СИСТЕМОЛОГИЯ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 135

УДК 517.948:530.1:539.12

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ - ПОДХОД ЧЕРЕЗ ПОЛУРИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

Р.И. Пименов

1. Постановка задачи. Классическая электродинамика (без квантовых эффектов и в неискривленном пространстве) описывается математически парой $(g_{\alpha\beta}, A_\alpha)$, где $g_{\alpha\beta}$ - метрический тензор псевдоевклидова пространства ${}^3R_4$, т.е. $g_{\alpha\beta} = \pm\delta_{\alpha\beta}$, а A_α - "ковектор-потенциал", т.е. класс векторов, определенных с точностью до "калибровочного преобразования":

$$A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha f, \qquad 1 \le \alpha \le 4. \tag{1}$$

Через A_α стандартно выражается электромагнитное поле $F_{\alpha\beta} = A_{[\alpha,\beta]}$.

Целью статьи является дать такую математически корректную геометрическую модель, которая при определенном выборе параметров точно совпала бы с классической электродинамикой в указанном смысле. Следующей задачей является показ возможностей этой модели при варьировании ее параметров для описания других физических взаимодействий.

2. Обоснование постановки задачи. Геометрические описания электромагнетизма ведутся со времен Калуцы-Клейна в виде пятимерного пространства V_5 (см. [1-3]). Но они и не корректны математически, и не решают указанной задачи. Именно во всех этих теориях добавочно появляется "скалярное поле", которого

нет в классическом случае. Следовательно, получаемая теория не является обобщением классики, а лишь приблизительно совпадает с классикой; ведь "обобщением" можно назвать только такую модель, которая при определенных значениях параметров точно совпадает с исходной. Далее, в распространенных теориях типа Калуцы-Клейна 4-мерное пространство-время не может быть евклидовым - оно обязано иметь ненулевую кривизну, иначе $A_\alpha = \text{const}$. Следовательно, классика целиком ускользает из этих моделей. Условия $\partial_5 g_{\alpha\beta} = 0$, $\partial_5 A_\alpha = 0$, $g_{55} = 1$ и другие неинвариантны в этих теориях, как координатные. Напомним, что риманова геометрия оправдана только при допущении всех координатных преобразований, иначе оказываются недоказанными некоторые фундаментальные ее теоремы. Поэтому в рамках римановой геометрии ограничения на системы координат незаконны, если их корректность не доказана инвариантно. Сужение класса допустимых многообразий многообразиями вида $M_4 \times S^1$, т.е. исключение $M_4 \times R^1$ и переменных гомотопических типов, выглядит неестественным, ибо нарушает локальность изучения, столь характерную для римановых пространств. Наконец, выбор сигнатуры метрики для V_5 в виде (+----) в переводе на язык физических размерностей означает, что электричество измеряется будто в метрах, а в виде (+---+) оно измеряется будто в секундах, что в обоих случаях неестественно - оно должно измеряться в кулонах (см. также [3]). В то же время, оставаясь в рамках римановой геометрии, иной сигнатуры взять нельзя.

При нашем подходе сигнатура будет (+---0), что даст электричеству возможность не быть ни пространством, ни временем. Кроме того, обычный риманов подход вводит неинтерпретируемые физические функции $\Gamma^5_{5\alpha}$ и $\Gamma^5_{\alpha\beta}$, чего у нас не будет. Тот частный случай, который у нас точно совпадает с $(g_{\alpha\beta}, A_\alpha)$, можно будет при изменении параметров нашей теории видоизменять-обобщать как по размерности, так и по кривизне, впуская дополнительные скалярные или векторные поля. Комплексификацией, возникающей при рассмотрении квантовых эффектов, мы не занимаемся; ее можно проводить, как в [2], но налагая не на риманову невырожденную геометрию, а на полуриманову. Поэтому у нас группы SO, а не SU.

3. Полуриманова геометрия. Нашей моделью будет полуриманова геометрия ${}^3V_5^4$, а в общем случае – ${}^{l_0 l_1 \ldots l_r}V_n^{m_1 \ldots m_r}$.

Напомним, в главном, устройство полуримановой геометрии V_n^m. Для гладкого многообразия M_n определяется его гладкая проекция $\pi : M_n \to M_m$ на другое гладкое многообразие M_m, $m<n$. Тогда для каждой точки $p \in M_n$ возникает слой $W_{n-m} = \pi^{-1}\pi p$. В распространенных теориях фактически слоями служат координатные линии x^5; в нашем общем подходе через отношение порядка [11] проекция (факторизация) осуществляется посредством отношения эквивалентности, порождаемого отношением порядка; но для развиваемой ниже теории происхождение проекции π безразлично. Многообразие M_m называется "базой расслоения". Полезно помнить, что $M_m \not\subset M_n$, тогда как $W \subset M_n$. Допускаются только те геометрические объекты, которые согласуются с этой проекцией-расслоением π, в частности, только координатные преобразования вида:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= f^{\alpha}(x^1,\ldots,x^m), \qquad 1 \le \alpha \le m,\\ x^{\mu'} &= f^{\mu}(x^1,\ldots,x^m,x^{m+1},\ldots,x^n),\ m+1 \le \mu \le n.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Обозначая стандартно $D_k^{i'} = \partial_k x^{i'} = \partial x^{i'}/\partial x^k$, $1 \le i,k \le n$, перепишем (2) в равносильном виде:

$$D_{\mu}^{\alpha'} = 0, \quad D_{\mu'}^{\alpha} = 0, \qquad \alpha \le m < \mu. \tag{3}$$

Далее всюду используются указанные здесь диапазоны для индексов α, β, μ, ν и i, k. В базе M_m вводится невырожденная метрика $g_{\alpha\beta}$, компоненты которой зависят только от m переменных из базы:

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha, \beta \le m < \mu. \tag{4}$$

Согласно (3) это условие инвариантно: $\partial_{\mu'} = D^\alpha_{\mu'}\partial_\alpha + D^\mu_{\mu'}\partial_\mu = D^\mu_{\mu'}\partial_\mu$. Кроме того, в слое W вводится метрика $g_{\mu\nu}$, компоненты которой зависят уже от всех n переменных из M_n. Мы получили $m^2 + (n-m)^2 = n^2 - 2m(n-m)$ компонент. Дабы получить все n^2 компонент g_{ik} "метрического флагтензора", вводятся компоненты $g_{\alpha\mu}(x^1, \ldots, x^n)$.

Компоненты $g_{i\mu}$ в каждой точке $p \in M_n$ задают в касательном пространстве T_pM некоторое m-мерное подпространство, дополнительное (трансверсальное, ортогональное) к слою $W_{n-m} \subset M_n$. Иными словами, на M_n вводится m-распределение:

$$g_{\alpha\nu}dx^\alpha + g_{\mu\nu}dx^\mu = 0, \qquad m < \nu \le n. \tag{5}$$

Тройка $(g_{\alpha\beta}, g_{\mu\nu}, g_{\alpha\nu})$ называется "метрическим флагтензором g_{ik}". Его компоненты преобразуются не как у тензора, а более громоздко:

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\to g_{\alpha\beta}D^\alpha_{\alpha'}D^\beta_{\beta'}, \\ g_{\alpha\nu} &\to g_{\alpha\nu}D^\alpha_{\alpha'}D^\nu_{\nu'} + g_{\mu\nu}D^\mu_{\alpha'}D^\nu_{\nu'}, \\ g_{\mu\nu} &\to g_{\mu\nu}D^\mu_{\mu'}D^\nu_{\nu'}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Обратим внимание на то, что в последнюю и предпоследнюю формулы не входят $g_{\alpha\beta}$, а в последнюю - не входит и $g_{\alpha\nu}$. Это важное отличие от обычных тензорных преобразований, и аналогичное относится ко всем тензорам, которые в этой теории называются "флагтензорами".

По определению, для любой полуримановой геометрии в каждой точке $p \in M_n$ можно задать карту, в которой $\partial_i g_{jk}(p) = 0$; это равносильно выражается условиями:

$$g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} = 0 \,, \tag{7}$$

где $_{,\mu} = \nabla_\mu$ обозначает ковариантную производную по μ-координате. В этом еще одно отличие полуримановой геометрии от римановой, в которой такое условие на карту не требует ограничений на метрику. Ковариантное дифференцирование ∇ (флагаффинная связность Γ^i_{jk}) определяется в полуримановой геометрии в основном так же, как аффинная связность в римановой, за двумя отличиями. Во-первых, в силу (3) оказываются инвариантными равенства

$$\Gamma^\alpha_{\mu\beta} = 0 , \quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 , \quad R^\alpha_{\mu\beta\gamma} = 0 , \quad R^\alpha_{\beta\mu\gamma} = 0 \tag{8}$$

и им подобные, которые тождественно выполняются в полуримановой геометрии. Во-вторых, вместо условия $\nabla_k g_{ij} = 0$ налагаются более слабые требования $\nabla_k g_{\alpha\beta} = 0$ и $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ (мотивировку см. в [4]), поэтому $g_{\alpha\mu}$ не входит в выражения для Γ^i_{jk} и для R^i_{jkl}. С другой стороны, компоненты $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ остаются совершенно произвольными по отношению к метрике g_{ik}.

Вообще говоря, расслоение может быть многократным, так что слой W_{n-m}, в свою очередь, расслаиваясь, образует полуриманову геометрию размерности $n-m$ и т.д. (см. пп.6-8). В этом случае $g_{\mu\nu}$ оказывается уже не метрическим невырожденным тензором, а флагтензором, построенным, как g_{ik}. Полуриманова геометрия описана в [4], ее применение к электромагнетизму - в [5], а многомерные обобщения, связанные с моделированием разных физических размерностей, намечены в [6]. Вводимый в следующем пункте частный случай полуримановой геометрии прежде не рассматривался.

Подчеркнем, что по устройству полуримановой геометрии V_n^m вид метрики $g_{\alpha\beta}$ в базе M_m никак не связан с видом метрики $g_{\mu\nu}$ в слое. Поэтому, например, требование, чтобы $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяли уравнению Эйнштейна (или другому),не налагает никаких ограничений на $g_{\alpha\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, а тем самым и на общий вид многообразия M_n. В этом отличие от распространенных в физике направлений исследования - полуриманова геометрия снимает "главную проблему" А.Ходоса [1].

<u>4. Полуриманова геометрия с абсолютно евклидовым слоем.</u> В отличие от римановой, в полуримановой геометрии условие

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \qquad \alpha \leq m < \mu,\nu, \tag{9}$$

инвариантно в силу (3). Поэтому оказывается инвариантным условие, чтобы каждый слой (или говоря языком физики,- "внутреннее пространство") был евклидовым пространством, точнее, пространством с абсолютным параллелизмом. Тогда он либо евклидов, либо псевдоевклидов, либо полуевклидов. В терминах флагтензора кривизны соответствующее требование выглядит как условие (инвариантное в силу (3) и (8)!):

$$R^{\mu}_{\nu ik} = 0, \quad m+1 \leq \mu,\nu \leq n, \ 1 \leq i,k \leq n, \tag{10}$$

которое обеспечивает всякому вектору X^μ из слоя W (т.е. $X^\alpha = 0$) абсолютно параллельный перенос вдоль любого пути из M_n. Оно равносильно также $X^\mu{}_{,[ik]} = 0$. Поэтому при выполнении (10) в M_n можно ввести карту (атлас), в которой $g_{\mu\nu}$ суть константы. Инвариантный класс тех координатных преобразований, при которых это постоянство сохраняется, состоит из линейных по координатам x^μ преобразований:

$$\partial_i D^{\mu'}_{\nu} = 0, \quad \partial_{i'} D^{\mu}_{\nu'} = 0. \tag{11}$$

Мы называем полуримановы пространства с условием (10) пространствами с абсолютным евклидовым слоем. Компоненты $g_{\alpha\mu}$

не константы, но в (7) для названного класса карт вместо ковариантной производной можно эквивалентно иметь в виду обычные частные производные. Несколько более узкий класс декартовых в слое карт налагает дополнительные ограничения условием $g_{\mu\nu} = \pm\delta_{\mu\nu}$, что мы обычно и будем предполагать.

В пятимерной полуримановой геометрии V_5^4 компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\Gamma^{5}_{5\alpha}$ флагаффинной связности определяются однозначно по метрикам $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\mu\nu}$, компоненты $\Gamma^{\alpha}_{5\iota} = 0$, а компоненты $\Gamma^{5}_{\alpha\beta}$ остаются совершенно произвольными функциями от пяти переменных. В полуримановой геометрии с абсолютно евклидовым слоем оказывается $\Gamma^{5}_{5\alpha} = 0$ в силу (9) и можно в декартовом классе карт положить $\Gamma^{5}_{\alpha\beta} = 0$; это условие инвариантно, и мы его принимаем.

5. Пятимерный случай - электромагнетизм. Для ${}^3V_5^4$, когда базой расслоения служит псевдориманово пространство ${}^3V_4$ с сигнатурой (+---) (причем случай с нулевой кривизной $(g_{\alpha\beta} = \pm\delta_{\alpha\beta})$ не исключается и никаких ограничений на топологию не налагается), в рамках модели из п.4 возникают объекты: $g_{\alpha\beta}$, $1 \le \alpha,\beta \le 4$; $g_{5\alpha}$ или $A_\alpha = g^{55} g_{5\alpha}$, $g_{55} = 1$ и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, выражающиеся формулами Кристоффеля через $g_{\alpha\beta}$. Больше ничего нет. При этом инвариантно выделен класс линейных преобразований карт, а объекты согласно (6) преобразуются как

$$\left.\begin{aligned} & g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} D^{\alpha}_{\alpha'} D^{\beta}_{\beta'}\,, \\ & g_{5\alpha} \to g_{5\alpha} D^{5}_{5'} D^{\alpha}_{\alpha'} + g_{55} D^{5}_{5'} D^{5}_{\alpha'}\,, \\ & g_{55} \to g_{55} D^{5}_{5'} D^{5}_{5'}\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

т.е. при сохранении карты в пространстве-времени ${}^3V_4$ объект A_α преобразуется по формуле (1), следовательно, градиентно.

При этом, согласно (4), $\partial_5 g_{\alpha\beta} = 0$, а, согласно (7), $\partial_5 A_\alpha =$ $= 0$, причем тут имеются в виду как коварантные, так и обычные частные производные: эти условия инвариантны относительно (2). Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Полуриманова геометрия* ${}^3V_5^4$ *с абсолютно евклидовым слоем эквивалентна структуре* $(g_{\alpha\beta}, A_\alpha)$ *из п.1.*

Тем самым первая задача из п.1 решена.

Как обстоит дело с изометриями, инвариантами, лагранжианами, уравнениями движения Максвелла? Для $g_{\alpha\beta} = \pm\delta_{\alpha\beta}$ изометрии даются формулой:

$$\left.\begin{aligned} & x^\alpha \to L^\alpha_\beta x^\beta , \quad 1 \le \alpha \le 4, \\ & x^5 \to x^5 + f(x^1, x^2, x^3, x^4) , \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где L^α_β - группа Лоренца в ${}^3R_4$, а f - произвольная функция.

Геометрическим инвариантом оказывается выражение $A_\alpha \dfrac{dx^\alpha}{ds}$, что соответствует лагранжиану в электромагнетизме (здесь ds есть 4-мерная длина).

Вид уравнения движения для заряженной материальной точки $x^\alpha(s)$ в поле A_α определяет следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если вторая ковариантная производная* $\ddot{x}^\alpha(s)$ *выражается через* $\dot{x}^\alpha$, $g_{\alpha\beta}$ *и производные от* A_α *в виде целой рациональной функции тензорных переменных, то*

$$\ddot{x}^\alpha = aF^\alpha_\beta \dot{x}^\beta + bF^\alpha_\beta F^\beta_\gamma F^\gamma_\delta \dot{x}^\delta + cF^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma}F^\alpha_\delta \dot{x}^\delta + \\ + dF^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^\zeta_\delta F_{\varepsilon\zeta}\dot{x}^\gamma \dot{x}^\delta \dot{x}^\varepsilon + \ldots, \tag{14}$$

где в отточии подразумеваются слагаемые нечетного *веса по* x^α , *коэффициенты* $a,b,c,d,\ldots$ *суть не определяемые теорией константы,* $F^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta}$ *и т.п.*

Эта формула выведена в [7] (см.также [8-9]). Обычный линейный случай содержится здесь как подслучай при $b = c = d = \ldots = 0$. Рассмотрев частный случай, когда $A_\alpha = (er^{-1},0,0,0)$, мы получили [7-9] для 3-мерного импульса $\vec{p}$ формулу:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lambda e \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu e^3 \frac{\vec{r}}{r^7} + \nu e^3 \frac{(\vec{r}\vec{v})^2\vec{r}}{r^9(c^2-v^2)} + \ldots, \tag{15}$$

а для энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \alpha e \frac{\vec{r}\vec{v}}{r^3} + \beta e^3 \frac{\vec{r}\vec{v}}{r^7} + \gamma e^3 \frac{(\vec{r}\vec{v})^3}{r^9 v^2} + \ldots, \tag{16}$$

где $\lambda,\mu,\nu,\ldots$ суть не определяемые теорией константы.Пер - вое слагаемое в (15) дает известную кулонову силу на заряд e . Второе - известно в квантовой релятивистской теории как "радиационная поправка" и имеет согласно [10] порядок $\mu \approx \approx -\lambda\cdot 7\cdot 10^{-7}$. Последнее же слагаемое в (15) обнаружить трудно: при малых скоростях оно дает дополнительный ноль $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; при больших - не может быть уловлено в случае вращения, ибо тогда $\vec{v}$ ортогонально $\vec{r}$, так что остается трудный случай разгона до $v \approx c$ на крайне малом Δr .Аналогичное суждение относится к третьему слагаемому в (16), а при движении вдоль направления r энергия интегрируется в виде

$$\varepsilon = \tilde{\alpha}\frac{e}{r} + \left[\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}\right]\frac{e}{r^5} + \ldots \tag{17}$$

Согласно теории тензорных комитантов следующие веса в (14) есть пять, семь и т.д. Это отвечает в (15)-(16) слагаемым с e^5r^{-10}, e^7r^{-14}, ... , возможно, с чередующимися знаками коэффициентов.

Уравнения Максвелла (не говоря о тривиальных $F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0$) получаются из следующих постулатов. Принимается

А) для "тензора энергии заряженной пыли"

$$T^{\alpha}_{\beta} = \rho\dot{x}^{\alpha}\dot{x}_{\beta} + \frac{1}{4\pi}\left[F^{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta} - \frac{1}{4}F\delta^{\alpha}_{\beta}\right]$$

верно $T^{\alpha}_{\beta,\alpha} = 0$;

Б) уравнения, описывающие вещество, одинаковы как при $F_{\alpha\beta} = 0$, так и при $F_{\alpha\beta} \neq 0$;

В) $\det(F_{\alpha\beta}) \neq 0$.

Тогда верна

ТЕОРЕМА 3. *При выполнении А – В и условий теоремы 2 справедливо уравнение*

$$F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = a\dot{x}^{\beta} + bF^{\beta}_{\gamma}F^{\gamma}_{\delta}\dot{x}^{\delta} + cF\dot{x}^{\beta} + dF^{\beta}_{\gamma}F^{\zeta}_{\delta}F_{\varepsilon\zeta}\dot{x}^{\gamma}\dot{x}^{\delta}\dot{x}^{\varepsilon} + \ldots, \tag{18}$$

где про коэффициенты $a, b, c, d, \ldots$ *утверждается то же, что в связи с уравнением* (14).

Наметим ход доказательства (см. [9]).В силу $F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0$ и кососимметрии $F_{\alpha\beta}$ выполняется

$$\left(F^{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta} - \frac{1}{4}F\delta^{\alpha}_{\beta}\right)_{,\alpha} = -F_{\beta\gamma}F^{\alpha\gamma}_{,\alpha} . \tag{19}$$

Поэтому условие А означает

$$(\rho\dot{x}^{\alpha})_{,\alpha}\dot{x}_{\beta} + \rho\ddot{x}_{\beta} - \frac{1}{4\pi}F_{\beta\gamma}F^{\alpha\gamma}_{,\alpha} = 0 . \tag{20}$$

Пользуясь (14), получаем

$$4\pi(\rho\dot{x}^{\alpha})_{,\alpha}\dot{x}_{\beta} + (\tilde{\lambda}F_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma} + \ldots - F_{\beta\gamma}F^{\alpha\gamma}_{,\alpha}) = 0 , \tag{21}$$

где в отточии – нелинейные члены. По условию Б уравнения имеют один и тот же вид как при $F_{\beta\gamma} \neq 0$, так и при

$F_{\beta\gamma} = 0$, но в последнем случае (21) сводится к

$$(\rho \dot{x}^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \ , \tag{22}$$

что известно под названием уравнения неразрывности. Подставляя теперь (22) в (21), получаем

$$F_{\beta\gamma}(\tilde{\lambda}\dot{x}^{\gamma} + \ldots - F^{\alpha\gamma}_{,\alpha}) = 0 \ , \tag{23}$$

что в силу предположенного условия В $\det F_{\beta\gamma} \neq 0$ даст требуемое.

Ясно, что классическая теория содержится в (14)-(18) как частный случай, причем неожиданно в нашей теории получилась и квантовая добавка, если положить $b \neq 0$.

Одномерный слой $\overset{-1}{\pi}\pi p$ ("пятую координату", "внутреннее пространство") можно брать в любом виде: как R^1 ,так и S^1 (следовательно, распространенная идеология не отметается, но перестает быть обязательной) и даже переменным от точки к точке (т.е. можно брать не случай $M_4 \times M_1$ и не $\pi: M_5 \to M_4$, а лишь "локально-тривиальное расслоение", когда π задана лишь локально в окрестности каждой точки).

Если бы мы отказались от требования, чтобы одномерный слой x^5 был абсолютно евклидовым, т.е. от условий (9)-(10), то калибровочные преобразования (1) по-прежнему выводились бы из (6), так что мы по-прежнему получали бы электромагнитное поле $F_{\alpha\beta}$ в уже непременно искривленном псевдоримановом пространстве ${}^3V_4$. Соображения, относящиеся к формулам (14)-(18), также в основном сохраняют силу, хотя формулы пополняются новыми слагаемыми. Но при этом возникла бы еще функция $g_{55} = g_{55}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ с законом преобразования

$$g_{55} \to g_{55} D^5_{5'} D^5_{5'} \ , \tag{24}$$

так что можно сказать, что полуриманова геометрия ${}^3V^4_5$ без условия абсолютной евклидовости описывает электромагнитное взаимодействие плюс некоторое скалярное поле g_{55}.

6. <u>Шестимерный случай без расслоения</u>. На размерности $n = 5$ остановиться геометрически неестественно. Рассмотрим π : $M_6 \to M_4$ и оба подслучая такого расслоения: когда двумерный слой (x^5, x^6) не расслоен в свою очередь и когда он дополнительно расслоен со слоем x^6. Оба случая рассмотрим в рамках абсолютной евклидовости, т.е. $g_{\mu\nu} = \pm\delta_{\mu\nu}$ при $5 \le \mu, \nu \le 6$. Сказанное в конце предыдущего пункта позволит читателю увидеть, что́ будет при отказе от последнего постулата.

Итак, слой $x^1 = x^1_0$ & $x^2 = x^2_0$ & $x^3 = x^3_0$ & $x^4 = x^4_0$ не расслоен, на нем возникает невырожденная евклидова геометрия $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (случай ${}^3V^4_6$) или невырожденная псевдоевклидова геометрия $g_{55} = 1$, $g_{66} = -1$, $g_{56} = 0$ (случай ${}^{3,1}V^4_6$). Для определенности рассмотрим первый подслучай. Тогда в классе допустимых преобразований координат (11):

$$D^5_{5'} = \cos\varphi, \quad D^5_{6'} = \sin\varphi, \quad \partial_i \varphi = 0, \tag{25}$$

ибо речь идет о евклидовых вращениях на плоскости (x^5, x^6).

Вводим объекты $A_i = g^{5\mu} g_{i\mu}$ и $B_i = g^{6\mu} g_{i\mu}$. В силу (7) выполнены

$$A_{\alpha,5} = 0, \quad A_{\alpha,6} = -B_{\alpha,5}, \quad B_{\alpha,6} = 0, \tag{26}$$

а (6) дают для A_α, B_α и $A_{\alpha,6}$ калибровочные преобразования:

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha &\to A_\alpha \cos\varphi + B_\alpha \sin\varphi + \partial_\alpha x^5 \cos\varphi + \partial_\alpha x^6 \sin\varphi, \\ B_\alpha &\to -A_\alpha \sin\varphi + B_\alpha \cos\varphi - \partial_\alpha x^5 \sin\varphi + \partial_\alpha x^6 \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$A_{\alpha,6} \to A_{\alpha,6} \; . \tag{28}$$

Если образовывать $F_{\alpha\beta} = A_{[\alpha,\beta]}$ и $G_{\alpha\beta} = B_{[\alpha,\beta]}$, то (27) будут выглядеть как

$$\left.\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\to F_{\alpha\beta}\cos\varphi + G_{\alpha\beta}\sin\varphi \; , \\ G_{\alpha\beta} &\to -F_{\alpha\beta}\sin\varphi + G_{\alpha\beta}\cos\varphi \; . \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Итак, в теории возникают "векторный заряд" W_α ($W_\alpha = A_{\alpha,6} = -B_{\alpha,5}$) и два поля $F_{\alpha\beta} = \int W_{[\alpha,\beta]}dx^6$ и $G_{\alpha\beta} = \int W_{[\alpha,\beta]}dx^5$, построенные по нему и связанные между собой калибровочными преобразованиями (29). Все эти величины могли бы зависеть от всех шести переменных с ограничениями (26), но требования (29) приводят к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Полуриманова геометрия* ${}^3V^4_6$ *равносильна структуре* $(g_{\alpha\beta}, W_\alpha, F_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta})$, *где* $W_\alpha = W_\alpha(x^1,x^2,x^3,x^4)$ *– вектор (а не класс векторов с точностью до градиента) и*

$$F_{\alpha\beta} = W_{[\alpha,\beta]}x^6, \qquad G_{\alpha\beta} = W_{[\alpha,\beta]}x^5 \; . \tag{30}$$

Содержательно эта модель не дает электромагнетизма. Изометрии тут имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x^\alpha &\to L^\alpha_\beta x^\beta \; , \qquad 1 \le \alpha \le 4, \\ x^\mu &\to E^\mu_\nu x^\nu + f^\mu(x^1,x^2,x^3,x^4), \qquad 5 \le \mu \le 6, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где L^α_β – группа Лоренца в ${}^3R_4$, матрица E^μ_ν задает вращения на евклидовой 2-плоскости, а f^5, f^6 суть произвольные функции. Инвариантами здесь будут $ds^2_{(1)} = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (длина в ${}^3V_4$), $ds^2_{(2)} = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (длина в слое

(x^5, x^6) при $dx^1 = dx^2 = dx^3 = dx^4 = 0)$ и выражение $A_i \dfrac{dx^i}{ds_{(1)}} \cdot \dfrac{\delta x^5}{ds_{(2)}} + B_i \dfrac{dx^i}{ds_{(1)}} \cdot \dfrac{\delta x^6}{ds_{(2)}}$. Последнее играет роль лагранжиана для этой модели. По части уравнений движения и Максвелла никаких новых идей сравнительно с п.5 здесь не возникает. При отказе от абсолютной евклидовости появятся и скалярные поля, но формулы (26)-(29) тогда резко усложнятся.

7. Шестимерный случай с двукратным расслоением. Шестимерная полуриманова геометрия допускает еще подслучай двух последовательно вложенных расслоений: $\pi_1 : M_6 \to M_5$ и $\pi_2 : M_5 \to M_4$. Такая полуриманова геометрия обозначается ${}^3V_6^{4,5}$. Расслоение $M_6 \to M_4$ породит все объекты, описанные в п.5, с тем дополнением, что по построению они не зависят от шестой координаты. Расслоение же $M_6 \to M_5$ порождает добавочные объекты $g_{6\alpha}$, g_{65} и g_{66}, причем по абсолютной евклидовости слоя (x^5, x^6) два последних объекта - константы $(g_{66} = 1)$. Закон преобразования (6) выглядит так:

$$g_{6\alpha} \to g_{6\alpha} D^6_{6'} D^\alpha_{\alpha'} + g_{65} D^6_{6'} D^5_{\alpha'} + g_{66} D^6_{6'} D^6_{\alpha'} , \qquad (32)$$

что дает при обозначении $B_i = g^{66} g_{6i}$ формулы:

$$B_\alpha \to B_\alpha + g_{65} \partial_\alpha x^5 + \partial_\alpha x^6 , \qquad (33)$$

$$B_{\alpha,5} \to B_{\alpha,5} , \qquad (34)$$

$$B_5 \to B_5 + \partial_{5'} x^6 . \qquad (35)$$

При этом, согласно (7), имеет место

$$B_{\alpha,6} = 0, \quad 1 \le \alpha \le 4 . \qquad (36)$$

Это означает, что в данной модели появляются, как и в п.6, "векторный заряд" W_α $(W_\alpha = B_{\alpha,5})$, зависящий, вообще говоря, от первых пяти координат, а также поле $G_{\alpha\beta} = \int W_{[\alpha,\beta]}dx^5$, но здесь, в отличие от V_6^4 из п.6, поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ независимы друг от друга (не связаны калибровочными преобразованиями (29)). Еще появляется константа $g_{56} = B_5$, преобразующаяся калибровочно по (28), т.е. с точностью до константы (см. (11)). Итак,

ТЕОРЕМА 5. *Полуриманова геометрия* $^3V_6^{4,5}$ *равносильна структуре* $(g_{\alpha\beta}, A_\alpha, W_\alpha, B_5)$, *где* $A_\alpha = A_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$ *задан с точностью до калибровочных преобразований* (1), *а* $W_\alpha = W_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ *– инвариантно заданный вектор без калибровочных преобразований. Поля* $F_{\alpha\beta} = A_{[\alpha,\beta]}$ *и* $G_{\alpha\beta} = \int W_{[\alpha,\beta]}dx^5$ *никак не связаны. Константа* B_5 *определена с точностью до аддитивной константы.*

Содержательно эта модель дает обычный электромагнетизм A_α плюс еще некое поле векторного заряда W_α плюс некая константа.

В уравнение движения (14) добавляются новые слагаемые, куда войдет свертка W_α с прочими переменными при соблюдении требования $\ddot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha = 0$. Изометрии имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x^\alpha &\to L^\alpha_\beta x^\beta, \\ x^5 &\to x^5 + f^5(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ x^6 &\to x^6 + f^6(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5), \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

и вместо одного инварианта появляются два: указанный в п. 5 - $A_\alpha \dot{x}^\alpha$ и $B_\alpha \dot{x}^\alpha + B_5 \dot{x}^5$; таковы лагранжианы этой модели.

8. <u>Общие замечания</u>. Размерность n можно аналогичным образом повышать. Например, в семимерном случае возможны следующие подслучаи: слой трехмерен и не расслоен, т.е. ${}^3V^4_7$, или ${}^{3,1}V^4_7$, или ${}^{3,2}V^4_7$; имеются одномерный слой x^5 и двумерный (x^6, x^7), т.е. ${}^3V^{4,5}_7$ или ${}^{3,1}V^{4,5}_7$; имеются двумерный слой (x^5, x^6) и одномерный x^7, т.е. ${}^3V^{4,6}_7$ или ${}^{3,1}V^{4,6}_7$; имеется трехкратное расслоение ${}^3V^{4,5,6}_7$, так что каждая из координат x^5, x^6 и x^7 представляет одномерный слой. Читателю не представит труда, пользуясь формулами (6), найти объекты и их законы преобразования в этих подслучаях, а также, пользуясь (7), установить, от каких координат "внутреннего пространства" x^5, x^6, x^7 возможна тут зависимость. При этом допустимые преобразования карт запишутся по аналогии с (2)-(3), а изометрии - по аналогии с (13), (31) и (36). Аналогично найдутся лагранжианы. Формула для силы (15), например, для случая трехкратного расслоения, имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)\vec{r}r^{-3} + \Sigma\, \mu_{ijk} e_1^i e_2^j e_3^k \vec{r} r^{-7} +$$

$$+ \Sigma\, \nu_{ijk} e_1^i e_2^j e_3^k (\vec{r}\vec{v})^2 \vec{r} r^{-9} (c^2 - v^2)^{-1} + \ldots, \quad (38)$$

где суммирование ведется по $0 \le i, j, k \le 3$ при $i + j + k = 3$.

Идейно-генетически полуриманова геометрия развилась из рассмотрения вырожденного метрического тензора на многообразии (на векторном пространстве); именно так выглядит $g_{\alpha\beta}$ при $1 \le \alpha, \beta \le 4$ на M_n для $n > 4$. Поэтому она отвечает вырожденной сигнатуре (+---0). В свою очередь, корень квадратный из знака в сигнатуре моделирует физическую размерность: вещественные числа моделируют секунды, чисто мнимые - метры, а чисто дуальные $(a\varepsilon$ при $\varepsilon^2 = 0,\ a \in \mathbb{R})$ - кулоны или другие размерности, несводимые к метрам и секундам. Пользование дуальными числами облегчается тем обстоятельством, что возможны разные дуальные числа $a\varepsilon_1$ и $a\varepsilon_2$ и даже $a\varepsilon_1\varepsilon_2$ при $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$; возможны и числа вида $a\varepsilon i$, где $i^2 = -1$. Особенно хорошо это видно при матричном представлении дуальных и мнимых чисел. Поэтому дуальными числами можно промоделировать многократные расслоения и описать ситуацию со многими физическими размерностями [6]. Собственно, всю теорию полуримановой геометрии можно построить - и исторически она так и возникла - как теорию невырожденного метрического тензора γ_{ik}, компоненты которого частью вещественные, а частью дуальные $(\gamma_{\alpha\mu} = \varepsilon g_{\alpha\mu}$ при дуальных координатах $\zeta^\mu = x^\mu\varepsilon,\ \alpha \leq m < \mu)$. Правила, которыми при таком построении следует руководствоваться, - это

$$\sqrt{a^2 + (b\varepsilon)^2} = \begin{cases} |a| & \text{при} \quad a \neq 0, \\ |b|\varepsilon & \text{при} \quad a = 0, \end{cases} \tag{39}$$

и правило: выражение a/ε при вещественном a имеет смысл только при $a = 0$. Тогда получаются и условия (2)-(3) на преобразования координат, и два метрических тензора $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\mu\nu}$ с распределением $g_{\alpha\mu}$ по (5), и условия (8), и многое другое. Формулы (7) приходится вводить независимо из условия, чтобы в каждой точке существовала "евклидова" система координат, в которой частные производные от метрики равны нулю в точке.

Мог бы возникнуть вопрос: можно ли базу расслоения π : $M_5 \to M_4$ взять не в виде псевдориманова пространства ${}^3V_4$

(пространство-время общей или специальной теории относительности), а в виде полуриманова пространства V_4^1 (ньютоново пространство-время)? Или в виде финслерова пространства-времени? Несложные рассмотрения показывают, что если база является ньютоновым пространством-временем, то никакого вектор-потенциала A_α с градиентным калибровочным преобразованием не возникает, так что электромагнетизм невозможен (отдельно электрическое поле, без магнитного - возможно). Финслерово же пространство-время [11] не противоречит электромагнитному вектор-потенциалу A_α, хотя теория становится громоздкой.

Автор выражает благодарность участникам Ш Всесоюзной школы по теории физических структур (Пущино, август 1988 г.) за активное и придирчивое обсуждение положений доклада автора по теме этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. ХОДОС А. Теория Калуцы-Клейна: общий обзор // Успехи физ.наук. - 1985.-Т.146,№ 4.- С.647-654.

2. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий.- М., 1987.

3. GRAVEL P. Les theories unitaires pentadimensionelles et le postulat d'homogeneite spaciale// Lettere Nuovo Cimento. - 1985.- Vol.43,N 1.-P.61-64.

4. ПИМЕНОВ Р.И. Полуриманова геометрия// Труды семинара по векторному и тензорному анализу.-1968.-Вып.14.-С.154-173.

5. Его же. Применение полуримановой геометрии к единой теории поля//Докл.АН СССР.-1964.-Т.157,№4.-С.795-797.

6. Его же. Полуриманова геометрия и единые теории// Проблемы гравитации.- Тбилиси, 1965.- С.111-114.

7. Его же. К геометрическому выводу уравнений движения заряда в электродинамике// Труды Коми филиала АН СССР.- 1973.- № 26.- С.80-92.

8. Его же. Еще один шаг в направлении геометризации электромагнетизма в общей теории относительности// Тезисы докл. Ш советской гравитационной конференции.-Ереван, 1972.- С.136-138.

9. ПИМЕНОВ Р.И. Негладкие и другие обобщения в теории пространства-времени и электричества // Научные доклады Коми филиала АН СССР.- Сыктывкар, 1979.- № 47.

10. ЛИФШИЦ Е.М., ПИТАЕВСКИЙ Л.П. Релятивистская квантовая теория. Т.2.- М.:Наука,1971.

11. ПИМЕНОВ Р.И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. -Сыктывкар, 1987.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 октября 1988 года