П Р И Б Л И Ж Е Н И Е   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1990 год   Выпуск 137

УДК 519.65

О ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Ю.С.Завьялов

В в е д е н и е

Главным инструментом интерполяции при большом числе узлов в настоящее время являются полиномиальные сплайны. Среди них наиболее популярны кубические сплайны $S(x)$ классов C^1 и C^2. С помощью первых решаются задачи локальной эрмитовой интерполяции на сетке узлов Δ: $a = x_0 < \ldots < x_i < \ldots \ldots < x_N = b$. Вторые используются для решения задач лагранжевой интерполяции, сводящихся к решению линейных трехдиагональных алгебраических систем относительно неизвестных $m_i = S'(x_i)$ или $M_i = S''(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$, матрицы которых с диагональным преобладанием. Последнее обстоятельство обеспечивает существование и единственность интерполяционных сплайнов и позволяет сравнительно просто получать оценки погрешности интерполяционных процессов [1].

Существенным недостатком кубических сплайнов являются осцилляции (эффект Гиббса), часто возникающие при больших градиентах в исходных данных, так же, как это имеет место при лагранжевой интерполяции полиномами. Загущение сетки узлов для устранения такого эффекта возможно только при задании функции на целом отрезке, но не при сеточных функциях. По этой причине и появились обобщенные кубические сплайны, содержащие дополнительные параметры, с помощью которых можно устранять осцилляции. добиваясь монотонности или выпуклости сплайна и уменьше -

ния абсолютной погрешности приближения при интерполяции функции, заданной на отрезке. К обобщенным сплайнам относятся, в частности, рациональные и экспоненциальные сплайны, а также сплайны с дополнительными узлами [1-4].

При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ обобщенный кубический сплайн можно представить в виде:

$$S_G(x) = A_i(1-t) + B_i t + C_i \tilde{\varphi}_i(t) + D_i \tilde{\psi}_i(t), \qquad (1)$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Функции $\tilde{\varphi}_i(t)$, $\tilde{\psi}_i(t) \in W^3_\infty[0,1]$ - это комбинации полиномов степени не выше третьей с усеченными степенными, рациональными и экспоненциальными функциями от аргументов t и $1-t$; A_i, B_i, C_i, D_i - константы.

Известны виды комбинаций $\tilde{\varphi}_i(t)$ и $\tilde{\psi}_i(t)$, при которых матрицы систем уравнений относительно величин m_i остаются трехдиагональными с диагональным преобладанием [1-4]. Это обстоятельство было использовано в [4] для получения достаточных условий монотонности сплайна $S_G(x)$. При исследовании выпуклости удобнее использовать системы относительно величин M_i. Но их матрицы для многих видов обобщенных сплайнов, вообще говоря, теряют свойство диагонального преобладания, хотя и известны случаи его сохранения [4].

В данной статье выводятся достаточные, а частично и необходимые условия, налагаемые на функции $\tilde{\varphi}_i(t)$ и $\tilde{\psi}_i(t)$, при выполнении которых матрицы систем относительно m_i или M_i (в зависимости от потребностей) будут трехдиагональными с диагональным преобладанием. В первом случае получились уже известные результаты [1-4], во втором - новые. В качестве примеров рассмотрены упомянутые выше типы обобщенных сплайнов.

Отметим еще работу [5], в которой для целей интерполяции с заданными геометрическими свойствами обобщенными кубическими сплайнами получены результаты о положительности решений систем с трехдиагональными якобиевыми матрицами в общем случае без диагонального преобладания.

Автор благодарит В.В.Богданова, выполнившего расчеты и построение графиков, и В.Л.Мирошниченко, замечания которого способствовали улучшению всей работы.

§1. Интерполяционные обобщенные сплайны. Условия существования и единственности

Определим в (1) постоянные A_i, B_i, C_i, D_i так, чтобы выполнялись условия интерполяции $S_G(x_i) = f_i$ и, кроме того, условия непрерывности производной $S_G^{(r)}(x)$, $r = 1$ или $r = 2$, в узлах сетки Δ. Тогда получаем

$$S_G(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} + h_i^r\{\Phi_{ri}(t)(S_G^{(r)}(x_i) - \delta_1^r f[x_i, x_{i+1}]) + \Psi_{ri}(t)(S_G^{(r)}(x_{i+1}) - \delta_1^r f[x_i, x_{i+1}])\}, \qquad (2)$$

где функции $\Phi_{ri}(t)$ и $\Psi_{ri}(t)$ - линейные комбинации из $\tilde{\varphi}_i(x)$, $\tilde{\psi}_i(t)$ - будем называть *определяющими функциями обобщенного сплайна*, δ_1^r - символ Кронекера, $f[x_i, x_{i+1}]$ - первая разделенная разность.

Чтобы не иметь дела с функциями $\tilde{\varphi}_i(t)$, $\tilde{\psi}_i(t)$, наложим на определяющие функции независимые ограничения, которые обеспечивают выполнение сформулированных выше условий интерполяции и условия непрерывности производной $S_G^{(r)}(x)$:

$$\Phi_{ri}(1) = \Psi_{ri}(0) = 0, \quad \Phi_{ri}(0) = \Psi_{ri}(1) = 0; \qquad (3)$$

$$\Phi_{ri}^{(r)}(1) = \Psi_{ri}^{(r)}(0) = 0, \quad \Phi_{ri}^{(r)}(0) = \Psi_{ri}^{(r)}(1) = 1. \qquad (4)$$

Случай $r = 1$. Представление (2) при условиях (3),(4) обеспечивает непрерывность сплайна и его первой производной в узлах сетки Δ. По аналогии с эрмитовыми кубическими сплайнами можно задавать значения $m_i = S'_G(x_i)$ либо в виде условий $m_i = f'_i$, либо как значения производных интерполяционных полиномов Лагранжа, например, второй степени [1, §2.8]. При этом получаются конструкции, которые естественно называть *эрмитовыми обобщенными* сплайнами класса C^1. Чисто кубическим сплайнам соответствуют функции

$$\Phi_{1i}(t) = t(1-t)^2, \quad \Psi_{1i}(t) = -t^2(1-t). \tag{5}$$

Характерная их особенность в том, что они не зависят от индекса i.

Можно рассматривать и интерполяционные *обобщенные сплайны класса* C^2. Их параметры m_i должны удовлетворять условиям непрерывности второй производной сплайна в узлах сетки Δ: $S''_G(x_i-) = S''_G(x_i+)$. Последние имеют вид:

$$\lambda_i\Phi''_{1,i-1}(1)m_{i-1}+[\lambda_i\Psi''_{1,i-1}(1)-\mu_i\Phi''_{1i}(0)]m_i -$$
$$- \mu_i\Psi''_{1i}(0)m_{i+1} = \lambda_i[\Phi''_{1,i-1}(1)+\Psi''_{1,i-1}(1)] \times$$
$$\times f[x_{i-1},x_i]-\mu_i[\Phi''_{1i}(0)+\Psi''_{1i}(0)]f[x_i,x_{i+1}], \tag{6}$$
$$i = 1,\dots,N-1,$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$.

К ним добавляются граничные условия одного из типов.

Тип I: $m_0 = f'_0$, $m_N = f'_N$.

Тип II: $S''_G(x_0) = f''_0$, $S''_G(x_N) = f''_N$, что дает уравнения

$$\Phi''_{10}(0)m_0+\Psi''_{10}(0)m_1=[\Phi''_{10}(0)+\Psi''_{10}(0)]f[x_0,x_1]+h_0f''_0,$$

$$\Phi''_{1,N-1}(1)m_{N-1}+\Psi''_{1,N-1}(1)m_N =$$

$$= [\Phi''_{1,N-1}(1)+\Psi''_{1,N-1}(1)]f[x_{N-1},x_N]+h_{N-1}f''_N$$

Тип Ш: условия периодичности сплайна, сводящиеся к тому, что в (6) полагается $i = 1,\dots, N$, с циклической заменой индексов .

Тип IУ:

$$S'''_G(x_1-)= S'''_G(x_1+), \quad S'''_G(x_{N-1}-)=S'''_G(x_{N-1}+). \qquad (7)$$

Мы не расписываем уравнения (7) в терминах величин m_i .При необходимости читатель может сделать это самостоятельно. Если же принять в качестве функций $\Phi_{1i}(t)$ и $\Psi_{1i}(t)$, $i = 0,1, N-2,N-1$, функции (5), то можно воспользоваться уже готовыми уравнениями [1, §3.1].

Случай $r = 2$. Здесь рассматриваются обобщенные сплайны только класса C^2 Их параметры $M_i= S''_G(x_i)$ должны удовлетворять условиям непрерывности первой производной в узлах сетки Δ: $S'_G(x_i-) = S'_G(x_i+)$, которые приводят к уравнениям

$$\mu_i\Phi'_{2,i-1}(1)M_{i-1}+[\mu_i\Psi'_{2,i-1}(1)- \lambda_i\Phi'_{2i}(0)]M_i -$$

$$- \lambda_i\Psi'_{2i}(0)M_{i+1}=f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}], \quad i=1,\dots,N-1, \qquad (8)$$

где справа стоят вторые разделенные разности.

Для этой системы граничные условия суть:

Тип I: $S'_G(x_0)=f'_0$, $S'_G(x_N) =f'_N$,что дает уравнения

$$\Phi'_{20}(0)M_0+ \Psi'_{20}(0)M_1= -f[x_0,x_0,x_1],$$

$$\Phi'_{2,N-1}(1)M_{N-1}+ \Psi'_{2,N-1}(1)M_N= f[x_{N-1},x_N,x_N] .$$

Тип П: $M_0= f''_0$, $M_N= f''_N$.

Тип Ш: условия периодичности сплайна - это уравнения (8) для $i = 1,\dots,N$ с циклической заменой индексов.

Тип 1У: условия (7). В общем случае их можно записать через функции $\Phi_{2i}(t)$, $\Psi_{2i}(t)$. В частном же случае можно воспользоваться известными уравнениями [1, §3.1], если принять, как для кубических сплайнов,

$$\Phi_{2i}(t)=-\frac{1}{6}t(1-t)(2-t),\quad \Psi_{2i}(t)=-\frac{1}{6}t(1-t)(1+t) \tag{9}$$

при $i = 0,1,N-2,N-1$

Для кубических сплайнов сумма коэффициентов при величинах M_j в левой части уравнений (8) равна 1/2 и совпадает с коэффициентом при второй производной в правой части, так как $f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = f''(\xi)/2$, $\xi\in[x_{i-1},x_{i+1}]$, если $f(x)\in C^2[a,b]$. В этом смысле выполняется условие баланса по второй производной, причем подобный факт имеет место и для граничных уравнений. Нам кажется естественным сохранение свойства баланса по второй производной и в случае обобщенных сплайнов. В частности, этого можно добиться, потребовав выполнения равенств

$$\Phi'_{2i}(0)+\Psi'_{2i}(0)= -1/2,\quad \Psi'_{2i}(1)+\Phi'_{2i}(1)= 1/2. \tag{10}$$

По сравнению со случаем $r = 1$ здесь равенства (10) дают дополнительные ограничения на функции $\Phi_{2i}(t)$, $\Psi_{2i}(t)$.

Матрицы систем (6) и (8) - трехдиагональные и для кубических сплайнов с диагональным преобладанием. Потребуем, чтобы последнее имело место и в общем случае. Тогда возникают ограничения:

$$\Phi_{ri}^{(3-r)}(0)<\Psi_{ri}^{(3-r)}(0)\le 0,\quad 0\le\Phi_{ri}^{(3-r)}(1)<\Psi_{ri}^{(3-r)}(1). \tag{11}$$

Итак, мы показали, что *для того чтобы существовали и были единственными интерполяционные обобщенные* *сплайны класса* C^2, *достаточно выполнения условий (3), (4), (10) и (11). При этом условия (3), (4) также необходимы.*

§2. Построение определяющих функций

2.1. Введем *базовые функции* $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, которые отличают один вид обобщенных сплайнов от другого. Будем предполагать, что

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i(0) = \psi_i(1) = 1, \\ &\varphi_i^{(p)}(1) = \psi_i^{(p)}(0) = 0, \quad p = 0,1,2. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Функции $\Phi_{ri}(t)$, $\Psi_{ri}(t)$ отыскиваем в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{ri}(t) = \alpha_{0i}\varphi_i(t) + \alpha_{1i}\psi_i(t) + u_i^r(t), \\ &\Psi_{ri}(t) = \beta_{0i}\varphi_i(t) + \beta_{1i}\psi_i(t) + v_i^r(t), \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где α_{0i}, β_{0i}, α_{1i}, β_{1i} - постоянные, а $u_i^r(t)$, $v_i^r(t)$ - полиномы степени не выше трех. Учитывая, что на функции $\Phi_{1i}(t)$, $\Psi_{1i}(t)$ налагается восемь ограничений типа равенств, а на $\Phi_{2i}(t)$, $\Psi_{2i}(t)$ - десять, попытаемся решать задачи со степенями полиномов, равными r, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &u_i^r(t) = u_{0i}(1-t)^r + u_{1i}t^r + u_{2i}^r t(1-t), \\ &v_i^r(t) = v_{0i}(1-t)^r + v_{1i}t^r + v_{2i}^r t(1-t), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $u_{2i}^r = u_i\delta_2^r$, $v_{2i}^r = v_i\delta_2^r$ (δ_2^r - символ Кронекера).

Подставляя в (3) выражения (13)-(14), находим

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{0i} = -u_{0i}, \quad \alpha_{1i} = -u_{1i}, \\ &\beta_{0i} = -v_{0i}, \quad \beta_{1i} = -v_{1i}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Из (4), (14) и (15) выводим:

$$\left.\begin{aligned} &[(-1)^r r-\varphi_i^{(r)}(0)]u_{0i}+ru_{1i}=1+ru_{2i}^r,\\ &(-1)^r ru_{0i}+[r-\psi_i^{(r)}(1)]u_{1i}=ru_{2i}^r, \end{aligned}\right\} \quad (16а)$$

$$\left.\begin{aligned} &[(-1)^r r-\varphi_i^{(r)}(0)]v_{0i}+rv_{1i}=rv_{2i}^r,\\ &(-1)^r rv_{0i}+[r-\psi_i^{(r)}(1)]v_{1i}=1+rv_{2i}^r. \end{aligned}\right\} \quad (16б)$$

При $r = 2$ из (10), (13)-(15) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi_i'(0)+2](u_{0i}+v_{0i})-(u_i+v_i)=\frac{1}{2},\\ &[\psi_i'(1)-2](u_{1i}+v_{1i})+(u_i+v_i)=-\frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Из (11), (13)-(15) получаем неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &0\le[\varphi_i^{(3-r)}(0)+2\delta_2^r]v_{0i}-v_{2i}^r<\\ &\qquad<[\varphi_i^{(3-r)}(0)+2\delta_2^r]u_{0i}-u_{2i}^r,\\ &[\psi_i^{(3-r)}(1)-2\delta_2^r]v_{1i}+v_{2i}^r<\\ &\qquad<[\psi_i^{(3-r)}(1)-2\delta_2^r]u_{1i}+u_{2i}^r\le 0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Равенства (16)-(17) будем использовать для определения коэффициентов u_{0i}, u_{1i}, v_{0i}, v_{1i} и u_i, v_i. Неравенства (18) являются, в дополнение к (12), ограничениями на значения базовых функций и их производных $\varphi_i^{(r)}(0)$ и $\psi_i^{(r)}(1)$, $r = 1,2$.

Поскольку уравнения (17) рассматриваются только при $r = 2$, анализ начнем с вопроса о разрешимости уравнений (16) и на этой основе дадим классификацию возникающих вариантов.

2.2. Пусть определитель систем (16а) и (16б) (он у них один и тот же)

$$\Delta_{ri}= \varphi_i^{(r)}(0)\psi_i^{(r)}(1) - r[\varphi_i^{(r)}(0)+(-1)^r\psi_i^{(r)}(1)]$$

отличен от нуля. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned}
u_{0i}&= \frac{r}{\Delta_{ri}} [1-(\frac{1}{r} + u^r_{2i})\psi_i^{(r)}(1)],\\
u_{1i}&= -\frac{r}{\Delta_{ri}}[(-1)^r+ u^r_{2i}\varphi_i^{(r)}(0)],\\
v_{0i}&= -\frac{r}{\Delta_{ri}}[1+ v^r_{2i}\psi_i^{(r)}(1)],\\
v_{1i}&= \frac{r}{\Delta_{ri}}[(-1)^r-(\frac{1}{r}+ v^r_{2i})\varphi_i^{(r)}(0)].
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Случай $r = 1$. Формулы (13)-(15), (19) полностью определяют функции:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{1i}(t)&=\frac{1}{\Delta_{1i}}\{[1-\psi_i'(1)][-\varphi_i(t)+(1-t)]-\psi_i(t)+t\},\\
\Psi_{1i}(t)&=\frac{1}{\Delta_{1i}}\{\varphi_i(t)-(1-t)+[1+\varphi_i'(0)][\psi_i(t)-t]\},
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

где

$$\Delta_{1i}= \varphi_i'(0)\psi_i'(1)- \varphi_i'(0)+ \psi_i'(1). \qquad (21)$$

Неравенства (18) с учетом (19) дают ограничения:

$$0 \le -\frac{\varphi_i''(0)}{\Delta_{1i}} < \frac{\varphi_i''(0)}{\Delta_{1i}}[1- \psi_i'(1)],$$

$$-\frac{\psi_i''(1)}{\Delta_{1i}}[1+\varphi_i'(0)] < \frac{\psi_i''(1)}{\Delta_{1i}} \le 0.$$

Отсюда ясно, что, во-первых, $\operatorname{sign}\varphi_i''(0) = \operatorname{sign}\psi_i''(1) = \operatorname{sign}(-\Delta_{1i})$ и, во-вторых,

$$\varphi_i'(0) < -2, \qquad \psi_i'(1) > 2. \tag{22а}$$

При этом, согласно (21), $\Delta_{1i} < 0$ и, значит,

$$\varphi_i''(0) > 0, \qquad \psi_i''(1) > 0. \tag{22б}$$

Заметим, что базовыми функциями для построения кубических сплайнов являются функции

$$\varphi_i(t) = (1-t)^3, \quad \psi_i(t) = t^3, \tag{23}$$

которые удовлетворяют условиям (12), (22) и после подстановки в (20) дают функции (5).

Итак, *для существования и единственности интерполяционного обобщенного сплайна класса* C^2 *с определяющими функциями* (20) *достаточно, чтобы базовые функции удовлетворяли условиям* (12), (22).

Случай $r = 2$. По формулам (13)-(15) и (19) находим:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{2i}(t) &= \frac{2}{\Delta_{2i}}\{-[1-(\tfrac{1}{2}+u_i)\psi_i''(1)][\varphi_i(t)-(1-t)^2] + \\
&\quad + [1+u_i\varphi_i''(0)][\psi_i(t)-t^2]\} + u_i t(1-t), \\
\Psi_{2i}(t) &= \frac{2}{\Delta_{2i}}\{[1+v_i\psi_i''(1)][\varphi_i(t)-(1-t)^2] - \\
&\quad - [1-(\tfrac{1}{2}+v_i)\varphi_i''(0)][\psi_i(t)-t^2]\} + v_i t(1-t),
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$\Delta_{2i} = \varphi_i''(0)\psi_i''(1) - 2[\varphi_i''(0) + \psi_i''(1)]. \tag{25}$$

Эти формулы определяют функции $\Phi_{2i}(t)$, $\Psi_{2i}(t)$ с точностью до констант u_i, v_i. Исследуем возможные варианты.

Используем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{\Delta_{2i}}[\varphi_i'(0)+2], & b_i &= -\frac{2}{\Delta_{2i}}[\psi_i'(1)-2], \\ c_i &= a_i\psi_i''(1)+1, & d_i &= b_i\varphi_i''(0)+1. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Из (19) следует, что

$$u_{0i}+v_{0i} = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(u_i+v_i+\tfrac{1}{2})\psi_i''(1),$$

$$u_{1i}+v_{1i} = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(u_i+v_i+\tfrac{1}{2})\varphi_i''(0).$$

Подставляя эти выражения в (17), получаем

$$c_i(u_i+v_i+\tfrac{1}{2}) = 0, \quad d_i(u_i+v_i+\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Это значит, что данные уравнения линейно-зависимы и выполняются в двух случаях:

$$\text{а)} \quad c_i = d_i = 0 \qquad (27)$$

(параметры u_i, v_i произвольны и их можно положить, например, равными нулю);

$$\text{б)} \quad u_i + v_i = -\tfrac{1}{2}. \qquad (28)$$

Рассмотрим оба случая отдельно. Предварительно заметим, что из неравенств (18) с учетом формул (19) и обозначений (26) следуют ограничения:

$$\begin{aligned} 0 &\le -a_i-c_iv_i < 1/2 + a_i - c_i(u_i+1/2), \\ 0 &\le -b_i-d_iu_i < 1/2 + b_i - d_i(v_i+1/2). \end{aligned} \qquad (29)$$

а) В условиях (27) из (29) имеем:

$$-1/4 < a_i < 0\,, \qquad (30а)$$

$$-1/4 < b_i < 0\,. \qquad (30б)$$

Достаточные условия существования обобщенного сплайна (27), (30) содержат ограничения (27) в виде равенств, которые представляют собой довольно жесткие требования (в сравнении с ограничениями типа неравенств), существенно сужающие класс допустимых базовых функций. Тем не менее, как показывает следующий пример, рассмотренный вариант имеет практическую значимость.

Пусть базовые функции таковы, что $\psi_i(t) = \varphi_i(1-t)$ и, следовательно, $\psi_i'(1) = -\varphi_i'(0)$, $\psi_i''(1) = \varphi_i''(0)$. Тогда $\Delta_{2i} = \varphi_i''(0)[\varphi_i''(0)-4]$, а условия (27), (30), как легко видеть, эквивалентны ограничениям

$$\varphi_i''(0) + 2\varphi_i'(0) = 0, \qquad \varphi_i''(0) > 4\,.$$

В частности, этим требованиям удовлетворяют базовые функции (23) кубических сплайнов, для которых $\varphi_i'(0) = -3$, $\varphi_i''(0) = 6$. Более того, для них в (24) слагаемые, содер- щие постоянные u_i, v_i, взаимно уничтожаются, и в конечном итоге получаются формулы (9), не зависящие от этих постоянных.

б) Из (28) и (29) исключим одну из величин u_i, v_i, например v_i. Получаем:

$$0 \le -a_i + c_i(1/2 + u_i) < 1/4\,, \qquad (31а)$$

$$0 \le -b_i - d_i u_i < 1/4\,. \qquad (31б)$$

Случай $c_i = d_i = 0$ сводится к варианту "а". Если $c_i = 0$, $d_i \ne 0$, то (31а) переходит в (30а), а неравенство (31б) всегда можно удовлетворить путем выбора u_i. Аналогично, при $c_i \ne 0$, $d_i = 0$ имеем ограничения (30б), а произвол в выборе u_i используется для выполнения неравенства (31а).

В общем случае, когда $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$, неравенствами (31) определяется пара интервалов изменения величины u_i и, естественно, пересечение этих интервалов не должно быть пустым. Для этого необходимо, чтобы обе левые границы интервалов лежали левее обеих правых границ. Возникающие здесь ситуации определяются знаками величин c_i, d_i.

Пусть $c_i > 0$, $d_i > 0$. Тогда условия (31) эквивалентны неравенствам

$$\alpha_i \le u_i < \beta_i, \tag{32а}$$

$$\tilde{\alpha}_i < u_i \le \tilde{\beta}_i, \tag{32б}$$

где

$$\alpha_i = \frac{a_i}{c_i} - \frac{1}{2}, \quad \beta_i = \frac{1}{c_i}(a_i + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2},$$

$$\tilde{\alpha}_i = -\frac{1}{d_i}(b_i + \frac{1}{4}), \quad \tilde{\beta}_i = -\frac{b_i}{d_i}.$$

Обозначим

$$P_i = c_i d_i - 2(a_i d_i + b_i c_i), \tag{33}$$

$$Q_i = a_i b_i \Delta_{2i} + a_i[\varphi_i''(1)/2-2] + b_i[\varphi_i''(0)/2-2]. \tag{34}$$

Величины P_i, Q_i связаны между собой соотношением

$$P_i = Q_i + (c_i + d_i)/2. \tag{35}$$

Нетрудно показать, что при выполнении требований

$$c_i > 0, \quad d_i > 0, \quad 0 \le P_i < (c_i + d_i)/2, \tag{36а}$$

пересечение интервалов, определяемых условиями (32а) и (32б), дает интервал

$$\max\{\alpha_i, \tilde{\alpha}_i\} \le u_i \le \min\{\beta_i, \tilde{\beta}_i\}. \tag{37а}$$

В трех других возможных случаях имеем:

$$c_i < 0,\ d_i < 0,\ (c_i + d_i)/2 < P_i \le 0, \tag{36б}$$

$$\max\{\beta_i, \tilde\beta_i\} \le u_i \le \min\{\alpha_i, \tilde\alpha_i\}; \tag{37б}$$

$$c_i > 0,\ d_i < 0,\ d_i/2 < P_i < c_i/2, \tag{36в}$$

$$\max\{\alpha_i, \tilde\beta_i\} \le u_i < \min\{\beta_i, \tilde\alpha_i\}; \tag{37в}$$

$$c_i < 0,\ d_i > 0,\ c_i/2 < P_i < d_i/2, \tag{36г}$$

$$\max\{\beta_i, \tilde\alpha_i\} < u_i \le \min\{\alpha_i, \tilde\beta_i\}. \tag{37г}$$

В (37) знаки равенств относятся только к аргументам α_i, $\tilde\beta_i$.

Каждый max и min в формулах (37) зависит от двух аргументов. О том, какой из аргументов является границей интервала изменения величины u_i, удобно судить по знакам разностей r_{ji}, $j = 1,2,3,4$, между вторым и первым аргументами. Имеем

$$\left.\begin{aligned} r_{1i} &= \tilde\alpha_i - \alpha_i = \frac{1}{2c_i d_i}\left(P_i - \frac{c_i}{2}\right), \\ r_{2i} &= \tilde\beta_i - \beta_i = \frac{1}{2c_i d_i}\left(P_i - \frac{d_i}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{38а}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{3i} &= \tilde\beta_i - \alpha_i = \frac{1}{2c_i d_i} P_i, \\ r_{4i} &= \tilde\alpha_i - \beta_i = \frac{1}{2c_i d_i}\left(P_i - \frac{c_i + d_i}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{38б}$$

Итак, *для существования и единственности интерполяционного обобщенного сплайна класса* C^2 *с определяющими функциями* (24) *достаточно, чтобы базовые функции и константы* u_i, v_i *удовлетворяли условиям*

(12) *и одной из групп ограничений:*

а) $c_i = d_i = 0$, (30), u_i, v_i - *произвольные*;

б) $c_i = 0$, (?^a), (31б), (28);

в) $d_i = 0$, (30б), (31а), (28);

г-ж) *пары условий* (36), (37) и (28).

2.3. Пусть теперь $\Delta_{ri} = 0$. Тогда для совместности систем (16а) и (16б) ранги их расширенных матриц должны быть равны 1, что приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^r + u^r_{2i}\varphi_i^{(r)}(0) = 0, \\ &r-(1+ru^r_{2i})\psi_i^{(r)}(1) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (39а)$$

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^r r-(1+rv^r_{2i})\varphi_i^{(r)}(0) = 0, \\ &1+v^r_{2i}\psi_i^{(r)}(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (39б)$$

Случай $r = 1$. Первое уравнение из (39а) и второе из (39б) невозможны, и поэтому обобщенный сплайн здесь не существует.

Случай $r = 2$. Равенства (39) возможны, если $\varphi_i''(0) \neq 0$, $\psi_i''(1) \neq 0$. Поскольку эти величины связаны соотношением $\Delta_{2i} = 0$, то пары уравнений (39) относительно неизвестных u_i, v_i совместны и имеют решение

$$u_i = -[\varphi_i''(0)]^{-1}, \quad v_i = -[\psi_i''(1)]^{-1}. \qquad (40)$$

При этом для u_i, v_i выполняется равенство (28).

Дальнейший анализ проведем при ограничениях (12),(22). Другие случаи исследуются аналогично. В силу (22) и (28) из (17) следуют равенства

$$u_{0i} + v_{0i} = 0, \quad u_{1i} + v_{1i} = 0\ . \qquad (41а)$$

Так как уравнения (16а) и (16б) линейно-зависимы, то из каждой пары к (41а) следует добавить по одному из уравнений или по одной их линейной комбинации, например,

$$-\varphi_i''(0)u_{0i}+\phi_i''(1)u_{1i}=1,\ \varphi_i''(0)v_{0i}-\phi_i''(1)v_{1i}=1. \qquad (41б)$$

Из четырех уравнений (41) линейно-независимы только три, и их решение имеет произвол в один параметр, в качестве которого возьмем u_{0i}. Тогда из (41) получаем

$$\left.\begin{aligned} &u_{1i}=[1+\varphi_i''(0)u_{0i}]/\phi_i''(1),\\ &v_{1i}=-u_{1i},\qquad v_{0i}=-u_{0i}. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Теперь по формулам (13), (14), (40), (42) для данного случая находим

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{2i}(t) &= -u_{0i}[\varphi_i(t)-(1-t)^2] -\\ &\quad - u_{1i}[\phi(t)-t^2]-[\varphi_i''(0)]^{-1}t(1-t),\\ \Psi_{2i}(t) &= u_{0i}[\varphi_i(t)-(1-t)^2] +\\ &\quad + u_{1i}[\phi_i(t)-t^2]-[\phi_i''(1)]^{-1}t(1-t). \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Функции (43) определены с точностью до произвольных констант u_{0i}. Попытаемся распорядиться их выбором так, чтобы выполнялись неравенства (18) (по сравнению со случаем $\Delta_{2i}\neq\neq 0$ здесь константы u_{0i} и u_i как бы поменялись ролями).

По аналогии с (26) введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \varphi_i'(0)+2, & b_i^0 &= -\phi_i'(1)+2,\\ c_i^0 &= a_i^0\phi_i''(1), & d_i^0 &= b_i^0\varphi_i''(0). \end{aligned} \qquad (44)$$

Учитывая соотношения (40), (42), (44) и неравенства (22), из (18) имеем

$$\frac{1}{c_i^0} \le u_{0i} < \frac{1}{2c_i^0}\left[1 - \frac{\psi_i''(1)}{\varphi_i''(0)}\right], \tag{45а}$$

$$\frac{1}{2d_i^0}\left[1 - \frac{\psi_i''(1)}{\varphi_i''(0)}\right] - \frac{1}{\varphi_i''(0)} < u_{0i} \le -\frac{1}{\varphi_i''(0)}\left[1 + \frac{\psi_i''(1)}{d_i^0}\right]. \tag{45б}$$

Условия разрешимости неравенств (45) и интервал допусти - мого изменения величины u_{0i} находятся тем же способом, что из (32) были выведены (36) и (37). В итоге имеем:

$$\left.\begin{array}{l} c_i^0 d_i^0 + c_i^0 \psi_i''(1) + d_i^0 \varphi_i''(0) \le 0, \\ 2c_i^0 d_i^0 + (d_i^0 - c_i^0)[\varphi_i''(0) - \psi_i''(0)] > 0; \end{array}\right\} \tag{46}$$

$$\max\left\{\frac{1}{c_i^0}, \frac{1}{2d_i^0}\left[1 - \frac{\psi_i''(1)}{\varphi_i''(0)}\right] - \frac{1}{\varphi_i''(0)}\right\} \le u_{0i} \le$$

$$\le \min\left\{\frac{1}{2c_i^0}\left[1 - \frac{\psi_i''(1)}{\varphi_i''(0)}\right], -\frac{1}{\varphi_i''(0)}\left[1 + \frac{\psi_i''(1)}{d_i^0}\right]\right\}. \tag{47}$$

Знаки равенств относятся только к аргументам $1/c_i^0$, $-[1+\psi_i''(1)/d_i^0]/\varphi_i''(0)$

Итак, *для существования и единственности интерполяционного обобщенного сплайна класса* C^2 *с определяющими функциями* (43) *достаточно, чтобы базовые функции и константы* u_{0i}, u_{1i} *удовлетворяли условиям* (12), (22), $\Delta_{2i} = 0$ *и* (42), (46), (47).

2.4. В заключение отметим, что общие формулы определяющих функций (20), (24), (43) вытекают из необходимых условий суще - ствования интерполяционного обобщенного сплайна (3), (4). Сформулированные для каждого вида определяющих функций достаточные условия связаны с требованиями к коэффициентам матриц систем

(6) и (8) с соответствующими граничными условиями. Они обеспечивают свойство диагонального преобладания у матриц. Если эти требования не выполняются, то в общем случае вопрос о разрешимости систем нуждается в дополнительном исследовании, а существование и единственность интерполяционного сплайна не гарантируется.

Ниже рассматриваются три частных вида обобщенных сплайнов, отличающихся базовыми функциями, В каждом случае проверяются достаточные условия существования и единственности интерполяционного обобщенного сплайна, установленные в этом параграфе. Для вычисления параметров m_i или M_i сплайна (2) базовые функции следует подставить в определяющие функции, вычислить коэффициенты в системах уравнений и решить последние, например, методом прогонки.

§3. Сплайны с дополнительными узлами

Этим термином обозначаются интерполяционные сплайны, у которых, помимо узлов сетки Δ_{2i} с интерполяционными условиями, имеются дополнительные узлы склейки, в которых эти условия не задаются, а только выполняются требования гладкости сплайна. Варьируя координаты этих узлов, можно добиваться определенных свойств сплайна. Мы рассматриваем сплайны $S_D(x)$ с дополнительными узлами, порожденные усеченными степенными функциями в качестве базовых функций:

$$\varphi_i(t) = \frac{(q_i - t)_+^3}{q_i^3}, \quad \psi_i(t) = \frac{(t-p_i)_+^3}{(1-p_i)^3} \tag{48}$$

в предположении $0 < q_i \le 1,\ 0 \le p_i < 1$.

Значения $t = p_i$ и $t = q_i$ определяют координаты дополнительных узлов. При $p_i = 0,\ q_i = 1$ они сливаются с узлами сетки Δ и функции (48) переходят в базовые функции (23) для кубических сплайнов.

При $p_i > 0$, $q_i < 1$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i'(0) &= -\frac{3}{q_i}, \quad \psi_i'(1) = \frac{3}{(1-p_i)}, \\ \varphi_i''(0) &= \frac{6}{q_i^2}, \quad \psi_i''(1) = \frac{6}{(1-p_i)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Случай $r = 1$. Значения (49) удовлетворяют условиям (12), (22), и, следовательно, обобщенный сплайн существует и единствен.

Случай $r = 2$. Для решения вопроса о существовании сплайна подсчитаем по формулам (25),(26) значения:

$$\Delta_{2i} = 12q_i^{-2}(1-p_i)^{-2}\Delta_i \ ,$$

$$a_i = \frac{2(2q_i-3)}{\Delta_{2i}q_i} \ , \quad b_i = \frac{-2(1+2p_i)}{\Delta_{2i}(1-p_i)} \ ,$$

$$c_i = [(2-q_i)(1-q_i)+p_i(2-p_i)]/\Delta_i \ ,$$

$$d_i = [p_i(1+p_i)+1-q_i^2]/\Delta_i \ ,$$

где $\Delta_i = 3-(1-p_i)^2 - q_i^2$.

Очевидны неравенства $\Delta_{2i} > 0$, $a_i < 0$, $b_i < 0$, $c_i > 0$, $d_i > 0$, в силу которых из (33) следует $P_i > 0$. Далее из (34) получаем

$$Q_i = [-p_i q_i(3-2q_i)-(1-p_i)(1-q_i)(1+2p_i)]/(2\Delta_i) < 0$$

и поэтому из (35) имеем $P_i < (c_i + d_i)/2$. В итоге выполнены условия (36а), следствием которых является *существование и единственность обобщенного сплайна с базисны -*

ми функциями (48) и постоянными u_i, v_i *, опреде-ляемыми соотношениями (28), (37а).*

Так как

$$P_i - c_i/2 = Q_i + d_i/2 =$$
$$= [p_i^2(3-3q_i+q_i^2)+q_i(1-q_i)(1-p_i)^2]/(2\Delta_i) > 0,$$

$$P_i - d_i/2 = Q_i + c_i/2 =$$
$$= [(1-q_i)^2(1+p_i+p_i^2)+p_i(1-p_i)q_i^2]/(2\Delta_i) > 0 ,$$

то из (38а) и (37а) имеем $\tilde{\alpha}_i < u_i < \beta_i$

Если $0 < p_i < q_i < 1$, то на каждом из подотрезков $[0, p_i]$, $[p_i, q_i]$, $[q_i, 1]$ отрезка $[0,1]$ определяющие функции, а значит, и сплайны представляются кубическими полиномами. При $p_i = q_i = 1/2$ два дополнительных узла сливаются в один. Если же $0 < q_i < p_i < 1$, то при $t \in [q_i, p_i]$ имеем $\varphi_i(t) = \psi_i(t) \equiv 0$ и $\Phi_{ri}(t)$, $\Psi_{ri}(t)$ при $r = 1$ суть линейные, а при $r = 2$ - квадратические функции. Такими будут при этих значениях t и сами сплайны.

§4. Рациональные сплайны

Рациональные сплайны - это обобщенные сплайны $S_R(x)$, у которых базовые функции являются рациональными. Рассматриваем

$$\varphi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{1+q_i t}, \quad \psi_i(t) = \frac{t^3}{1+p_i(1-t)} \tag{50}$$

в предположении $-1 < p_i, \ q_i < \infty$. При $p_i = q_i = 0$ функции (50) переходят в функции (23) для кубических сплайнов.

Подсчитаем значения:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i'(0) = -(3+q_i), \quad \psi_i'(1) = 3+p_i; \\ &\varphi_i''(0) = 2(3+3q_i+q_i^2), \quad \psi_i''(1) = 2(3+3p_i+p_i^2). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Случай $r = 1$. Значения (51) удовлетворяют условиям (12), (22), и, следовательно, обобщенный сплайн существует и единствен. Именно с этого примера началось систематическое изучение рациональных сплайнов в [2], продолженное в [1].

Случай $r = 2$. Для проверки достаточных условий существования сплайна по формулам (25), (26) подсчитаем:

$$\Delta_{2i} = 4[(1+p_i)(2+p_i)(1+q_i)(2+q_i)-1],$$

$$a_i = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(1+q_i), \quad b_i = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(1+p_i),$$

$$c_i = \frac{4}{\Delta_{2i}}[(1+p_i)(1+q_i)-1][(1+p_i)(1+q_i)+2+q_i],$$

$$d_i = \frac{4}{\Delta_{2i}}[(1+p_i)(1+q_i)-1][(1+p_i)(1+q_i)+2+p_i].$$

Очевидно, Δ_{2i} может принимать значения в диапазоне $-4 < \Delta_{2i} < \infty$. Ясно также, что c_i, d_i могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Поэтому, прежде всего, в плоскости (p_i, q_i) рассмотрим области разных знаков величин Δ_{2i}, c_i, d_i Отметим, что для c_i и d_i они одинаковы, ибо зависят от знаков Δ_{2i} и первых квадратных скобок в их формулах.

Линия $c_i(p_i, q_i) = d_i(p_i, q_i) = 0$ при $\Delta_{2i} \neq 0$ есть гипербола с уравнением $(1+p_i)(1+q_i) = 1$, а линия $\Delta_{2i}(p_i, q_i) = 0$ - кривая четвертого порядка с уравнением $(1+p_i)(2+p_i)(1+q_i)(2+q_i) = 1$. Прямые $p_i = -1$ и $q_i = -1$ являются их асимптотами. Указанные кривые делят область $(-1, \infty) \times (-1, \infty)$ на три подобласти:

A: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i > 0$, $d_i > 0$;
B: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i < 0$, $d_i < 0$;
C: $\Delta_{2i} < 0$, $c_i < 0$, $d_i < 0$.

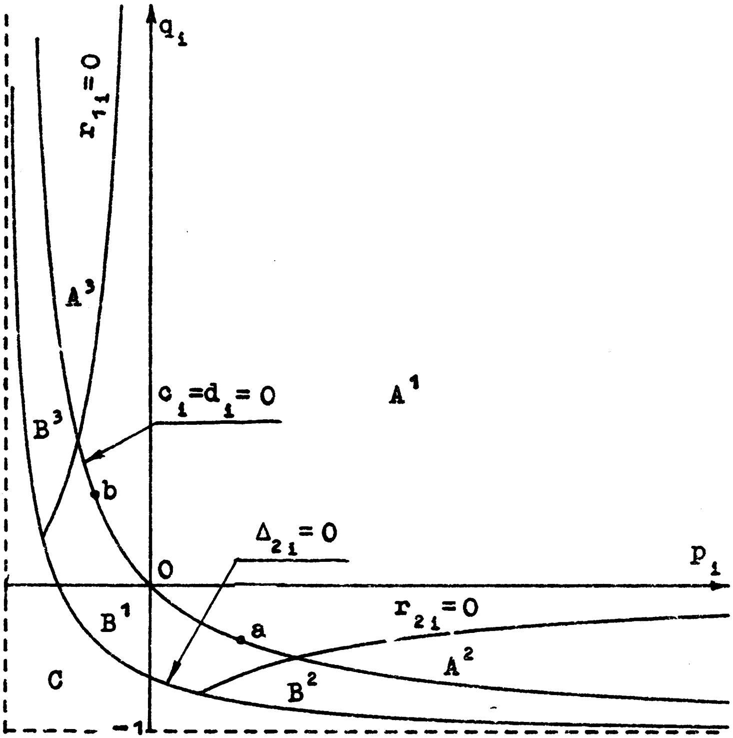


Рис. 1

На рис.1 области A и B изображены разбитыми соответствен - но на подобласти A^1, A^2, A^3 и B^1, B^2, B^3.

Для исследования свойств сплайнов в областях A, B, C по формулам (33), (34) подсчитываем

$$P_i = 4[(1+p_i)^2(1+q_i)^2-1]/\Delta_{2i},$$

$$Q_i = -2(2+p_i+q_i)[(1+p_i)(1+q_i)-1]/\Delta_{2i}.$$

Графики линий $P_i = 0$, $Q_i = 0$ при $\Delta_{2i} \neq 0$ совпадают с гиперболой.

В области A имеем $P_i > 0$, $Q_i < 0$, и, следовательно, в A выполнены условия (36а). При этом допустимый интервал для u_i определяется формулой (37а). Из (38а) находим

$$r_{1i} = \frac{1}{c_i d_i \Delta_{2i}}[(1+p_i)(1+q_i)-1](1+p_i+p_i q_i),$$

$$r_{2i} = \frac{1}{c_i d_i \Delta_{2i}}[(1+p_i)(1+q_i)-1](1+q_i+p_i q_i).$$

С учетом выражений для c_i, d_i, Δ_{2i} ясно, что $r_{1i} = 0$ на линии $p_i q_i + p_i + 1 = 0$, а $r_{2i} = 0$ на линии $p_i q_i + q_i + 1 = 0$ (рис.1).

В подобласти A^1 имеем $r_{1i} > 0$, $r_{2i} > 0$ и (37а) эквивалентно условиям

$$\tilde{\alpha}_i < u_i < \beta_i . \tag{52а}$$

Аналогично

$$\tilde{\alpha}_i < u_i \leq \tilde{\beta}_i, \qquad (p_i, q_i) \in A^2 , \tag{52б}$$

$$\alpha_i \leq u_i < \beta_i, \qquad (p_i, q_i) \in A^3 . \tag{52в}$$

Величины v_i определяются согласно (28).

На линии $c_i = d_i = 0$ имеем $\Delta_{2i} = 4(3 + p_i + q_i)$. Здесь должны выполняться неравенства (30), из которых получаем

$$(3+p_i+q_i) > 2(1+p_i) > 0, \ (3+p_i+q_i) > 2(1+q_i) > 0.$$

Правые части неравенств выполняются при всех допустимых p_i, q_i, а левые только при условии $-1 < p_i - q_i < 1$. В силу уравнения гиперболы из этих неравенств вытекают условия $p_i, q_i < (\sqrt{5}-1)/2$. Они определяют множество на гиперболе, границами которого являются точки a $((\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}-3)/2)$ и b $((\sqrt{5}-3)/2, (\sqrt{5}-1)/2)$. Для значений p_i, q_i, не принадлежащих множеству, не гарантируется существование обобщенного сплайна с определяющими функциями (24).

В областях B и C вопрос о существовании сплайна сводится к проверке неравенств (36б). В области B имеем $P_i<0$, $Q_i>0$ и неравенства (36б) выполняются. Анализируя знаки величин r_{1i}, r_{2i}, нетрудно получить из (37б) интервалы изменения u_i. В подобластях B^k, $k=1,2,3$, интервалы для u_i получаются из соответствующих интервалов в A^k (52) путем замены знаков в неравенствах на противоположные.

В области C из-за перемены знака у Δ_{2i} знаки P_i и Q_i меняются: $P_i>0$, $Q_i<0$, и условия (36б) не выполняются.

Остается исследовать ситуацию на линии $\Delta_{2i}(p_i, q_i)=0$. Так как (51) удовлетворяют условиям (12), (22), то достаточно проверить условия (46). По формулам (44) находим:

$$
\begin{aligned}
a_i^0 &= -(1+q_i)<0,\\
b_i^0 &= -(1+p_i)<0,\\
c_i^0 &= -2(1+q_i)(3+3p_i+\eta p_i^2)<0,\\
d_i^0 &= -2(1+p_i)(3+3q_i+\eta q_i^2)<0,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

где $\eta=1$.

Подставляя эти выражения в (46) и учитывая уравнение $\Delta_{2i}=0$, получаем при всех допустимых p_i, q_i:

$$\frac{1}{(2+p_i)(2+q_i)}\left(\frac{1}{1+p_i}+\frac{1}{1+q_i}\right)[(1+p_i)(1+q_i)-1]<0,$$

$$(1+p_i)^2\left(2+p_i-\frac{1}{2+q_i}\right)+(1+q_i)^2\left(2+q_i-\frac{1}{2+p_i}\right)+$$

$$+ (1+p_i)\left[2+q_i+\frac{1}{2+q_i}-\frac{1}{(2+p_i)(2+q_i)}\right]+$$

$$+ (1+q_i)\left[2+p_i+\frac{1}{2+p_i}-\frac{1}{(2+p_i)(2+q_i)}\right]>0 .$$

Выбор констант u_{0i}, u_{1i} в определяющих функциях (43) осуществляется согласно (47), (42).

Таким образом, *при использовании рациональных сплайнов их параметры* p_i, q_i, $i=0,\dots,N-1$, *при* r = 2 *можно выбирать из областей* A *и* B , *включая линии* $\Delta_{2i}(p_i, q_i) = 0$, *но исключая указанные куски гипербол* $c_i(p_i, q_i) = d_i(p_i, q_i) = 0$.

§5. Экспоненциальные сплайны

Экспоненциальные сплайны $S_E(x)$ порождаются базовыми функциями

$$\varphi_i(t) = (1-t)^3\exp(-q_i t) , \tag{54}$$

$$\psi_i(t) = t^3\exp(-p_i(1-t)) ,$$

в предположении $-1 < p_i, q_i < \infty$. Они имеют много общего с рациональными сплайнами. Базовые функции последних получаются из (54), если экспоненты разложить в ряд по малым параметрам p_i и q_i , сохраняя только два первых члена разложения. При $p_i = q_i = 0$ функции (54) переходят в базовые функции (23) для кубических сплайнов.

Имеем

$$\left.\begin{aligned}\varphi_i'(0) &= -(3+q_i) , \quad \psi_i'(1) = 3+p_i , \\ \varphi_i''(0) &= 6+6q_i+q_i^2 , \quad \psi_i''(1) = 6+6p_i+p_i^2 .\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Случай $r = 1$. Значения (55) удовлетворяют условиям (12), (22), и, следовательно, экспоненциальный сплайн существует и единствен. Этот пример приведен в [3].

Случай $r = 2$. Для проверки достаточных условий существования сплайна по формулам (25), (26) подсчитаем:

$$\Delta_{2i} = (4+6p_i+p_i^2)(4+6q_i+q_i^2)-4 ,$$

$$a_i = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(1+q_i) , \; b_i = -\frac{2}{\Delta_{2i}}(1+p_i) ,$$

$$c_i = \frac{1}{\Delta_{2i}}[(4+6p_i+p_i^2)(2+4q_i+q_i^2) - 4(2+q_i)] ,$$

$$d_i = \frac{1}{\Delta_{2i}}[(2+4p_i+p_i^2)(4+6q_i+q_i^2) - 4(2+p_i)] .$$

Как и в случае рациональных сплайнов, $-4 < \Delta_{2i} < \infty$, а величины c_i, d_i могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. В плоскости (p_i, q_i) рассмотрим области разных знаков Δ_{2i}, c_i, d_i. В отличие от рациональных сплайнов эти области разные у c_i и d_i.

Обозначим $\alpha = -2+\sqrt{2}$, $\beta = -3+\sqrt{5}$. Кривая $\Delta_{2i}(p_i, q_i) = 0$ имеет две асимптоты: $p_i = \beta$, $q_i = \beta$. При $\Delta_{2i} \neq 0$ линии $c_i(p_i, q_i) = 0$ и $d_i(p_i, q_i) = 0$ в точке $p_i = q_i = 0$ имеют общие касательную с угловым коэффициентом -1 и кривизну, равную $3\sqrt{2}/4$, а их асимптотами являются соответственно прямые $p_i = \beta$, $q_i = \alpha$ и $p_i = \alpha$, $q_i = \beta$.

Указанные кривые относятся к кривым четвертого порядка и разделяют рассматриваемую область изменения параметров p_i, q_i на пять подобластей (рис.2):

A: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i > 0$, $d_i > 0$;

B: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i > 0$, $d_i < 0$;

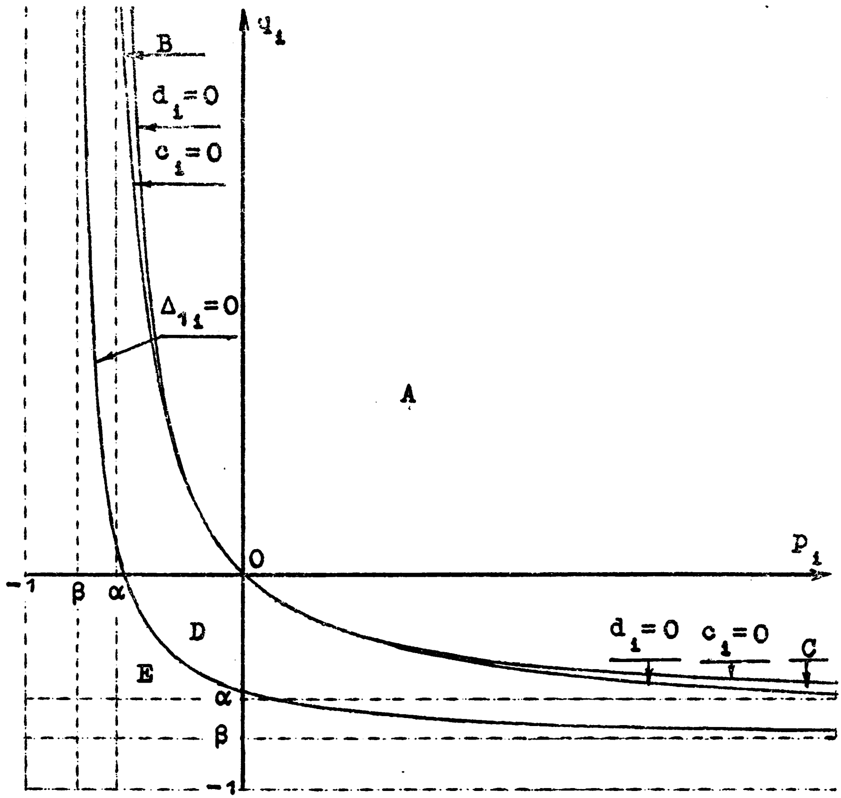
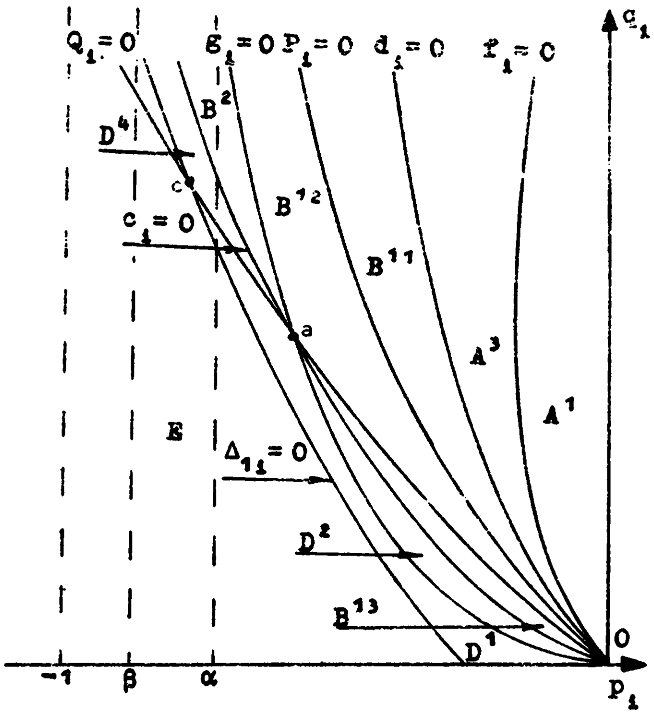


Рис. 2

C: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i < 0$, $d_i > 0$;

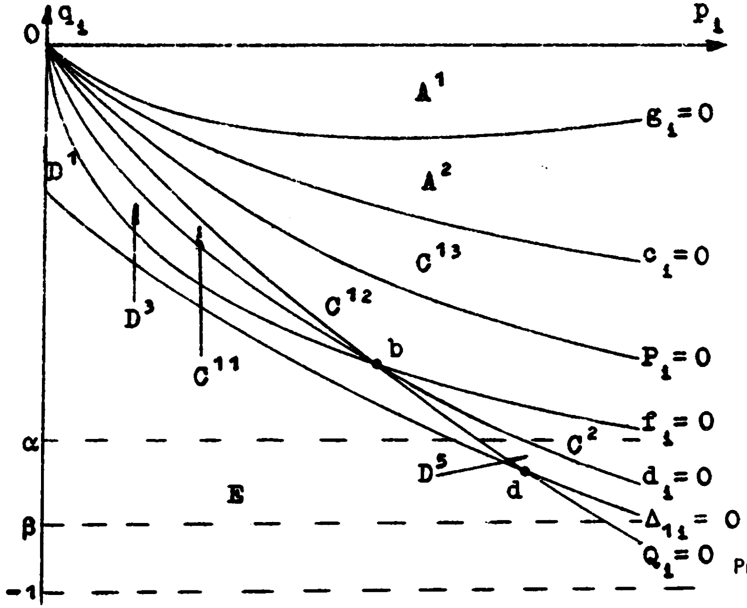
D: $\Delta_{2i} > 0$, $c_i < 0$, $d_i < 0$;

E: $\Delta_{2i} < 0$, $c_i < 0$, $d_i < 0$.



Q_i = 0
g_i = 0
P_i = 0
d_i = 0
f_i = 0
q_i
B^2
D^4
c
B^12
c_i = 0
B^11
a
A^3
A^1
E
Δ_1i = 0
D^2
B^13
O
D^1
-1
β
α
p_i

Рис. 3



O
q_i
p_i
A^1
g_i = 0
D^1
A^2
c_i = 0
C^13
D^3
C^12
C^11
b
P_i = 0
f_i = 0
α
C^2
D^5
d
d_i = 0
E
β
Δ_1i = 0
Q_i = 0
-1

Рис. 4

По формулам (33), (34) находим

$$P_1 = \frac{1}{\Delta_{21}}[(2+4p_1+p_1^2)(2+4q_1+q_1^2)-4],$$

$$Q_1 = -\frac{1}{\Delta_{21}}[p_1(1+q_1)(4+p_1)+q_1(1+p_1)(4+q_1)].$$

При $\Delta_{21} \neq 0$ кривые четвертого $P_1(p_1, q_1) = 0$ и третьего $Q_1(p_1, q_1) = 0$ порядков в точке $p_1 = q_1 = 0$ имеют общие касательные и кривизны с кривыми $c_1 = d_1 = 0$. Асимптотами линии $P_1 = 0$ являются прямые $p_1 = \alpha$ и $q_1 = \alpha$, а линия $Q_1 = 0$ имеет асимптоты $p_1 = -1$, $q_1 = -1$.

В области A имеем $P_1 > 0$, $Q_1 < 0$ и, следовательно, выполнены условия (36а). Построим линии

$$f_1(p_1, q_1) = P_1 - \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2\Delta_{21}}[(2p_1+p_1^2)(2+4q_1+q_1^2)+4q_1] = 0,$$

$$g_1(p_1, q_1) = P_1 - \frac{d_1}{2} = \frac{1}{2\Delta_{21}}[(2+4p_1+p_1^2)(2q_1+q_1^2)+4p_1] = 0.$$

В точке $p_1 = q_1 = 0$ они имеют общие касательные и кривизны с линиями $c_1 = d_1 = 0$ и по две асимптоты: у $f_1 = 0$ это $p_1 = 0$, $q_1 = \alpha$, а у $g_1 = 0$ – $p_1 = \alpha$, $q_1 = 0$.

Три кривые $c_1 = 0$, $Q_1 = 0$, $g_1 = 0$ в рассматриваемой области p_1, q_1 пересекаются, кроме точки (0,0), еще в точке a $(\sqrt{7}-3, \sqrt{3}-1)$, координаты которой определяются решениями уравнений $p_1^2+6p_1+2=0$, $q_1^2+2q_1-2=0$. Аналогично три кривые $d_1 = 0$, $Q_1 = 0$, $f_1 = 0$ пересекаются в точке b $(\sqrt{3}-1, \sqrt{7}-3)$ (рис. 3,4). Отметим, что рис.3,4 носят лишь качественный характер, ибо их размеры не позволяют изобразить точную картину расположения кривых в окрестности начала координат.

В области A согласно (36а),(38а) имеем $\operatorname{sign} r_{11} = \operatorname{sign} f_1$, $\operatorname{sign} r_{21} = \operatorname{sign} g_1$. Нетрудно видеть, что в подобластях A^1, A^2, A^3 области A выполняются неравенства:

$$r_{1i} > 0,\ r_{2i} > 0,\quad (p_i, q_i) \in A^1,$$

$$r_{1i} > 0,\ r_{2i} < 0,\quad (p_i, q_i) \in A^2,$$

$$r_{1i} < 0,\ r_{2i} > 0,\quad (p_i, q_i) \in A^3,$$

и, таким образом, интервалы для параметра u_i в A^1, A^2, A^3 определяются соответственно формулами (52). Параметр v_i находится затем из (28).

На линии $g_i = 0$ раздела подобластей A^1 и A^2, исключая начало координат, $r_{2i} = 0$, и можно использовать любые из неравенств (52а), (52б). Аналогично на линии $f_i = 0$, которая разделяет A^1 и A^3, можно использовать любые из неравенств (52а), (52в).

В подобласти B^1 области B (рис.3) $f_i < 0,\ g_i > 0$ и выполнены условия (36а). В подобласти B^2, включая ее границу $g_i = 0$, имеем $f_i < 0, g_i \le 0$ и соотношения (36в) не выполняются, а потому существование сплайна $S_E(x)$ не гарантируется.

Линиями $P_i = 0,\ Q_i = 0$ область B^1 делится на три подобласти B^{1k}, $k = 1,2,3$. Так как $P_i > 0,\ Q_i < 0$ в B^{11} и, согласно (38б), $r_{3i} < 0,\ r_{4i} > 0$, то для точек из B^{11} неравенства (37в) эквивалентны условиям

$$\alpha_i \le u_i < \beta_i. \tag{56а}$$

Аналогично

$$\tilde{\beta}_i \le u_i < \beta_i,\quad (p_i, q_i) \in B^{12}, \tag{56б}$$

$$\tilde{\beta}_i \le u_i < \tilde{\alpha}_i,\quad (p_i, q_i) \in B^{13}. \tag{56в}$$

На линиях $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$, разделяющих подобласти, можно пользоваться неравенствами для любой из подобластей, которые они разграничивают.

Аналогично предыдущему сплайн $S_E(x)$ существует в области C^1 и может не существовать в C^2. Область C^1 линиями $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ делится на подобласти C^{1k}, $k = 1, 2, 3$ (рис.3). Учитывая знаки величин r_{31} и r_{41}, из (37г) находим, что при $k = 1,3$ интервалы для u_1 получаются из (56а) и (56в) заменой знаков в неравенствах на противоположные. При $k = 2$ интервал для u_1 определяется соотношением $\tilde{\alpha}_1 < u_1 \le \alpha_1$. На линиях $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ можно использовать любой из интервалов, соответствующих подобластям, которые эти линии разграничивают.

Обратимся теперь к линиям $c_1 = 0$ и $d_1 = 0$, которые разделяют области A, B, C. На линии $c_1 = 0$ должны выполняться условия (30а) и (31б). Легко показать, что первое из них сводится к неравенству $p_1^2 + 6p_1 + 2 > 0$, которое выполняется для всех точек, расположенных ниже точки a. Так что и для правой границы области B^2 сплайн может не существовать. Условие (31б) для открытой дуги $(a, 0)$, где $d_1 < 0$, сводится к условию (56в), а для части кривой в четвертом квадранте $(d_1 > 0)$ к тому же условию, но с противоположными знаками неравенств.

Аналогично на линии $d_1 = 0$ сплайн заведомо существует для точек, лежащих выше точки b (рис.4). При этом для части кривой во втором квадранте, где $c_1 > 0$, интервал для определения u_1 будет (56а), а для дуги $(0, b)$, $c_1 < 0$, в (56в) знаки неравенств следует сменить на противоположные.

В начале координат $c_1 = d_1 = 0$ и должны выполняться неравенства (30), что в данном случае имеет место.

Область D кривыми $f_1 = 0$, $g_1 = 0$, $Q_1 = 0$ делится на пять подобластей D^k, $k = 1, \ldots, 5$ (рис.3,4). В D должны выполняться условия (36б). В подобластях D^1, D^2, D^3 имеем $P_i < 0$, $Q_i > 0$ и (36б) выполняются. В подобластях D^4, D^5, включая их границы, $P_i < 0$, $Q_i \le 0$ и (36б) не выполняются, а, значит, сплайн $S_E(x)$ может не существовать.

В подобластях D^k, $k = 1,2,3$, $\operatorname{sign} r_{1i} = \operatorname{sign} f_i$, $\operatorname{sign} r_{2i} = \operatorname{sign} g_i$. Учитывая знаки r_{1i}, r_{2i}, из (37б) находим, что интервалы для определения u_i получаются соответственно из (52а), (52б), (52в) заменой знаков неравенств на противоположные.

В области E не выполняются условия (36б), так как $P_i > 0$, $Q_i < 0$ из-за смены знака у Δ_{2i}, и сплайн может не существовать.

Наконец, исследуем ситуацию на линии $\Delta_{2i}(p_i, q_i) = 0$. Так как (55) удовлетворяют условиям (12), (22), то достаточно проверить условия (46). По формулам (44) находим (53), где $\eta = 1/2$. Первое из условий (46) эквивалентно неравенству

$$(1+q_i)(2+p_i)^2(6+6p_i+p_i^2)+(1+p_i)(2+q_i)^2(6+6q_i+q_i^2) > 0,$$

которое выполняется при всех допустимых p_i, q_i.

Левая часть второго неравенства (46) приводится к виду

$$(6+6p_i+p_i^2)[2(1-p_iq_i)-(1+q_i)p_i^2] +$$
$$+ (6+6q_i+q_i^2)[2(1-p_iq_i)-(1+p_i)q_i^2].$$

Эта величина положительна на открытой дуге (c,d), где $c\,(-0{,}7552;\ 7{,}370)$ и $d\,(7{,}370;\ -0{,}7552)$ - точки пересечения кривых $\Delta_{2i} = 0$ и $Q_i = 0$, и неположительна вне ее.

Выбор констант u_{0i}, u_{1i} в определяющих функциях (43) производится согласно (47), (42).

Подводя итог проделанным рассуждениям, можно сделать следующий вывод.

При использовании экспоненциальных сплайнов класса C^2 *их параметры* p_i, q_i, $i = 0,\ldots,N-1$, *можно выбирать из областей* A, B, C, D , *включая границу области* D $\Delta_{21}(p_i, q_i) = 0$, *но исключая объединение областей* B^2 *и* D^4, C^2 *и* D^5 *с границами.*

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruction glatter Kurven und Flächen.-München - Wien: R. Oldenburg Verl., 1973.

3. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь, 1985. - 303 с.

4. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation //Конструктивная теория функций'84. - София, 1984. - С. 610-620.

5. ВЕРЛАН И.И. Положительные решения систем линейных алгебраических уравнений с якобиевыми матрицами коэффициентов // Математические исследования. Вып. 104. Программное обеспечение вычислительных комплексов. - Кишинёв: Штиинца, 1988. -С.52-59.

Поступила в ред.-изд.отд.

29 декабря 1989 года