ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1990 год Выпуск 137

УДК 519.651

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ И ВЫПУКЛОСТИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ КЛАССА C^2

В.Л.Мирошниченко

Введение

В [1] получены достаточные условия монотонности (выпуклости) для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2, выраженные в виде ограничений на разделенные разности от интерполируемой функции. Целью настоящей статьи является конкретизация таких ограничений в зависимости от краевых условий кубического сплайна. Для некоторых, часто используемых на практике краевых условий полученные результаты не вытекают непосредственно из [1].

Предположим, что в узлах сетки Δ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\ldots,N$, функции $f(x)$.

Данные $\{f_i\}$ будем называть монотонными, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 0,\ldots,N-1, \tag{1}$$

и выпуклыми, если

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{2}$$

где $f[x_i, x_{i+1}]$, $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ - первая и вторая разделенные разности соответственно.

Задача монотонной (выпуклой) сплайн-интерполяции заключается в построении монотонного (выпуклого) интерполяционного сплайна по монотонным (выпуклым) данным.

Пусть $S(x) \in C^2[a,b]$ - кубический сплайн [2], с узлами $x_i \in \Delta$, $i = 1,\ldots,N-1$, удовлетворяющий условиям интерполяции: $S(x_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,N$, и одному из типов краевых условий:

I. $S'(x_0) = f'_0$, $S'(x_N) = f'_N$;

II. $S''(x_0) = f''_0$, $S''(x_N) = f''_N$;

IV. $S'''(x_k + 0) = S'''(x_k - 0)$, $k = \overline{1,N-1}$.

Из списка краевых условий исключены периодические условия (тип III), так как при интерполяции монотонных (выпуклых) данных их использование возможно лишь в тривиальном случае $f_i = \mathrm{const}$, $i = 0,\ldots,N$.

Нас будет интересовать вопрос об условиях, при которых сплайн $S(x)$, интерполируя монотонные или выпуклые данные, будет соответственно монотонным - $S'(x) \geq 0$ или выпуклым - $S''(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$.

Из результатов, приведенных в [1], легко выводятся условия монотонности и выпуклости кубического сплайна для краевых условий I и II. Однако случай краевых условий типа IV требует отдельного рассмотрения, что и будет сделано ниже.

В §1 приведены результаты о монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами класса C^1, которые носят, в основном, вспомогательный характер. В § 2,3 рассматриваются соответственно задачи о монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами класса C^2. Основным рабочим инструментом при этом служит следующая, доказанная в [1] лемма о решении трехдиагональной системы.

ЛЕММА 1. *Если коэффициенты системы*

$$\left.\begin{aligned} a_0 z_0 + b_0 z_1 &= d_0 , \\ c_i z_{i-1} + a_i z_i + b_i z_{i+1} &= d_i , \; i = 1,2,\dots,N-1 , \\ c_N z_{N-1} + a_N z_N &= d_N , \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $N > 1$ *, удовлетворяют условиям*

$$a_i > 0 , \quad i = 0,\dots,N;$$

$$c_i \ge 0 , \; b_i \ge 0 , \; a_i > b_i + c_i , \; i = 1,\dots,N-1 ,$$

$$b_0 < \frac{a_0 a_1}{b_1 + c_1} , \quad c_N < \frac{a_{N-1} a_N}{b_{N-1} + c_{N-1}} ,$$

то она невырождена и при выполнении неравенств

$$d_i \ge 0 , \; d_i - \frac{b_i d_{i+1}}{a_{i+1}} - \frac{c_i d_{i-1}}{a_{i-1}} \ge 0 , \; i = 0,\dots,N ,$$

где $c_0 = b_N = d_{-1} = d_{N+1} = 0$, $a_{-1} = a_{N+1} = 1$ *, ее решение неотрицательно;* $z_i \ge 0 , \; i = 0,1,\dots,N.$

В §4 приведены численные примеры, иллюстрирующие результаты из § 1-3.

§1. Монотонная и выпуклая интерполяция кубическими сплайнами класса C^1

Кубический сплайн $H(x) \in C^1$, интерполирующий значения $\{f_i\}$ на сетке Δ , записывается при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ в виде [2]:

$$H(x) = (1-t)^2(1+2t) f_i + t^2(3-2t) f_{i+1} + h_i t (1-t)^2 m_i - h_i t^2 (1-t) m_{i+1} , \quad (4)$$

где $t = (x-x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $m_j = H'(x_j)$.

Из найденных в [3] необходимых и достаточных условий монотонности кубических сплайнов класса C^1 вытекает

ЛЕММА 2. *Если* $f[x_i,x_{i+1}] \ge 0$ *и*

$$0 \le m_j \le 3f[x_i,x_{i+1}], \quad j=i,i+1, \tag{5}$$

то $H'(x) \ge 0,\ x\in [x_i,x_{i+1}]$.

Отметим, что этот результат нетрудно получить и непосредственно, не обращаясь к [3]. В самом деле, из (4) имеем

$$H'(x) = \varphi(t,m_i,m_{i+1}) = 6t(1-t)f[x_i,x_{i+1}] + $$
$$+ (1-4t+3t^2)m_i + (-2t+3t^2)m_{i+1} \ . \tag{6}$$

Функция $\varphi(t,m_i,m_{i+1})$ линейна по переменным m_i,m_{i+1} Поэтому для доказательства неравенства $H'(x) \ge 0,\ x\in$ $\in [x_i,x_{i+1}]$, при ограничениях (5) достаточно проверить при $t\in [0,1]$ неравенства: $\varphi(t,0,0)\ge 0$, $\varphi(t,\delta_i,0)\ge 0$, $\varphi(t,0,\delta_i)\ge 0$, $\varphi(t,\delta_i,\delta_i) \ge 0$, где $\delta_i = 3f[x_i,x_{i+1}]$. Легко убедиться, что эти неравенства выполняются и тем самым требуемый результат получен.

Задача монотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^1 всегда разрешима, т.е. для любых данных $\{f_i\}$, удовлетворяющих условиям (1), можно указать такие m_i, $i = 0,\dots,N$, в (4), что сплайн $H(x)$ будет монотонен на $[a,b]$ Этот факт следует, в частности, и из леммы 2. Среди множества исследований, посвященных проблеме построения монотонных кубических сплайнов класса C^1, отметим работу [4], в которой предложен алгоритм выбора параметров m_i в (1), обеспечивающий не только монотонность сплайна, но и дающий максимально возможный для кубических сплайнов порядок приближения - $O(\bar{h}^4)$, $\bar{h} = \max_i h_i$, при интерполяции монотонной функции $f\in C^4[a,b]$.

Все алгоритмы монотонной интерполяции кубическими сплайнами, имеющие порядок приближения выше первого, являются нелинейными, если рассматривать их действие как отображение множества монотонных функций в множество монотонных сплайнов класса C^1. Из предположения о линейности алгоритма монотонной интерполяции класса C^1, как показано в [5], с необходимостью следуют равенства $m_i = 0$, $i = 0,\dots,N$, и точность интерполяции сплайном $H(x)$ с такими значениями m_i не может быть лучше $O(\overline{h})$ при любой гладкости интерполируемой функции. Поэтому применение традиционных линейных методов сплайн-интерполяции, имеющих, как правило, точность выше чем $O(\overline{h})$, с целью построения монотонной интерполяции неизбежно приводит к более жестким, нежели (1), требованиям к исходным данным.

Рассмотрим в качестве примера часто используемый на практике способ интерполяции локальными кубическими сплайнами. Определим производные сплайна m_i в (4) формулами [2]:

$$m_0 = (1+\mu_1)f[x_0,x_1] - \mu_1 f[x_1,x_2], \tag{7.1}$$

$$m_i = \lambda_i f[x_{i-1},x_i] + \mu_i f[x_i,x_{i+1}], \quad i = 1,\dots,N-1, \tag{7.2}$$

$$m_N = (1+\lambda_{N-1})f[x_{N-1},x_N] - \lambda_{N-1} f[x_{N-2},x_{N-1}], \tag{7.3}$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$. Сплайн $H(x)$ с этими значениями параметров m_i в дальнейшем будем обозначать через $\widetilde{H}(x)$.

Точность приближения сплайном $\widetilde{H}(x)$ функции $f(x) \in C^3[a,b]$ имеет порядок $O(\overline{h}^3)$ [2]. Применив лемму 2, нетрудно прийти к следующему выводу.

Пусть выполнены условия (1).

Если

$$\mu_1 f[x_1,x_2] \le (1+\mu_1)f[x_0,x_1], \tag{8.1}$$

то $\widetilde{H}'(x) \ge 0$ при $x \in [x_0,x_1]$;

если

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i f[x_{i-1},x_i] &\le (2+\lambda_i)f[x_i,x_{i+1}], \\ \mu_{i+1}f[x_{i+1},x_{i+2}] &\le (2+\mu_{i+1})f[x_i,x_{i+1}], \end{aligned}\right\} \quad (8.2)$$

то $\tilde{H}'(x)\ge 0$ при $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,\ldots,N-2$;

если

$$\lambda_{N-1}f[x_{N-2},x_{N-1}]\le(1+\lambda_{N-1})f[x_{N-1},x_N], \qquad (8.3)$$

то $\tilde{H}'(x)\ge 0$ при $x\in[x_{N-1},x_N]$.

В совокупности неравенства (8) представляют собой достаточные условия монотонности $\tilde{H}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Смысл этих ограничений состоит в требовании плавного изменения первых разделенных разностей, что особенно отчетливо видно, если переписать соотношения (8.2) в виде

$$\frac{\lambda_i}{2+\lambda_i}\cdot f[x_{i-1},x_i]\le f[x_i,x_{i+1}]\le\frac{2+\mu_i}{\mu_i}f[x_{i-1},x_i], \qquad (9)$$

$$i=2,\ldots,N-2.$$

В частности, на равномерной сетке имеем

$$\frac{1}{5}f[x_{i-1},x_i]\le f[x_i,x_{i+1}]\le 5f[x_{i-1},x_i],$$

$$i=2,\ldots,N-2.$$

Обратим внимание еще на два момента, связанные с неравенствами (8). Пусть для некоторого i разность $f[x_i,x_{i+1}]=0$, а одна из соседних разностей, например, $f[x_{i+1},x_{i+2}]>0$. Тогда, очевидно, условия (8) не могут быть выполнены и, хотя они носят только достаточный характер, в данном случае, как нетрудно показать, сплайн $\tilde{H}(x)$ не может быть монотонным. Таким образом, линейный метод (7) определения величин m_i можно использовать только тогда, когда данные $\{f_i\}$ строго монотонны, т.е. в (1) имеет место знак строгого неравенства. Исправить этот недостаток можно путем коррекции (она и делает метод нелинейным) производных сплайна в узлах x_i, x_{i+1}, положив, например, в соответствии с леммой 2, $m_i = m_{i+1} = 0$. Отметим, что подобным образом устроено большинство алгоритмов монотонной интерполяции кубическими сплайнами. А именно, вначале с помощью какого-нибудь линейного метода определяются касательные m_i, а затем корректируются те из них, которые не удовлетворяют достаточным или необходимым и достаточным условиям монотонности [3,4].

Предположим, что $f \in C^1[a,b]$ и $f'(x) > 0, x \in [a,b]$. Тогда найдется такое h^*, что для любой сетки Δ, удовлетворяющей условию $\bar{h} < h^*$, неравенства (8) будут выполнены, а следовательно, сплайн $\tilde{H}(x)$ будет монотонным на $[a,b]$. В самом деле,

$$f[x_0,x_1] + \mu_1\{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]\} =$$

$$= f'(\xi) + \mu_1\{f'(\xi) - f'(\eta)\} \geq$$

$$\geq \min_{x\in[a,b]} |f'(\xi)| - |f'(\xi) - f'(\eta)|,$$

где $\xi \in [x_0,x_1]$, $\eta \in [x_1,x_2]$. Так как $|f'(\xi) - f'(\eta)| \leq \leq \omega(f'; \bar{h}) \to 0$ при $\bar{h} \to 0$, где $\omega(f'; \bar{h})$ - модуль непрерывности функции $f'(x)$, то существует такое h^*, что при всех $\bar{h} < h^*$ будет выполнено неравенство

$$f[x_0,x_1] + \mu_1\{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]\} \geq 0,$$

эквивалентное (8.1). Аналогичным образом выводятся неравенства (8.2), (8.3).

Проделанные рассуждения показывают, что необходимость в использовании нелинейных алгоритмов построения монотонной интерполяции может возникнуть либо в окрестности точек, где $f'(x) = 0$, либо на участках, где производная функции меняется резко, а узлы сетки расположены редко.

Обратимся теперь к вопросу о выпуклой интерполяции сплайнами вида (4). Так как выражение

$$H''(x)=\frac{1}{h_i}\{6(1-2t)f[x_i,x_{i+1}]+(6t-4)m_i+$$
$$+(6t-2)m_{i+1}\} \qquad (10)$$

линейно по t на промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ и

$$H''(x_i+0)=\frac{2}{h_i}\{3f[x_i,x_{i+1}]-2m_i-m_{i+1}\},$$

$$H''(x_{i+1}-0)=\frac{2}{h_i}\{-3f[x_i,x_{i+1}]+m_i+2m_{i+1}\},$$

то очевидна следующая

ЛЕММА 3. *Для того чтобы сплайн $H(x)$ был выпуклым на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$, необходимо и достаточно выполнения неравенств*

$$\left.\begin{aligned} 2m_i+m_{i+1} &\le 3f[x_i,x_{i+1}],\\ m_i+2m_{i+1} &\ge 3f[x_i,x_{i+1}]. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Совокупность неравенств (11) при $i=0,1,\ldots,N-1$ является необходимым и достаточным условием выпуклости сплайна $H(x)$ на $[a,b]$. В отличие от задачи монотонной интерполяции сплайнами вида (4), которая всегда разрешима, задача выпуклой интерполяции такими сплайнами разрешима не для любых выпуклых данных. В [6] описан эффективный алгоритм, позволяющий однозначно решить вопрос о существовании выпуклого сплайна $H(x)$, интерполирующего выпуклый набор данных $\{f_i\}$, и предложен способ построения такого сплайна.

Подставив выражения (7) в (11), легко получить необходимые и достаточные условия выпуклости сплайна $\tilde{H}(x)$. А именно, если выполнены условия (2), то $\tilde{H}''(x)\ge 0$ при $x\in$

$\in[x_0,x_1]$, $x\in[x_{N-1},x_N]$; при $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i\in\in\{1,\dots,N-2\}$, неравенство $\tilde{H}''(x)\geq 0$ справедливо тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$\frac{1}{2}f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]\leq f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]\leq$$
$$\leq 2f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]. \qquad (12)$$

Непосредственно из (12) вытекают два следствия. Во-первых, если k, $2<k\leq N$, точек (x_i,f_i) подряд лежат на одной прямой, то сплайн $\tilde{H}(x)$ не может быть выпуклым. Во-вторых, если $f\in C^2[a,b]$ и $f''(x)>0$ при $x\in[a,b]$, то для сеток с достаточно малым $\bar{h}$ сплайн $\tilde{H}(x)$ будет выпуклым.

§2. Монотонная интерполяция кубическими сплайнами класса C^2

Кубический сплайн $S(x)$ класса C^2 может быть представлен в виде (4), причем параметры $m_i=S'(x_i)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2m_0+\mu_0m_1 &= c_0,\\ \lambda_im_{i-1}+2m_i+\mu_im_{i+1} &= c_i,\quad i=1,\dots,N-1,\\ \lambda_Nm_{N-1}+2m_N &= c_N, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где

$$\lambda_i=h_i/(h_{i-1}+h_i),\quad \mu_i=1-\lambda_i,$$

$$c_i=3\lambda_if[x_{i-1},x_i]+3\mu_if[x_i,x_{i+1}],\quad i=1,\dots,N-1,$$

а величины μ_0, c_0,λ_N,c_N определяются краевыми условиями для сплайна.

Обозначим $z_+=\max\{0,z\}$. В [1] доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть кубический сплайн* $S(x)\in C^2$ *с краевыми условиями* $2m_0+\mu_0m_1=c_0$, $\lambda_Nm_{N-1}+2m_N=c_N$

интерполирует монотонные данные f_i, $i = 0,\ldots,N$, $N > 1$. *Если*

$$\left.\begin{aligned} &|\mu_0| \le 2,\ (\mu_0)_+ c_1 \le 2c_0 \le 12f[x_0,x_1]\ , \\ &|\lambda_N| \le 2,\ (\lambda_N)_+ c_{N-1} \le 2c_N \le 12f[x_{N-1},x_N], \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i f[x_{i-1},x_i] \le (1+\lambda_i) f[x_i,x_{i+1}], \\ &\mu_i f[x_i,x_{i+1}] \le (1+\mu_i) f[x_{i-1},x_i], \end{aligned}\right\} i = 1,\ldots,N-1, \qquad (15)$$

то $S'(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

Для граничных условий типа I имеем

$$\mu_0 = \lambda_N = 0,\quad c_0 = 2f'_0,\qquad c_N = 2f'_N\ ;$$

для граничных условии типа П -

$$\mu_0 = \lambda_N = 1,\quad c_0 = 3f[x_0,x_1] - h_0 f''_0/2\ ,$$

$$c_N = 3f[x_{N-1},x_N] + h_{N-1} f''_N/2\ ,$$

и поэтому непосредственно из теоремы 1 вытекают

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть кубический сплайн* $S(x) \in C^2$ *с краевыми условиями типа* I *интерполирует монотонные данные* f_i, $i = 0,\ldots,N$, $N > 1$. *Если выполнены условия* (15) *и*

$$0 \le f'_0 \le 3f[x_0,x_1],\quad 0 \le f'_N \le 3f[x_{N-1},x_N], \qquad (16)$$

то $S'(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть кубический сплайн* $S(x) \in C^2$ *с краевыми условиями типа П интерполирует монотонные данные* f_i, $i = 0,\ldots,N$, $N > 1$. *Если выполнены условия* (15) *и*

$$h_0|f''_0| \le 6f[x_0,x_1],\quad h_{N-1}|f''_N| \le 6f[x_{N-1},x_N],$$

$$\mu_1 f[x_1,x_2] + h_0 f_0''/3 \le (1+\mu_1) f[x_0,x_1],$$

$$\lambda_{N-1} f[x_{N-2},x_{N-1}] - h_{N-1} f_N''/3 \le (1+\lambda_{N-1}) f[x_{N-1},x_N],$$

то $S'(x) \ge 0, \quad x \in [a,b]$.

Результатами следствий 1,2 можно воспользоваться и тогда, когда в краевых условиях точные значения производных функции заменены их разностными аппроксимациями. В частности, если в качестве краевых условий взять соотношения (7.1), (7.3), то для монотонности сплайна класса C^2 достаточно выполнения условий (15), ибо в этом случае неравенства (16) вытекают из (15).

Однако использование краевых условий (7.1), (7.3) снижает максимальный порядок приближения сплайнами $S(x) \in C^2$ с $O(\bar{h}^4)$ до $O(\bar{h}^3)$. Этот недостаток можно преодолеть, если заменить f_0', f_N' четырехточечными аппроксимациями, полученными путем дифференцирования полиномов Лагранжа третьей степени. Пусть $L_k(x)$ - полином Лагранжа, интерполирующий в узлах x_i значения f_i, $i = k,k+1,k+2,k+3$. Положим

$$m_0 = L_0'(x_0) = (1+\mu_1) f[x_0,x_1] - \mu_1 f[x_1,x_2] + \\ + \frac{h_0(h_0+h_1)}{h_0+h_1+h_2}\{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]\}, \tag{17.1}$$

$$m_N = L_{N-3}'(x_N) = \\ = (1+\lambda_{N-1}) f[x_{N-1},x_N] - \lambda_{N-1} f[x_{N-2},x_{N-1}] + \\ + \frac{h_{N-1}(h_{N-2}+h_{N-1})}{h_{N-3}+h_{N-2}+h_{N-1}}\{f[x_{N-2},x_{N-1},x_N] - \\ - f[x_{N-3},x_{N-2},x_{N-1}]\}. \tag{17.2}$$

При этом, согласно (16), должны выполняться неравенства

$$0 \le L_0'(x_0) \le 3f[x_0,x_1], \quad 0 \le L_{N-3}'(x_N) \le 3f[x_{N-1},x_N],$$

которые, вообще говоря, не следуют из (15), т.е. повышение порядка приближения привело к усилению ограничений на исходные данные.

Отметим, что условия монотонности сплайна класса C^2 - (15) существенно жестче условий монотонности (8) для сплайна $\tilde{H}(x) \in C^1$.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях монотонности кубических сплайнов с краевыми условиями типа 1У. В этом случае система для параметров m_i имеет вид (см. [2, с. 98]):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^2 m_0 + (\lambda_1 - \mu_1) m_1 - \mu_1^2 m_2 = c_0 , \\ &\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i , \; i = 1, \ldots, N-1 , \\ &-\lambda_{N-1}^2 m_{N-2} + (\mu_{N-1} - \lambda_{N-1}) m_{N-1} + \mu_{N-1}^2 m_N = c_N , \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где

$$\begin{aligned} &c_0 = 2\lambda_1^2 f[x_0, x_1] - 2\mu_1^2 f[x_1, x_2] , \\ &c_N = 2\mu_{N-1}^2 f[x_{N-1}, x_N] - 2\lambda_{N-1}^2 f[x_{N-2}, x_{N-1}] . \end{aligned} \qquad (19)$$

Исключая из первого и последнего уравнений системы (18) неизвестные m_2 и m_{N-2} соответственно, можно привести ее к виду (13):

$$\left.\begin{aligned} &2m_0 + 2/\lambda_1 m_1 = 2(c_0 + \mu_1 c_1)/\lambda_1 , \\ &\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i , \quad i = 1, \ldots, N-1 , \\ &2/\mu_{N-1} m_{N-1} + 2m_N = 2(c_N + \lambda_{N-1} c_{N-1})/\mu_{N-1} . \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Однако применение теоремы 1 к полученной системе невозможно, так как условия $|\mu_0| \le 2$, $|\lambda_N| \le 2$ нарушаются. Поэтому случай краевых условий типа 1У требует отдельного рассмотрения.

Выпишем системы уравнений, которые потребуются нам при выводе критериев монотонности сплайнов с краевыми условиями типа IУ. Исключая из (18) неизвестные m_0, m_N, имеем

$$\left.\begin{aligned} m_1 + \mu_1 m_2 &= \bar{c}_1,\\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} &= c_i,\ i=2,\dots,N-2,\\ \lambda_{N-1} m_{N-2} + m_{N-1} &= \bar{c}_{N-1}, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

где

$$\bar{c}_1 = \lambda_1 c_1 - c_0 = \lambda_1^2 f[x_0,x_1] + \mu_1(2+\lambda_1) f[x_1,x_2],$$

$$\bar{c}_{N-1} = \mu_{N-1} c_{N-1} - c_N = \mu_{N-1}^2 f[x_{N-1},x_N] + \lambda_{N-1}(2+\mu_{N-1}) f[x_{N-2},x_{N-1}].$$

В результате исключения неизвестного m_1 из первых трех уравнений системы (18) получаем

$$\lambda_1 m_0 - \mu_1 m_2 = \tilde{c}_1, \quad (22)$$

$$-\lambda_1\lambda_2 m_0 + (4-\mu_1\lambda_2) m_2 + 2\mu_2 m_3 = 2c_2 - \lambda_2 c_1, \quad (23)$$

где

$$\tilde{c}_1 = 2c_0 - (\lambda_1 - \mu_1) c_1 = \lambda_1(1+2\mu_1) f[x_0,x_1] - \mu_1(1+2\lambda_1) f[x_1,x_2]. \quad (24)$$

Аналогично из последних трех уравнений (18) находим

$$2\lambda_{N-2} m_{N-3} + (4-\lambda_{N-1}\mu_{N-2}) m_{N-2} - \mu_{N-2}\mu_{N-1} m_N = 2c_{N-2} - \mu_{N-2} c_{N-1}. \quad (25)$$

$$-\lambda_{N-1}m_{N-2}+\mu_{N-1}m_N=\tilde{c}_{N-1}\,, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{N-1}&=2c_N-(\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})c_{N-1}=\\&=\mu_{N-1}(1+2\lambda_{N-1})f[x_{N-1},x_N]-\\&-\lambda_{N-1}(1+2\mu_{N-1})f[x_{N-2},x_{N-1}]\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь, исключив m_0 из (22),(23) и m_N из (25), (26), приходим к системе

$$\left.\begin{aligned}&(2-\mu_1\lambda_2)m_2+\mu_2m_3=\tilde{c}_2\,,\\&\lambda_im_{i-1}+2m_i+\mu_im_{i+1}=c_i\,,\ i=3,\ldots,N-3\,,\\&\lambda_{N-2}m_{N-3}+(2-\mu_{N-2}\lambda_{N-1})m_{N-2}=\tilde{c}_{N-2}\,,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}&\tilde{c}_2=c_2-\lambda_1\lambda_2c_1+\lambda_2c_0\,,\\&\tilde{c}_{N-2}=c_{N-2}-\mu_{N-2}\mu_{N-1}c_{N-1}+\mu_{N-2}c_N\,.\end{aligned} \tag{29}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть кубический сплайн* $S(x)$ *класса* C^2 *с краевыми условиями типа 1У интерполирует монотонные данные* f_i, $i=0,1,\ldots,N$; $N\geq 3$. *Тогда*

а) если выполнены условия (15), то $S'(x)\geq 0$ *при* $x\in[x_2,x_{N-2}]$ *;*

б) если выполнены условия (15) и

$$q_1=2\lambda_1c_1-2c_0-\mu_1c_2\geq 0\,, \tag{30.1}$$

$$q_{N-1}=2\mu_{N-1}c_{N-1}-2c_N-\lambda_{N-1}c_{N-2}\geq 0\,, \tag{30.2}$$

где c_0, c_N *определены формулами (19), то* $S'(x)\geq 0$ *при* $x\in[x_1,x_{N-1}]$ *;*

в) если выполнены условия (15), (30) и

$$\tilde{c}_1 + \frac{\mu_1(2c_2 - \lambda_2 c_1 - \mu_2 c_3)}{3 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_2\mu_3} \geq 0 \quad , \tag{31.1}$$

$$(2-\mu_1\lambda_2)(\mu_1^2 f[x_1,x_2] - \lambda_1^2 f[x_0,x_1]) \leq c_1 , \tag{31.2}$$

$$\tilde{c}_{N-1} + \frac{\lambda_{N-1}(2c_{N-2} - \mu_{N-2}c_{N-1} - \lambda_{N-2}c_{N-3})}{3 + \mu_{N-2}\mu_{N-1} + \lambda_{N-3}\lambda_{N-2}} \geq 0, \tag{32.1}$$

$$(2-\mu_{N-2}\lambda_{N-1})(\lambda_{N-1}^2 f[x_{N-2}, x_{N-1}] -$$

$$- \mu_{N-1}^2 f[x_{N-1}, x_N] \leq c_{N-1} \tag{32.2}$$

при $N > 3$; *а при* $N = 3$

$$0 \leq L_0'(x_0) \leq 3f[x_0,x_1], \quad 0 \leq L_0'(x_3) \leq 3f[x_2,x_3], \tag{33}$$

где величины $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_{N-1}$, $L_0'(x_0)$, $L_0'(x_3)$ *определены формулами* (24), (27), (17), *то* $S'(x) \geq 0$ *при* $x \in [x_0, x_N]$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы относительно промежутка $[x_2, x_{N-2}]$ имеет смысл только при $N \geq 5$. Нетрудно проверить, что при $N \geq 6$ для кубического сплайна, который является сужением сплайна $S(x)$ на отрезок $[x_2, x_{N-2}]$ и определяется уравнениями (28), выполнены условия теоремы 1, если неравенства (15) имеют место. Следовательно, когда $N \geq 6$, имеем $S'(x) \geq 0$, $x \in [x_2, x_{N-2}]$. При $N = 5$ система (28) сводится к двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} (2-\mu_1\lambda_2)m_2 + \mu_2 m_3 &= \tilde{c}_2 \ , \\ \lambda_3 m_2 + (2-\mu_3\lambda_4)m_3 &= \tilde{c}_3 \ . \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Отсюда

$$[(2-\mu_1\lambda_2)(2-\mu_3\lambda_4)-\mu_2\lambda_3]m_2= (2-\mu_3\lambda_4)\tilde{c}_2- \mu_2\tilde{c}_3,$$

и так как

$$(2-\mu_3\lambda_4)\tilde{c}_2-\mu_2\tilde{c}_3 =$$

$$= (2-\mu_3\lambda_4)\{3\mu_2 f[x_2,x_3]+\lambda_2 f[x_1,x_2] +$$

$$+ \lambda_1\lambda_2((1+\lambda_1)f[x_1,x_2]-\lambda_1 f[x_0,x_1])\}-\mu_2\{3\lambda_3 f[x_2,x_3]+$$

$$+ \mu_3(1+\mu_4+\mu_4^2)f[x_3,x_4]\}+\mu_2\mu_3\mu_4^2 f[x_4,x_5] \geq$$

$$\geq 3\mu_2(2-\mu_3\lambda_4)f[x_2,x_3]-\mu_2[(1+\mu_3)(1+\mu_4+\mu_4^2) +$$

$$+ 3\lambda_3]f[x_2,x_3]= \mu_2\lambda_4(1+\lambda_3+\mu_4+\mu_3\mu_4)f[x_2,x_3]\geq 0,$$

то $m_2 \geq 0$. Аналогично получаем неравенство $m_3 \geq 0$. Далее, из (34) имеем

$$(2-\mu_1\lambda_2)m_2 = \tilde{c}_2-\mu_2 m_3 \leq \tilde{c}_2 =$$

$$= 3\mu_2 f[x_2,x_3]-\lambda_1^2\lambda_2 f[x_0,x_1] +$$

$$+ \lambda_2(1+\lambda_1+\lambda_1^2)f[x_1,x_2] \leq$$

$$\leq \{3\mu_2+(1+\lambda_2)(1+\lambda_1+\lambda_1^2)\}f[x_2,x_3].$$

Нетрудно проверить, что $3\mu_2+(1+\lambda_2)(1+\lambda_1+\lambda_1^2) \leq \leq 3(2-\mu_1\lambda_2)$ и поэтому $m_2 \leq 3f[x_2,x_3]$. Аналогично $m_3 \leq 3f[x_2,x_3]$. Обращаясь теперь к лемме 2, получаем $s'(x) \geq 0$, $x \in [x_2,x_3]$. Таким образом, утверждение теоремы для промежутка $[x_2, x_{N-2}]$ доказано.

Утверждение теоремы для отрезка $[x_1,x_{N-1}]$ при $N \geq 4$ также может быть выведено в результате применения теоремы 1 к сплайну, определяемому уравнениями (21). При $N = 3$, вычислив m_1,m_2 из (21), нетрудно показать, что $0 \leq m_1 \leq$

$\le 3f[x_1,x_2]$, $i=1,2$, если выполнены условия (15),(30). Требуемый результат затем следует из леммы 2.

Докажем теперь утверждение теоремы для промежутка $[x_0,x_N]$. Поскольку выше уже показано, что $S'(x)\ge 0$ при $x\in[x_1,x_{N-1}]$, то имеют место неравенства

$$m_i \ge 0,\quad i = 1,\dots,N-1 . \tag{35}$$

Рассмотрим отрезок $[x_0,x_1]$. При $N=3$ сплайн с краевыми условиями типа IУ совпадает с полиномом Лагранжа $L_0(x)$, и поэтому в соответствии с предположениями (33) имеем

$$0 \le m_0 \le 3f[x_0,x_1]. \tag{36}$$

При $N = 4$, исключив из (18) неизвестные m_1, m_2, m_3, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(A-\mu_1\lambda_2)m_0-\mu_1\mu_2\mu_3 m_4 &= A\tilde{c}_1+\mu_1 B ,\\ -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 m_0+\mu_3(A-\lambda_1\mu_2)m_4 &= A\tilde{c}_3+\lambda_3 B , \end{aligned}\right\}$$

где $A=3+\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3$, $B=2c_2-\lambda_2c_1-\mu_2c_3$. Матрица этой системы монотонна, и поэтому положительность правой части системы, которая следует из (31.1),(32.1), влечет выполнение неравенств $m_0\ge 0$, $m_4\ge 0$.

При $N\ge 5$, исключив из первых двух уравнений (28) неизвестное m_3, имеем соотношение

$$A_1m_2-\mu_2\mu_3m_4 = 2\tilde{c}_2-\mu_2c_3 = B+\lambda_2\tilde{c}_1 , \tag{37}$$

где $A_1= 4-2\mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_3= A-\mu_1\lambda_2$.

Из (22) и (37) находим

$$A_1\lambda_1m_0 = \mu_1(B+\lambda_2\tilde{c}_1)+A_1\tilde{c}_1+\mu_1\mu_2\mu_3m_4 .$$

Так как, согласно (35), $m_4\ge 0$, то отсюда получаем неравенство $A_1\lambda_1m_0\ge A\tilde{c}_1+\mu_1B$, из которого в силу (31.1) имеем $m_0 \ge 0$. Далее, из (22), (23) находим

$$2\lambda_1(2-\mu_1\lambda_2)m_0 = (2-\mu_1\lambda_2)(c_1+\tilde{c}_1) - 2q_1 - 2\mu_1\mu_2 m_3 .$$

Учитывая (35) и (31.2), отсюда получаем при $N > 3$

$$2\lambda_1(2-\mu_1\lambda_2)m_0 \le (2-\mu_1\lambda_2)(c_1+\tilde{c}_1 - 2\mu_1^2 f[x_1,x_2] +$$

$$+ 2\lambda_1^2 f[x_0,x_1]) = 6\lambda_1(2-\mu_1\lambda_2)f[x_0,x_1],$$

т.е. $m_0 \le 3f[x_0,x_1]$ и, следовательно, соотношение (36) верно для всех $N \ge 3$.

Так как

$$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = 3\lambda_1 f[x_0,x_1] + 3\mu_1 f[x_1,x_2],$$

то, учитывая (35), (15), имеем

$$2m_1 \le 3\lambda_1 f[x_0,x_1] + 3\mu_1 f[x_1,x_2] \le 6f[x_0,x_1],$$

т.е.

$$0 \le m_1 \le 3f[x_0,x_1]. \qquad (38)$$

Теперь из (36), (38) и леммы 2 следует, что $S'(x) \ge 0$ при $x \in [x_0,x_1]$. Аналогично $S'(x) \ge 0$ при $x \in [x_{N-1}, x_N]$, и тем самым теорема доказана полностью.

Условия (30)-(33) выглядят довольно громоздко, особенно если переписать их в терминах первых разделённых разностей. Однако нетрудно показать, что все эти условия выполняются, если справедливы неравенства

$$f[x_0,x_1] \ge \max\left\{ \frac{\mu_1(1+2\lambda_1)}{\lambda_1(1+2\mu_1)}, \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} \right\} f[x_1,x_2], \qquad (39)$$

$$f[x_{N-1},x_N] \geq$$

$$\geq \max\left\{\frac{\lambda_{N-1}(1+2\mu_{N-1})}{\mu_{N-1}(1+2\lambda_{N-1})}, \frac{\lambda_{N-1}^2}{\mu_{N-1}^2}\right\} f[x_{N-2},x_{N-1}] \,. \quad (40)$$

Вместе с тем заметим, что неравенства (39),(40) существенно жестче, чем предположения (30)-(33), в чем легко убедиться, рассмотрев, например, случай равномерной сетки. В частности, условия (30.1),(31.1), (31.2),(33), относящиеся к левому концу промежутка $[x_0,x_N]$, на равномерной сетке выглядят следующим образом:

$$2f[x_0,x_1]+ 7f[x_1,x_2]- 3f[x_2,x_3] \geq 0,$$

$$25f[x_0,x_1]- 19f[x_1,x_2]+9f[x_2,x_3]-3f[x_3,x_4] \geq 0,$$

$$5f[x_0,x_1]+ 7f[x_1,x_2]- 4f[x_2,x_3] \geq 0,$$

$$11f[x_0,x_1]- 7f[x_1,x_2]+ 2f[x_2,x_3] \geq 0 \;.$$

§3. Выпуклая интерполяция кубическими сплайнами класса C^2

Вопрос о выпуклости интерполяционного кубического сплайна $S(x)\in C^2$ сводится к анализу знаков величин $M_j= S''(x_j)$, $j= 0,\dots,N$, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &2M_0+ \lambda_0 M_1 = d_0 , \\ &\mu_i M_{i-1}+ 2M_i+ \lambda_i M_{i+1}= d_i , \; i = 1,\dots, N-1, \\ &\mu_N M_{N-1}+ 2M_N= d_N , \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

где $d_i= 6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$, $i= 1,\dots,N-1$; а параметры λ_0, μ_N, d_0, d_N определяются видом краевых условий для сплайна $S(x)$.

Для граничных условий типа I:

$$\lambda_0 = \mu_N = 1, \quad d_0= \frac{6}{h_0}\left[\frac{f_1-f_0}{h_0} - f_0'\right] ,$$

$$d_N = \frac{6}{h_{N-1}}\left(f'_N - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right);$$

для граничных условий типа П:

$$\lambda_0 = \mu_N = 0, \quad d_0 = 2f''_0, \quad d_N = 2f''_N .$$

В [1] доказана

ТЕОРЕМА 3. *Пусть кубический сплайн* $S(x) \in C^2$ *с краевыми условиями* $2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0$, $\mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N$ *интерполирует выпуклые данные* f_i, $i = 0, \ldots, N$ *;* $N > 1$. *Если*

$$\lambda_0 < 4, \ \mu_N < 4, \ d_0 > 0, \ d_N > 0,$$

$$2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \geq 0, \ i = 0, \ldots, N,$$

где $d_{-1} = d_{N+1} = 0$ *, то* $S''(x) \geq 0, \ x \in [a,b]$.

Из теоремы 3 очевидным образом следуют достаточные условия выпуклости сплайна с краевыми условиями типа I:

$$\left.\begin{aligned} &2d_0 - d_1 \geq 0, \\ &2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \geq 0, \ i = 1, \ldots, N-1, \\ &2d_N - d_{N-1} \geq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

и с краевыми условиями типа П:

$$\left.\begin{aligned} &d_0 \geq 0, \\ &2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \geq 0, \ i = 1, \ldots, N-1, \\ &d_N \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Отметим, что условия (42),(43) в определенном смысле слабее ограничений (12), которые являются необходимыми и достаточными условиями выпуклости кубического локального сплайна $\tilde{H}(x) \in C^1$. В самом деле, имеем

$$2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} = \lambda_i(2d_i - d_{i+1}) + \mu_i(2d_i - d_{i-1})$$

Отсюда следует, что неравенства

$$2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \ge 0, \quad i = 2, \dots, N-2,$$

имеют место, если выполнены условия

$$d_i/2 \le d_{i-1} \le 2d_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \tag{44}$$

которые в силу сделанных обозначений совпадают с (12). Что касается остальных требований, входящих в (42) или (43), то их можно удовлетворить выбором величин m_0, m_N или M_0, M_N соответственно. Например, полагая $M_0 = 2f[x_0, x_1, x_2]$, $M_N = 2f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N]$, получаем, что неравенства (43) следуют из (44).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть кубический сплайн* $S(x) \in C^2$ *интерполирует выпуклые данные* f_i, $i = 0, \dots, N$; $N \ge 7$, *и удовлетворяет краевым условиям типа 1У. Если выполнены условия:*

$$\left.\begin{aligned}
&d_1 - \frac{1+\mu_1}{2+\mu_1\mu_2} d_2 \ge 0, \\
&d_2 - \frac{\lambda_2}{2} d_3 - \frac{\lambda_1\mu_2}{1+\lambda_1} d_1 \ge 0, \\
&d_3 - \frac{\lambda_3}{2} d_4 - \frac{\mu_3}{2+\mu_1\mu_2} d_2 \ge 0, \\
&2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \ge 0, \quad i = 4, \dots, N-4, \\
&d_{N-3} - \frac{\lambda_{N-3}}{2+\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}} d_{N-2} - \frac{\mu_{N-3}}{2} d_{N-4} \ge 0,
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$d_{N-2}-\frac{\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}}{1+\mu_{N-1}}\cdot d_{N-1}-\frac{\mu_{N-2}}{2}\cdot d_{N-3}\geq 0,$$

$$d_{N-1}-\frac{1+\lambda_{N-1}}{2+\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}}\cdot d_{N-2}\geq 0,$$

то $S''(x)\geq 0,\ x\in[a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае краевых условий типа IУ система уравнений относительно неизвестных M_i имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1M_0-M_1+\mu_1M_2 &&=0,\\ &\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1} &&=d_i,\ i=1,\dots,N-1,\\ &\lambda_{N-1}M_{N-2}-M_{N-1}+\mu_{N-1}M_N &&=0.\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Исключим из нее неизвестные M_1, M_{N-1}. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&(1+\lambda_1)M_0+(1+\mu_1)M_2=d_1,\\ &\lambda_1\mu_2M_0+(2+\mu_1\mu_2)M_2+\lambda_2M_3=d_2,\\ &\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i,\ i=3,\dots,N-3,\\ &\mu_{N-2}M_{N-3}+(2+\lambda_{N-2}\lambda_{N-1})M_{N-2}+\lambda_{N-2}\mu_{N-1}M_N=d_{N-2},\\ &(1+\lambda_{N-1})M_{N-2}+(1+\mu_{N-1})M_N=d_{N-1}.\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

Применяя к системе (47) лемму 1, получаем, что неравенства $M_j\geq 0$, $j=0,2,3,\dots,N-2,N$, имеют место при выполнении условий (45). Далее, из первого и последнего уравнений системы (46) получаем $M_1\geq 0$, $M_{N-1}\geq 0$. В итоге $M_j\geq 0$, $j=0,\dots,N$. Так как $S''(x)=(1-t)M_i+tM_{i+1}$ при $x\in[x_i,x_{i+1}]$, то из этих неравенств следует утверждение теоремы.

Аналогичным образом из системы (47) могут быть выведены условия выпуклости $S(x)$ для каждого $N=3,4,5,6$. Однако вместо перечисления соответствующих неравенств мы сформулируем, хотя и несколько более жесткие условия, но зато справедливые для всех $N \geq 3$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть кубический сплайн* $S(x) \in C^2$ *интерполирует выпуклые данные* f_i, $i = 0, \ldots, N$; $N \geq 3$, *и удовлетворяет краевым условиям типа 1У. Если выполнены условия:*

$$\left.\begin{aligned} & d_1 - \frac{1+\mu_1}{2+\mu_1\mu_2}\cdot d_2 \geq 0, \\ & 2d_i - \lambda_i d_{i+1} - \mu_i d_{i-1} \geq 0,\ i = 2, \ldots, N-2, \\ & d_{N-1} - \frac{1+\lambda_{N-1}}{2+\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}}\, d_{N-2} \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

то $S''(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

В самом деле, легко видеть, что из (48) при $N \geq 7$ вытекают неравенства (45). Соответствующие рассуждения для $N < 7$, основанные на анализе системы (47), мы опускаем.

В случае интерполяции на достаточно густых сетках функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f'(x) > 0$ $(f''(x) > 0)$, $x \in [a,b]$, для кубических сплайнов класса C^2 справедливы утверждения об их монотонности (выпуклости), полностью аналогичные тем, которые были сформулированы в §1 относительно сплайнов $\tilde{H}(x)$.

§4. Численные эксперименты

Рассмотрим несколько примеров интерполяции функций локальными кубическими сплайнами $\tilde{H}(x) \in C^1$ и кубическими сплайнами $S(x) \in C^2$ с краевыми условиями типа 1У на равномерной сетке с шагом h.

ПРИМЕР 1. $f(x) = x/\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$, $x \in [-1,1]$, $\varepsilon > 0$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[-1,1]$ и при

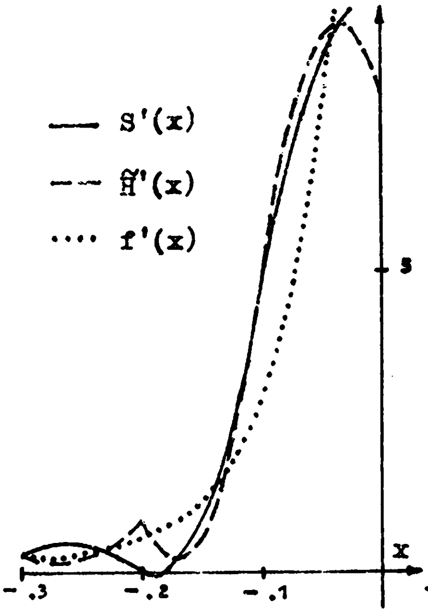

Рис. 1

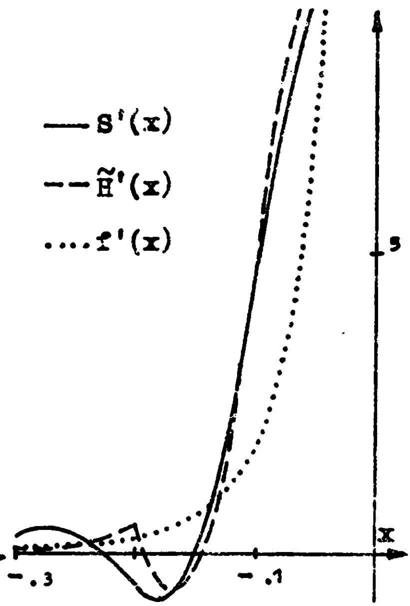

Рис. 2

малых ε имеет быстрый рост в окрестности точки $x = 0$. На рис.1 (ε = .075) и рис. 2 (ε = .05) показаны результаты интерполяции $f(x)$ на сетке с шагом h = .1. Если обозначить

$$k_i = \max\left\{ \frac{f[x_{i-1},x_i]}{f[x_i,x_{i+1}]}, \frac{f[x_i,x_{i+1}]}{f[x_{i-1},x_i]} \right\},$$

$$i = 1,\ldots, N-1; \; K = \max_i k_i,$$

то $K \approx 5.9$ при ε = .075 и $K \approx 12$ при ε = .05. Монотонность обоих сплайнов нарушается при больших K, причем для сплайна $S(x)$ это происходит при меньших значениях K, что согласуется с достаточными условиями монотонности сплайнов

$S(x)$ и $\tilde{H}(x)$. Кроме того, нарушение монотонности для сплайна $S(x)$ в отличие от $\tilde{H}(x)$ может носить нелокальный характер при больших K. В частности, при $\varepsilon = .05$ сплайн $S(x)$ немонотонен не только в окрестности точки $x = -.2$, где k_i велико, но и в окрестности точки $x = -.4$, где $k_i \approx 2.8$ (на рис.2 этот участок не показан).

ПРИМЕР 2. $f(x)= x^4$, $x \in [-1,1]$. На рис. 3 изображены графики $S''(x)$, $\tilde{H}''(x)$. Оба сплайна невыпуклы, но поведение $S''(x)$ более "приятное".

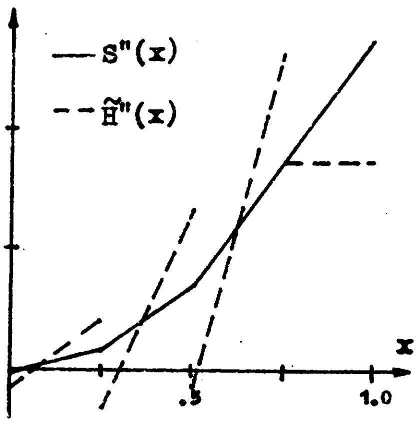

Рис. 3

В §1 сформулировано утверждение о том, что при $f''(x) > 0$, $x \in [a,b]$, на произвольной сетке с достаточно малым h сплайн $\tilde{H}(x)$ будет выпуклым. На примере функции $f(x) = x^4$ покажем, что при этом условие $f''(x) > 0$ нельзя заменить неравенством $f''(x) \geq 0$. Рассмотрим сетку Δ с узлами $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ Тогда $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = (1+ 6i^2)h^2$ и $f[x_0, x_1, x_2]/f[x_{-1}, x_0, x_1] = 7$. Сопоставляя это соотношение с неравенствами (12), получаем, что сплайн $\tilde{H}(x)$, интерполируя выпуклую функцию $f(x) = x^4$ на сетке Δ, при любом h не является выпуклым. Можно показать, что этот факт имеет место и для произвольной неравномерной сетки, если один из ее узлов совмещен с точкой $x = 0$.

ПРИМЕР 3. $f(x) = x^4 + x^2/3$, $x \in [-1,1]$, $h = .25$. В этом случае выполнены условия выпуклости сплайна $S(x)$, а

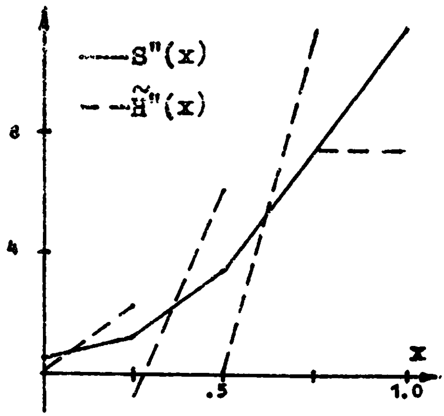

Рис. 4

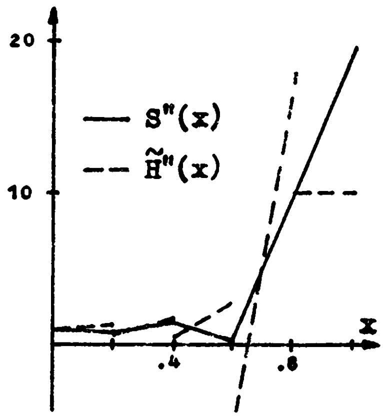

Рис. 5

условия выпуклости $\tilde{H}(x)$ нарушены. Этим объясняется поведение графиков $S''(x)$, $\tilde{H}''(x)$ на рис. 4 и иллюстрируется высказанная в §3 мысль о том, что условия выпуклости сплайна $S(x)$ менее жесткие, чем условия выпуклости для сплайна $\tilde{H}(x)$

ПРИМЕР 4. $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$, $h = .2$. Для этого примера выполнены условия теоремы 4 и, следовательно, гарантируется выпуклость сплайна $S(x)$ В то же время этот вывод нельзя получить из теоремы 5, ибо ее условия нарушаются. Кроме того, здесь снова проявляются преимущества сплайна $S(x)$ в сравнении с $\tilde{H}(x)$ при интерполяции выпуклых функций (рис.5).

В заключение отметим, что в том случае, когда не удается осуществить монотонную или выпуклую интерполяцию кубическими сплайнами класса C^2, целесообразнее всего, на наш взгляд, обратиться к обобщенным кубическим сплайнам - экспоненциальным, рациональным, с дополнительными узлами и т.д. [1,7].

Литература

1. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation //Constructive theory of functions'84. - Sofia, 1984. - P. 610-620.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. FRITSCH F.N., CARLSON R.E. Monotone piecewise cubic interpolation //SIAM J. Numer. Anal. - 1980. - Vol. 17, N 2. - P. 238-246.

4. EISENSTAT S.C.,JACKSON K.R., LEWIS J.W. The order of monotone piecewise cubic interpolation //SIAM J.Numer. Anal. - 1985. - Vol. 22, N 6. - P. 1220-1237.

5. De BOOR C., SWARTZ B. Piecewise monotone interpolants //J. Approxim. Theory. - 1977. - Vol. 21, N 4. -P.411-416.

6. BURMEISTER W., HESS W., SCHMIDT J.W. Convex spline interpolants with minimal curvature //Computing. - 1985. -Vol.35. - P. 219-229.

7. КВАСОВ Б.И., ЯЦЕНКО С.А. Изогеометрическая интерполяция рациональными сплайнами //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. - Вып. 121: Вычислительные системы. -С. 11-36.

Поступила в ред.-изд.отд.

5 ноября 1990 года