x}) = g(h(y,\bar{x}),\, y,\, \bar{x});$$

(4) $\mathcal{M}(f)=g \leftrightarrow g(\bar{x})=\inf\{y \mid f(y,\bar{x})=0\} \wedge \mathrm{dom}\ g=\mathbb{N}^n$ - частичная операция минимизации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгоритмическим универсумом назовем всякую алгебру $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_1, снабженную σ_1-гомоморфизмом $\varkappa : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$. По определению, $\mathcal{A}_n = \varkappa^{-1}[\mathcal{F}_n]$.

Будем считать, что с этого момента зафиксирован некоторый алгоритмический универсум $\mathcal{A}$ и его представление $\varkappa$. Элементы множества $\mathcal{A}$ мы будем называть алгоритмами, а иногда, допуская вольность речи, - функциями, отождествляя $f \in \mathcal{A}$ с $\varkappa_f \in \mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Договоримся писать $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$, если $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть σ_0-подалгебра $\mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{B}$ содержит I^n_m, <u>zero</u>, <u>succ</u>, ... и замкнуто по суперпозиции). Для $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ полагаем $\mathcal{B}_n = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_n$. Аналогичного соглашения будем придерживаться и для классов $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{F}$.

<u>2. О сложности алгоритмов</u>. Одновременно с $\varkappa$ мы рассмотрим еще одно отображение $\hat{\cdot} : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$, уже не являющееся гомоморфизмом. По смыслу оно ставит в соответствие каждому алгоритму функцию, показывающую затраты на его вычисление в зависимости от значений аргументов. Такое отображение мы назовем мерой сложности и потребуем, чтобы для него выполнялись следующие соотношения.

АКСИОМА 1 (алгебраические свойства меры сложности).

1. Если $h = \mathbf{S}_m(f; g_1,\ldots,g_m)$, то

$$\hat{h}(\bar{x}) \preccurlyeq_C \hat{f}(g_1(\bar{x}),\ldots,g_m(\bar{x})) + \hat{g}_1(\bar{x}) + \ldots + \hat{g}_m(\bar{x}).$$

2. Если $h = \mathcal{R}(f,g)$, то

$$\hat{h}(y,\bar{x}) \preccurlyeq_C \hat{f}(\bar{x}) + \sum_{i=0}^{y-1} \hat{g}(h(i,\bar{x}),i,\bar{x}).$$

3. Если $h = \mathfrak{M}(g)$, то

$$\hat{h}(\bar{x}) \lesssim_C \sum_{y=0}^{h(\bar{x})} \hat{g}(y,\bar{x}).$$

4. $\hat{I}^n_m$, $\widehat{\underline{zero}}$, $\widehat{\underline{succ}}$, $\widehat{\underline{if}}$, $\widehat{\underline{sub}}$, $\widehat{\underline{and}}$, $\widehat{\underline{not}} \in C$.
5. $(\exists p \in \mathcal{A})[\varkappa(p) = p \wedge \hat{p} \in C]$.
6. $(\forall f \in \mathcal{A})\ \varkappa(f) \lesssim_C \hat{f}$.

Класс $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ должен соответствовать двум следующим аксиомам.

АКСИОМА 2 (свойства замкнутости $\mathcal{C}$).
1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{C}$ - σ_0-подалгебра $\mathcal{F}$.
2. Если $f \in \mathcal{C}$ и $g(y,\bar{x}) = \sum_{i=0}^{y} f(i,\bar{x})$, то $g \in \mathcal{C}$.
3. Если $f \in \mathcal{C}$ и $g \leq f$, то $g \in \mathcal{C}$.

АКСИОМА 3. Существует функция $p \in \mathcal{C}_1$ такая, что:
1. $x < y \Rightarrow p(x) < p(y)$;
2. $p(x) > x + x$;
3. $(\forall f \in \mathcal{C}_1)\ \exists k\ \ f \leq p^k$ $(= \underbrace{p\ \dots\ p}_{k}$ по определению).

Мы воспользовались обозначениями для сравнения функций:
1. $f \leq g \Leftrightarrow_{\text{опр}} (\forall x_1, \dots, x_n)\ f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$,
2. $f \lesssim g \Leftrightarrow_{\text{опр}} \exists y\ (\forall x_1, \dots, x_n \geq y)\ f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$,
3. $f \lesssim_{\mathcal{C}} g \Leftrightarrow_{\text{опр}} (\exists h \in \mathcal{C})\ f \leq g + h$.

Класс $\mathcal{C}$ послужит нам в качестве критерия эффективности: с его помощью мы определим классы $\mathcal{E}$ "эффективных" и $\mathcal{H}$ "наследственно эффективных" алгоритмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

1. $\mathcal{E} = \{ f \in \mathcal{A} \mid \hat{f} \in C \}$;

2. $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ есть наименьшая σ_0-подалгебра, содержащая $\mathfrak{p}$ и замкнутая относительно частичных операций ограниченной рекурсии $\hat{\mathcal{R}}$ и ограниченной минимизации $\widehat{\mathcal{M}}$, где:

1. $\hat{\mathcal{R}}(f_0, f_1) = f \leftrightarrow_{опр} \mathcal{R}(f_0, f_1) = f$ и $f \in \mathcal{E}$;

2. $\widehat{\mathcal{M}}(f_0) = f \leftrightarrow_{опр} \mathcal{M}(f_0) = f$ и $f \in \mathcal{E}$.

Из определения 3 следует, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{E}$ замкнут по суперпозиции, значит, имеется цепочка включений $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

В §3 и 4 будет показано, что оба класса $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ удовлетворяют условиям теоремы о неавтоустойчивости, к доказательству которой мы сейчас приступаем.

§2. Теорема о неавтоустойчивости

Этот параграф в известной мере изолирован от остального содержания статьи, а изолятором послужит "условие тонкости" (см. определение 6 ниже). Мы будем изучать $\mathcal{B}$-конструктивные свойства бесконечных моделей, где $\mathcal{B}$ - некоторый "тонкий" класс алгоритмов, а именно: докажем, что не существует $\mathcal{B}$-автоустойчивых моделей.

<u>1. Идея теоремы</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ - счетная модель сигнатуры σ (не обязательно конечной); обозначим через A носитель $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ - некоторый класс алгоритмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара отображений (α, γ), где $\alpha : N \xrightarrow{на} A$ и $\gamma : A \to N$, называется $\mathcal{B}$-конструктивизацией модели $\mathfrak{A}$, если $\alpha \circ \gamma = id_A$, $\gamma \circ \alpha \in \mathcal{B}$ и выполнены условия:

1) для любой сигнатурной функции $F: A^n \to A$ функция $x \mapsto \gamma(F(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n))$ вычислима в $\mathcal{B}$;

2) для любого сигнатурного предиката $P \subseteq A^m$ предикат $\alpha^{-1}[P] \subseteq N^m$ разрешим в $\mathcal{B}$.

Заметим, что практически все классы $\mathcal{B}$ замкнуты относительно усеченной минимизации, т.е. если $f \in \mathcal{B}$, то функция $g(z,\bar{x}) = \inf\{y \le z \mid f(y,\bar{x}) = 0\}$ $\mathcal{B}$ -вычислима. Поэтому определение 4, по существу, не отличается от общепринятого. Не ограничивая общности теоремы, оно освобождает ее доказательство от множества деталей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если (α_1,γ_1) и (α_2,γ_2) - две $\mathcal{B}$-конструктивизации модели $\mathbb{A}$, то отношение $\mathcal{B}$-автосводимости между ними определяется так:

$$(\alpha_1,\gamma_1) \leqslant_{\mathcal{B}} (\alpha_2,\gamma_2) \leftrightarrow_{\text{опр}} (\exists \varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{A})\ \gamma_2 \circ \varphi \circ \alpha_1 \in \mathcal{B} .$$

Модель $\mathbb{A}$ назовем $\mathcal{B}$-автоустойчивой, если она $\mathcal{B}$-конструктивизируема и любые две ее $\mathcal{B}$-конструктивизации $\mathcal{B}$-автосводятся друг к другу.

Основную идею теоремы о неавтоустойчивости можно понять на очень простом примере. Пусть модель $\mathbb{A} = (\mathbb{N};\underline{\mathrm{succ}})$ и $\mathcal{B}$ есть класс $\mathcal{E}^1$ из иерархии Гжегорчика. Воспользуемся тем, что функция $y \mapsto [\log_2(y+1)]$ принадлежит $\mathcal{E}^1$, и построим две не автоэквивалентные конструктивизации для $\mathbb{A}$:

$$\alpha_1 = \gamma_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} ,$$

$$\alpha_2(y) = [\log_2(y+1)], \quad \gamma_2(x) = 2^x - 1 .$$

Это действительно то, что нужно:

$$\gamma_2(\underline{\mathrm{succ}}(\alpha_2(y))) = 2\gamma_2(\alpha_2(y)) + 1 \in \mathcal{E}^1 ,$$

но $\gamma_2 \circ \alpha_1(y) = 2^y - 1 \notin \mathcal{E}^1$.

Таким образом, решающим для $\mathcal{E}^1$ -неавтоустойчивости простейшей модели явилось наличие пары взаимно-обратных отображений, одно из которых лежит в $\mathcal{E}^1$, а другое - нет. Оформим это наблюдение в следующих "условиях тонкости" класса алгоритмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Класс $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ называется тонким,если найдутся такие 1-местные функции $R \in \mathcal{B}$ и $Q \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, что:

1) $(\forall f \in \mathcal{B})$ функция $Q(f(Rz_1,\ldots,Rz_n))$ вычислима в $\mathcal{B}$;

2) $(\forall f \in \mathcal{B}_1) \exists x \ (\forall y \geq x) \quad f(y) < Q(y)$;

3) $R \circ Q = id_N$;

4) R монотонно возрастает.

2. Доказательство теоремы. Теперь будет сформулирована основная

ТЕОРЕМА (о неавтоустойчивости). *Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ - тонкий класс. Тогда для любой $\mathcal{B}$-конструктивизации (α,γ) бесконечной модели $\mathbb{A}$ найдется другая $\mathcal{B}$-конструктивизация (α',γ') для $\mathbb{A}$ такая, что*

$$(\alpha',\gamma') \preccurlyeq_{\mathcal{B}} (\alpha,\gamma) \quad \text{и} \quad (\alpha,\gamma) \not\preccurlyeq_{\mathcal{B}} (\alpha',\gamma').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ - тонкий класс алгоритмов и Q,R - функции из определения 6; $\mathbb{A}$ - модель с бесконечным носителем A и (α,γ) - $\mathcal{B}$-конструктивизация для $\mathbb{A}$.

Положим $\alpha' = \alpha \circ R$, $\gamma' = Q \circ \gamma$ и проверим,что (α',γ') - $\mathcal{B}$-конструктивизация для $\mathbb{A}$, обладающая всеми свойствами, перечисленными в заключении теоремы, точнее,проверим, что:

1) $\alpha' : N \xrightarrow{\text{на}} A$, $\quad \gamma' : A \hookrightarrow N$, $\quad \alpha' \circ \gamma' = id_A$ и $\gamma' \circ \alpha' \in \mathcal{B}$;

2) если $\mathbf{F}: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ - сигнатурная функция, то $\gamma' \circ \mathrm{F}(\alpha' z_1, \ldots, \alpha' z_n)$ $\mathcal{B}$-вычислима;

3) если $\mathrm{P} \subseteq \mathbf{A}^m$ - сигнатурный предикат, то $(\alpha')^{-1}[\mathrm{P}] \subseteq \subseteq \mathrm{N}^m$ $\mathcal{B}$-разрешим;

4) $\gamma \circ \alpha' \in \mathcal{B}$, но $(\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{A})\ \gamma' \circ \varphi \circ \alpha \notin \mathcal{B}$.

Рассмотрим пп. 1)-3). Надо заметить, что $\mathrm{R}: \mathbf{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{N}$ и $\mathrm{Q}: \mathbf{N} \hookrightarrow \mathbf{N}$, это следует из свойства 3 определения 6: $\mathrm{R} \circ \mathrm{Q} = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. Отсюда $\alpha' = \alpha \circ \mathrm{R}: \mathbf{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{A}$, $\gamma' = \mathrm{Q} \circ \gamma: \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{N}$. Обозначив $\mathrm{f} = \gamma \circ \alpha \in \mathcal{B}$ и воспользовавшись свойством 1 определения 6, получим:

$$\gamma' \circ \alpha' = \mathrm{Q} \circ (\gamma \circ \alpha) \circ \mathrm{R} = \mathrm{Q} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{R} \in \mathcal{B},$$

$$\alpha' \circ \gamma' = \alpha \circ (\mathrm{R} \circ \mathrm{Q}) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}.$$

Для сигнатурных $\mathbf{F}: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ и $\mathrm{P} \subseteq \mathbf{A}^m$ проверка аналогична.

Перейдем к п. 4. Очевидно, что $\gamma \circ \alpha' = (\gamma \circ \alpha) \circ \mathrm{R} = \mathrm{f} \circ \mathrm{R} \in \mathcal{B}$. Предположим, что для некоторого $\varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{A}$ функция $\mathrm{h} = \gamma' \circ \varphi \circ \alpha$ вычислима в $\mathcal{B}$. Тогда $\forall \mathbf{x}\ \mathrm{h}(\mathbf{x}) = \mathrm{Q} \circ \gamma \circ \varphi \circ \alpha(\mathbf{x}) = \mathrm{Q} \circ \mathrm{u}(\mathbf{x})$, где $\mathrm{u}(\mathbf{x}) = \gamma \circ \varphi \circ \alpha(\mathbf{x})$. Функция u не обязана быть $\mathcal{B}$-вычислимой, но мы покажем ниже, что $\exists^\omega \mathbf{x}\ \mathrm{u}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$. Заметим, что из монотонности R и равенства $\mathrm{R} \circ \mathrm{Q} = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ вытекает монотонность функции Q. Значит, $\exists^\omega \mathbf{x}\ \mathrm{h}(\mathbf{x}) = \mathrm{Q} \circ \mathrm{u}(\mathbf{x}) \geq \mathrm{Q}(\mathbf{x})$, а это противоречит свойству 2 из определения 6. Таким образом, доказано, что $\gamma' \circ \varphi \circ \alpha \notin \mathcal{B}$.

Осталось показать, что $\exists^\omega \mathbf{x}\ \mathrm{u}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$. Обозначим $\mathbf{X} = \gamma[\mathrm{A}] \subseteq \mathbf{X}$. Тогда $\psi = \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ - биекция. Ввиду нижеследующей леммы 1 и в силу бесконечности множества $\mathbf{X}$, имеем: $(\exists^\omega \mathbf{x} \in \mathbf{X})\ \psi(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$. Но $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X})\ \gamma \circ \alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, значит,

$$(\exists^\omega \mathbf{x} \in \mathbf{X})\ \mathrm{u}(\mathbf{x}) = \psi \circ \gamma \circ \alpha(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}.$$

Доказательство теоремы завершено.

Лемму 1 мы приводим без доказательства, так как оно носит технический характер.

ЛЕММА 1. *Если* $\theta\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *- биекция, то* $\forall x$ $(\exists y \geq x)$ $\theta y \geq y$.

В остальных параграфах статьи доказывается, что теорема о $\mathcal{B}$-неавтоустойчивости применима к классам $\mathcal{E}$ "эффективных" и $\mathcal{H}$ "наследственно эффективных" алгоритмов.

§3. Эффективные алгоритмы

Здесь мы покажем, что класс $\mathcal{E}$ - "эффективных" алгоритмов - тонкий, т.е. что найдутся $R \in \mathcal{E}_1$ и $Q \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{E}$, удовлетворяющие условиям:

1) $(\forall f \in \mathcal{E})\quad Q \circ f(Rz_1, \ldots, Rz_n) \in \mathcal{E}$;

2) $(\forall f \in \mathcal{E}_1)\quad f \lessapprox Q$;

3) $R \circ Q = id_{\mathbf{N}}$;

4) R монотонна.

<u>1. Функции R и Q</u>. Для построения алгоритмов R и Q мы воспользуемся оператором инверсии $\underline{\mathrm{Inv}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, выразив его через операции сигнатуры σ_1:

$$\underline{\mathrm{Inv}}(h)\colon (z, \bar{x}) \mapsto \inf\{y \mid h(y, \bar{x}) \geq z\}.$$

В предложении 1 перечислены некоторые свойства оператора, необходимые нам в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* $h\colon \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ *строго 1-монотонна и 1-монотонная функция* $u\colon \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ *такова, что*

$$\left.\begin{aligned} &h(0, \bar{x}) \leq u(0, \bar{x}), \\ &h(y+1, \bar{x}) \leq u(h(y, \bar{x}), \bar{x}). \end{aligned}\right\}$$

Тогда функция $g = \underline{Inv}(h)$ *всюду определена и справедливы следующие условия:*

1) g *1-монотонна;*

2) $g(h(y,\bar{x}),\bar{x}) = y;$

3) $h(g(z,\bar{x}),\bar{x}) \leq u(z,\bar{x}):$

4) $g(z+1,\bar{x}) \leq g(z,\bar{x}) + 1.$

(Здесь использованы понятия: $g: N^{n+1} \to N$ 1-монотонно, если $y_1 \leq y_2 \Rightarrow g(y_1,\bar{x}) \leq g(y_2,\bar{x})$ и $h: N^{n+1} \to N$ строго 1-монотонно, если $y_1 < y_2 \Rightarrow h(y_1,\bar{x}) < h(y_2,\bar{x})$.)

Из-за тривиальности доказательство предложения 1 мы опускаем. (Точно так же мы будем поступать и далее: необходимые технические утверждения будут явно сформулированы, но их проверка оставлена читателю.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Алгоритмы Q и R определяются еще с помощью двух вспомогательных функций q и r :

1) $q(x) = p^x(0)$, $r(y) = \inf\{x \mid q(x) \geq y\};$

2) $Q(y) = p^{r(y)}(y)$, $R(z) = \inf\{y \mid Q(y) \geq z\}.$

Тривиальным следствием предложения 1 является

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы утверждения: а)* $R: N \to N$ - *монотонно; б)* $R \circ Q = id_N$.

Для ее доказательства достаточно применить предложение 1 к функции $r = \underline{Inv}(q)$, а затем - к $R = \underline{Inv}(Q)$. Одновременно получаются еще два утверждения, которые нам потребуются в дальнейшем:

а') $r: N \to N$ - монотонно; б') $r \circ q = id_N$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого* $g \in \mathcal{E}_1$ *выполняется* $g \lesssim Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это почти очевидное утверждение следует из аксиом 1.6, 2.3 и 3.3. По аксиоме 1.6, $(\exists h \in C)\ g \leq \hat{g}+h.$

Из $g \in \mathcal{E}$ следует, что $\hat{g} \in \mathcal{C}$. Значит, по аксиоме 2.3, $\varkappa(g) \in \mathcal{C}$. По аксиоме 3.3, $\exists k$ $\varkappa(g) \le p^k$. Но $r \circ q = id_N$ и r монотонна, значит, $\exists x\ (\forall y \ge x)\ r(y) \ge k$. Таким образом, $\exists x\ (\forall y \ge x)\ g(y) \le p^k(y) \le p^{r(y)}(y) = Q(y)$.

Что и требовалось доказать.

Читателю предоставляется самому доказать предложение 2 (пп. 1,2 - индукцией по x, п.3 - по y, п.4 - прямой проверкой, пп.5,6 - по предложению 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполняются соотношения:*

1. $\sum\limits_{i=0}^{x} p^i(y) \le p^{x+1}(y)$;
2. $x \cdot y \le 2^x \cdot y \le p^x(y)$;
3. $r(p(y)) = r(y) + 1$;
4. $Q(p(y)) = p^2(Q(y))$;
5. $Q \circ R(z) \le p^2(z)$;
6. $q \circ r(y) \le p(y)$.

2. Q–R-преобразование. Теоремами 1 и 2 доказаны свойства 2)-4) из списка, перечисленного в начале §3. Таким образом, нам осталось доказать свойство 1), а именно показать, что Q–R-преобразование, ставящее в соответствие каждому алгоритму $f \in \mathcal{E}$ алгоритм $F: \bar{z} \in N^n \mapsto Q(f(Rz_1, \dots, Rz_n))$, не выводит за пределы класса $\mathcal{E}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f \in \mathcal{E}$ *и* $F(\bar{z}) = Q \circ f(Rz_1, \dots, Rz_n)$, *то* $F \in \mathcal{E}$.

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы, приведем несколько простых фактов, которые нам потребуются далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы утверждения:*

1) $(\forall g \in \mathcal{C})(\exists h \in \mathcal{C})$ [$g \le h$ *и* h *монотонна*];

2) $(\forall g \in C_n)\ \exists t\ (\forall x_1, \dots, x_n)\quad g(\bar{x}) \le$
$\le p^t(x_1 + \dots + x_n)$.

Функция $h\colon \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ называется монотонной, если

$$x_1 \le y_1 \wedge \dots \wedge x_n \le y_n \Rightarrow h(\bar{x}) \le h(\bar{y}) .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любых* $g, h \in \mathcal{A}$ *верно:*

1) $g \le h \Rightarrow g \lesssim h \Rightarrow g \lesssim_C h$;

2) *если* $g \lesssim_C h$ *и* $h \in C$, *то* $g \in C$;

3) *если* $g_1 \lesssim_C h_1$ *и* $g_2 \lesssim_C h_2$, *то* $g_1 + g_2 \lesssim_C$
$\lesssim_C h_1 + h_2$;

4) *если* $g \lesssim_C h$ *и* $f \in C$, *то* $g \circ f \lesssim_C h \circ f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если* $h = \underline{\mathrm{Inv}}(g)$, *то*

$$\hat{h}(z, \bar{x}) \lesssim_C \sum_{y=0}^{h(z,\bar{x})} \hat{g}(y, \bar{x}) .$$

Теорема 3 опирается на две следующие леммы.

ЛЕММА 2. *Для алгоритмов* q *и* r *справедливо:*

1) $\hat{q} \lesssim_C p^k \circ q$ *для некоторого* $k \in \mathbf{N}$;

2) $\hat{r} \in C$.

ЛЕММА 3. *Алгоритмы* Q, R *таковы, что*

1) $\hat{Q} \lesssim_C p^k \circ Q$ *для некоторого* $k \in \mathbf{N}$;

2) $\hat{R} \in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Необходимо показать, что $\hat{F} \in C$.
По аксиоме 1.1, имеем оценку

$$\hat{F}(\bar{z}) \lesssim_C \hat{Q} \circ f(Rz_1, \dots, Rz_n) + \hat{f}(Rz_1, \dots, Rz_n) + \\ + \hat{R}(z_1) + \dots + \hat{R}(z_n).$$

Но, по лемме 3, $\hat{R} \in C$, значит,

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C \hat{Q} \circ f(Rz_1, \ldots, Rz_n) + \hat{f}(Rz_1, \ldots, Rz_n),$$

так как отношение $\precsim_C$ не чувствительно к слагаемым класса $\mathcal{C}$. Далее, по аксиоме 1.6, $R \precsim_C \hat{R}$; а $\hat{R} \in \mathcal{C}$, значит, $R \in \mathcal{C}$, и, таким образом, $\hat{f}(Rz_1, \ldots, Rz_n) \in \mathcal{C}$ ($\hat{f} \in \mathcal{C}$ по условиям теоремы). Следовательно, можно отбросить еще одно слагаемое

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C \hat{Q} \circ f(Rz_1, \ldots, Rz_n).$$

Далее, замечая, что $f(Rz_1, \ldots, Rz_n) \in \mathcal{C}$ и учитывая, что, по лемме 3, $\hat{Q} \precsim_C p^k \circ Q$, получаем:

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C p^k \circ Q \circ f(Rz_1, \ldots, Rz_n).$$

По предложению 3, $\exists t \;\; f(y_1, \ldots, y_n) \le p^t(y_1 + \ldots + y_n)$, а, по предложению 2, $Q \circ p = p^2 \circ Q$. Значит,

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C p^k \circ Q \circ p^t(Rz_1 + \ldots + Rz_n) =$$

$$= p^{k+2t} \circ Q(Rz_1 + \ldots + Rz_n).$$

Положим $z = \max\{z_1, \ldots, z_n\}$, тогда

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C p^{k+2t} \circ Q(n \cdot Rz) \le p^{k+2t} \circ Q \circ p^n(Rz) =$$

$$= p^{k+2t+2n} \circ Q(Rz)$$

(мы воспользовались предложением 2 и монотонностью Q). Но $Q \circ R \le p^2$, значит,

$$\hat{F}(\bar{z}) \precsim_C p^{k+2t+2n+2}(\max\{z_1, \ldots, z_n\}) \le p^{const}(z_1 + \ldots + z_n).$$

Таким образом, $\hat{F} \in \mathcal{C}$. Что и требовалось доказать.

Осталось доказать леммы 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. П.1): требуется доказать, что $\hat{q} \precsim_C p^k \circ q$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим функцию

$g(x,y)=p^x(y)$ и покажем, что $\hat{g}\lesssim_C p^k\circ g$; отсюда будет следовать требуемое, так как $q(x)=p^x(0)=g(x,0)$. (Мы воспользовались аксиомой 1.1.)

По определению, $g=\mathcal{R}(g_0,g_1)$, где $g_0(y)=y$, $g_1(z,x,y)=p(z)$. По аксиоме 1.2, имеем

$$\hat{g}(x,y)\lesssim_C \hat{g}_0(y)+\sum_{i=0}^{x-1}\hat{g}_1(g(i,y),i,y).$$

Но $\hat{g}_1\in C$, значит, $\exists l$ $\hat{g}_1(z,x,y)\le p^l(z+x+y)\le$ $\le p^{l+3}(\max\{z,x,y\})$. Заметив, что $g(x,y)\ge\max\{x,y\}$, получаем:

$$\hat{g}(x,v)\lesssim_C \sum_{i=0}^{x-1}\hat{g}_1(g(i,y),i,y)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{x-1}p^{l+3}(g(i,y))=\sum_{i=0}^{x-1}p^{l+3+i}(y).$$

Увеличим число слагаемых, обозначив $k=l+3$:

$$\hat{g}(x,y)\lesssim_C\sum_{j=0}^{k+x-1}p^j(y)\le p^{x+k}(y)=p^k\cdot g(x,y).$$

(Мы воспользовались предложением 2.)

Докажем п.2 : $\hat{r}\in C$. Оценим сложность алгоритма $r=\underline{\mathrm{Inv}}(q)$:

$$\hat{r}(y)\lesssim_C\sum_{x=0}^{r(y)}\hat{q}(x)\lesssim_C\sum_{x=0}^{r(y)}p^k\circ q(x).$$

Так как $r:\mathbf{N}\xrightarrow{\text{на}}\mathbf{N}$, то можем увеличить число слагаемых:

$$\hat{r}(y)\lesssim_C\sum_{x=0}^{r(y)}p^k\circ q(x)\le\sum_{i=0}^{y}p^k\circ q(r(i)).$$

По предложению 2, $q \circ r \leq p$, значит,

$$\hat{r}(y) \lesssim_{\mathcal{C}} \sum_{i=0}^{y} p^{k+1}(i).$$

Класс $\mathcal{C}$ замкнут по суммированию, следовательно, $\hat{r} \in \mathcal{C}$.

Лемма 3 доказывается аналогично.

§4. Наследственно эффективные алгоритмы

В предыдущем параграфе мы доказали, что класс "эффективных" алгоритмов $\mathcal{E}$ - тонкий. Теперь мы покажем, что и класс "наследственно эффективных" алгоритмов $\mathcal{H}$ тоже тонкий (в этом случае используются те же функции Q и R):

0) $R \in \mathcal{H}$;

1) $(\forall f \in \mathcal{H}) \quad Q \circ f(Rz_1, \ldots, Rz_n) \in \mathcal{H}$;

2) $(\forall f \in \mathcal{H}_1) \quad f \lesssim Q$;

3) $R \circ Q = id_{\mathbf{N}}$;

4) R монотонна.

Поскольку здесь нетривиальны только пп. 0) и 1), то мы и их будем доказывать.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы утверждения:*

0) $R \in \mathcal{H}$;

1) если $f \in \mathcal{H}$ *и* $F(\overline{z}) = Q(f(Rz_1, \ldots, Rz_n))$, *то* $F \in \mathcal{H}$.

Для доказательства воспользуемся следующими двумя леммами, проясняющими свойства класса $\mathcal{H}$. Напомним определение операции ограниченной рекурсии $\hat{\mathcal{R}}: \mathcal{A}^2 \multimap \mathcal{A}$:

$$g = \hat{\mathcal{R}}(g_0, g_1) \Leftrightarrow g = \mathcal{R}(g_0, g_1) \text{ и } \hat{g} \in \mathcal{C}.$$

ЛЕММА 4 (о суперпозиции). *Пусть* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *замкнут по* $\hat{\mathcal{R}}$. *Тогда из*

$$h = S_{n+1}(f;\ g_0, g_1, \ldots, g_n),$$

$$f = \mathcal{R}(f_0, f_1),$$

$$f_0, f_1, g_0, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{E},$$

f *1-монотонна,*

$$\hat{h} \in \mathcal{C}$$

следует, что $h \in \mathcal{B}$.

ЛЕММА 5 (о пределе). *Пусть* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *замкнут по* $\hat{\mathcal{R}}$. *Тогда из*

$$f = \mathcal{R}(f_0, f_1),$$

$$f_0, f_1 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C},$$

f *1-монотонна*

следует:

$$(\exists g \in \mathcal{B}) \quad \begin{cases} z \le g(z, y, \bar{x}) \leftrightarrow z \le f(y, \bar{x}), \\ g \text{ 1-монотонна.} \end{cases}$$

Здесь $f(y, \bar{x}) = \lim\limits_{z \to \infty} g(z, y, \bar{x})$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4. В §3 показано, что

1) $\hat{r} \in \mathcal{C}$, $\hat{R} \in \mathcal{C}$;

2) $\hat{F} \in \mathcal{C}$.

Пункт 0): $R \in \mathcal{H}$. По лемме 5, $(\exists u \in \mathcal{H})$ $[y \le u(y,x) \leftrightarrow y \le q(x) = p^x(0)]$. Значит, $r = \hat{\mathfrak{M}}(v) \in \mathcal{H}$, где $v(y,x) = y \dot{-} u(y,x)$. Аналогично $(\exists g \in \mathcal{H})$ $[z \le g(z,x,y) \leftrightarrow z \le p^x(y)]$. Поэтому $R = \hat{\mathfrak{M}}(h) \in \mathcal{H}$, где $h(y,x) = z \dot{-} g(z, r(y), y)$.

Пункт 1): $F \in \mathcal{H}$. Достаточно применить лемму 4, тогда $F(\bar z) = u(g_0(\bar z), g_1(\bar z))$, где $u(x,y) = p^x(y)$, $g_0(\bar z) = r(g_1(\bar z))$, $g_1(\bar z) = f(Rz_1, \dots, Rz_n)$.

Доказательство теоремы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4. Пусть выполнены условия леммы; покажем, что $h \in \mathcal{B}$. Имеем: $h(\bar z) = f(g_0(\bar z), g_1(\bar z), \dots, g_n(\bar z))$ и

$$\left.\begin{aligned} f(0,\bar x) &= f_0(\bar x), \\ f(y+1,\bar x) &= f_1(f(y,\bar x), y, \bar x). \end{aligned}\right\}$$

Определим новую функцию $\varphi = \mathcal{R}(\varphi_0, \varphi_1)$, где

$$\varphi_0(\bar z) = f_0(g_1(\bar z), \dots, g_n(\bar z)),$$

$$\varphi_1(a,y,z) = \underline{\mathrm{if}}[y \le g_0(\bar z);\ f_1(a,y,g_1(\bar z), \dots, g_n(\bar z));\ 0]$$

(функция $\underline{\mathrm{if}}$ - из сигнатуры σ_0, см. §1). По построению имеем:

1) $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{B}$;

2) $(\forall y \le g_0(\bar z))\quad \varphi(y,\bar z) = f(y, g_1(\bar z), \dots, g_n(\bar z))$.

В частности, поскольку f монотонна по первому аргументу, то

3) $h(z) = \varphi(g_0(\bar z), \bar z)$,

4) $(\forall y \le g_0(\bar z))\quad \varphi(y,\bar z) \le h(\bar z)$.

Таким образом, достаточно показать, что $\hat\varphi \in \mathcal{C}$. По аксиоме 1.2 из §1 имеем:

$$\hat\varphi(y,\bar z) \lesssim_C \hat\varphi_0(\bar z) + \sum_{i=0}^{y-1} \hat\varphi_1(\varphi(i,\bar z), i, \bar z).$$

Существует 1-монотонная $\psi_1 \in \mathcal{C}$ такая, что $\hat\varphi_1 \le \psi_1$ (аксиома 2.2). Отбросим $\hat\varphi_0 \in \mathcal{C}$ и огрубим остальные слагаемые оценки:

$$\hat{\varphi}(y,\bar{z}) \leqslant_C \sum_{i=0}^{y-1} \psi_1(\varphi(i,\bar{z}),i,\bar{z}) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{y-1} \psi_1(h(\bar{z}),i,\bar{z}) \le \sum_{i=0}^{y} \psi(i,\bar{z}).$$

Здесь $\psi(i,\bar{z}) = \psi_1(h(\bar{z}),i,\bar{z})$, $\psi \in \mathcal{C}$. По аксиоме 2.2, $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}$. Что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} f(0,\bar{x}) &= f_0(\bar{x}), \\ f(y+1,\bar{x}) &= f_1(f(y,\bar{x}),y,\bar{x}). \end{aligned}\right\}$$

Полагаем:

$$\left.\begin{aligned} g(z,0,\bar{x}) &= g_0(z,\bar{x}), \\ g(z,y+1,\bar{x}) &= g_1(g(z,y,\bar{x}),z,y,\bar{x}), \end{aligned}\right\}$$

где

$g_0(z,\bar{x})=[$ если $f_0(\bar{x}) \le z$, то $f_0(\bar{x})$, иначе $z+1]$,

$g_1(a,z,y,\bar{x})=[$если $a \le z \wedge f_1(a,y,\bar{x}) \le z$, то $f_1(a,y,\bar{x})$, иначе $z+1]$.

По построению, $g_0, g_1 \in \mathcal{B}$ и

$$g(z,y,\bar{x}) = \begin{cases} f(y,\bar{x}), & \text{если } f(y,\bar{x}) \le z, \\ z+1 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

1) $g(z,y,\bar{x})$ монотонна по z;

2) $z \le g(z,y,\bar{x}) \leftrightarrow z \le f(y,\bar{x})$.

Ввиду замкнутости $\mathcal{B}$ по $\hat{\mathcal{R}}$, достаточно показать, что $\hat{g} \in \mathcal{C}$:

$$\hat{g}(z,y,\bar{x}) \leqslant_C \hat{g}_0(z,\bar{x}) + \sum_{i=0}^{y-1} \hat{g}_1(g(z,i,\bar{x}),z,i,\bar{x}) \leqslant_C$$

$$\leqslant_C \sum_{i=0}^{y} \psi_1(z+1, z, i, \bar{x}),$$

здесь $\psi_1 \in \mathcal{C}$, ψ_1 1-монотонна и $\hat{g}_1 \leq \psi_1$. Значит, $\hat{g} \in \mathcal{C}$.

§5. Основные примеры

В начале статьи утверждается, что при удачном подборе алгоритмического универсума, меры сложности и критерия эффективности класс $\mathcal{E}$ совпадает с классом полиномиально вычислимых функций, а класс $\mathcal{H}$ - с одним из классов Гжегорчика $\mathcal{E}^n$, $n \geq 2$. Ниже мы уточним и обоснуем это утверждение.

1. Натуральные процессоры. В качестве основного примера алгоритмического универсума мы рассмотрим класс так называемых "натуральных процессоров", за меру сложности алгоритма примем время его работы, а критерием эффективности будет полиномиальность времени счета.

Натуральным процессором будем называть некую гипотетическую машину, имеющую:

A: конечный набор регистров $r_1, \ldots, r_n$, способных запоминать произвольные натуральные числа;

B: программу - конечную последовательность команд $c_1, \ldots, c_m$, вида:

1) copy $x \mapsto y$ - копирование из регистра x в y;

2) clear x - обнуление регистра x;

3) inc x - увеличение содержимого x на 1;

4) dec x - уменьшение содержимого, если $x > 0$;

5) if x, k - переход к команде c_k, если $x = 0$;

6) $\underline{go}$ k - безусловный переход к c_k .

Часть регистров натурального процессора помечена как входные и еще один - как выходной.

Работа процессора состоит из следующих этапов:

1) загрузка - во входные регистры загружаются аргументы,а все остальные регистры, включая выходной, обнуляются;

2) счет - исполняются команды программы, начиная с первой; их последовательность может нарушаться командами перехода;

3) останов - процессор останавливается, если встретит команду перехода по несуществующему адресу или выполнит последнюю команду программы.

Результат считывается из выходного регистра после остановки процессора, если же машина не останавливается - результат не определен.

Меру сложности $\hat{f}(\bar{x})$ положим равной числу команд, выполненных процессором f при вычислении $f(\bar{x})$. В критерий эффективности включим все функции, растущие не быстрее чем полиномы:

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F} \mid (\exists P - \text{полином})\ f \le P\}.$$

Функцию $p \in \mathcal{C}_1$ из аксиомы 3 определим равенством $p(x) = (x+1)^2$. Осталось определить, как операции сигнатуры σ_1 действуют на множестве натуральных процессоров, и убедиться, что выполняются все пункты аксиомы 1 (справедливость аксиом 2 и 3 очевидна).

Рассмотрим самый трудный случай - примитивную рекурсию. Пусть процессоры $F_0, F_1 \in \mathcal{A}$ вычисляют функции $f_0, f_1 \in \mathcal{F}$, построим процессор F , вычисляющий функцию $f = \mathcal{R}(f_0, f_1)$:

$\underline{\text{processor}}$ $F: (y, x_1, \ldots, x_n) \mapsto z$

$\underline{\text{registers}}$ $s, s', x_1', \ldots, x_n', z', r_{01}, \ldots, r_{0k}$, $r_{11}, \ldots, r_{1l}$

1. $\underline{\text{copy}}\ x_1 \mapsto x_1'; \ldots ; \underline{\text{copy}}\ x_n \mapsto x_n'$

2. $F_0(x_1', \ldots, x_n') \mapsto z$

3. $\underline{\text{if}}\ y, 0$

4. $\underline{\text{copy}}\ s \mapsto s'; \underline{\text{copy}}\ x_1 \mapsto x_1'; \ldots ; \underline{\text{copy}}\ x_n \mapsto x_n';$ $\underline{\text{copy}}\ z \mapsto z'$

5. $\underline{\text{clear}}\ r_{11}; \ldots ; \underline{\text{clear}}\ r_{1l}; \underline{\text{clear}}\ z$

6. $F_1(z', s', x_1', \ldots, x_n') \mapsto z$

7. $\underline{\text{inc}}\ s; \underline{\text{dec}}\ y$

8. $\underline{\text{go}}\ 3$

Подразумевается, что строки 2 и 6 надо развернуть, т.е. вписать в них программы процессоров F_0 и F_1, используя в качестве их входных и выходных регистров указанные регистры, а в качестве внутренних - соответственно $r_{01}, \ldots, r_{0k}$ и $r_{11}, \ldots, r_{1l}$.

Оценим сложность вычисления $F(y,\bar{x})$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \hat{F}(0,\bar{x}) &= \hat{F}_0(\bar{x}) + (n+1), \\ \hat{F}(y+1,\bar{x}) &= \hat{F}(y,\bar{x}) + \hat{F}_1(F(y,\bar{x}),y,\bar{x}) + (n+1+6). \end{aligned}\right\}$$

Значит,

$$\hat{F}(y,\bar{x}) \le \hat{F}_0(\bar{x}) + \sum_{s=0}^{y-1} \hat{F}_1(F(y,\bar{x}),y,\bar{x}) + (n+1+6)(y+1),$$

т.е. аксиома 1.2 выполнена.

Проверку аксиом 1.1 и 1.3-1.5 автор оставляет читателю; обсудим аксиому 1.6: $(\forall f \in \mathscr{A})\quad u(f) \preccurlyeq_C \hat{f}$. В нашем случае это так потому, что содержимое регистров натурального процессора можно увеличить только путем многократного прибавления единицы, поэтому

$$F(x) \leq \hat{F}(x) + \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Таким образом, класс функций, вычислимых на натуральных процессорах за полиномиальное время, - частный случай "эффек - тивного" класса $\mathcal{E}$, и, значит, к нему применима теорема о не-автоустойчивости.

2. Классы Гжегорчика. Теперь мы убедимся, что класс Гже - горчика $\mathcal{E}^n$ при любом $n \geq 2$ может служить примером класса "наследственно эффективных" алгоритмов $\mathcal{H}$.

В этом пункте мы положим $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ и $\varkappa = \hat{\cdot} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ - функции отождествляются с алгоритмами, а мерой сложности слу - жит скорость их роста.

В наших терминах класс Гжегорчика $\mathcal{E}^n$, $n \in \mathbf{N}$, есть наименьшая σ_0-подалгебра класса $\mathcal{F}$, замкнутая относительно операций ограниченной рекурсии и ограниченной минимизации и содержащая функцию $f_n : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, определяемую соотношения - ми:

$$\begin{aligned}
f_0(x,y) &= y+1, \\
f_1(x,y) &= x+y, \\
f_2(x,y) &= (x+1)(y+1), \\
f_{k+3}(0,y) &= f_{k+2}(y+1, y+1), \\
f_{k+3}(x+1,y) &= f_{k+3}(x, f_{k+3}(x,y)).
\end{aligned}$$

Гжегорчик [1] показал, что для любого $n \geq 2$:

1) $g \in \mathcal{E}^n \wedge h(y,\bar{x}) = \sum_{i=0}^{y} g(i,\bar{x}) \Rightarrow h \in \mathcal{E}^n$;

2) $(\forall g \in \mathcal{E}_1^n)\ \exists t\ \forall x \quad g(x) < f_{n+1}(t,x)$.

Заметим при этом, что $f_{n+1}(t,x) = p^{2^t}(x)$, где $p(x) = f_{n+1}(0,x) = f_n(x+1,x+1)$.

Значит, положив $C = \{h \in \mathcal{F} \mid (\exists g \in \mathcal{E}^n) \quad h \le g\}$, $p(x) = f_n(x+1,x+1)$, мы удовлетворим требованиям аксиом 2 и 3. Прямая проверка показывает, что выполняются также все пункты аксиомы 1.

Таким образом, классы Гжегорчика $\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3, \ldots$ - частные случаи класса "наследственно эффективных" алгоритмов $\mathcal{H}$.

Примечание при корректуре.

Когда статья готовилась к публикации, автору стало известно, что теорема о полиномиальной неавтоустойчивости (правда, только для моделей с чисто предикатной сигнатурой) независимо доказана Цензером и Реммелом [2]. Таким образом, данная статья теряет часть новизны.

В свое оправдание автор может только сказать, что наличие функциональных символов в сигнатуре - принципиальная деталь. Так, можно показать, что всякая ОРФ-конструктивизируемая модель конечной чисто предикатной сигнатуры $\mathcal{E}^0$ -конструктивизируема. С другой стороны, для модели $\langle \mathbf{N}; \exp \rangle$, например, не существует, по-видимому, даже полиномиальной конструктивизации.

Автор выражает свою признательность профессору С.С.Гончарову за плодотворное научное руководство.

Литература

1. ГЖЕГОРЧИК А. Некоторые классы рекурсивных функций // Проблемы математической логики. -М.: Мир, 1970. -С. 9-49.

2. CENZER D., REMMEL J. Polynomial-time complexity of models //Association for Symbolic Logic, Annual meeting, Univ. of California, Los Angeles, January 14-17, 1989.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Мир, 1980.

4. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. -М.: Мир, 1972.

5. КОСОВСКИЙ Н.К. Основы теории элементарных алгоритмов. - Л., 1987 (Изд. Ленинградского ун-та).

6. БЛЮМ М. Об эффективных процедурах для ускоряющих алгоритмов //Сложность вычислений и алгоритмов. - М.: Мир, 1974. - С. 127-149.

7. САЗОНОВ В.Ю. Ограниченная теория множеств, полиномиальная вычислимость и Δ-программирование //Прикладные аспекты математической логики. - Новосибирск. - 1987. - Вып. 122: Вычислительные системы. -С. 110-132.

8. ВЕНЦОВ Ю.Г. Семейство рекурсивно-перечислимых множеств с конечными классами неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций //Логические методы в программировании. - Новосибирск. - 1987. -Вып. 120: Вычислительные системы. -С. 105-142.

9. ГОНЧАРОВ С.С. Проблема числа не автоэквивалентных конструктивизаций //Алгебра и логика. - 1980. - Т.19, № 6. -С.621-639.

10. Логическая тетрадь: Нерешенные вопросы математической логики (оперативно-информационный материал). - Новосибирск. - 1986. - 41 с. (АН СССР, Сиб.отд., Ин-т математики).

11. ГОНЧАРОВ С.С., ДЗГОЕВ В.Д. Автоустойчивость моделей.- Алгебра и логика. - 1980. -Т. 19, № 2. -С. 45-58.

Поступила в ред.-изд.отд.

21 июня 1989 года