

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИИ $up(x)$

В.Ф.Забалуев, В.В.Сонин

Функция $up(x)$ относится к атомарным функциям - новому направлению в теории приближений [1-4] и является ненулевым финитным решением дифференциально-разностного уравнения:

$$up'(x) = 2[up(2x+1) - up(2x-1)]. \quad (1)$$

Эта функция обладает рядом интересных свойств, благодаря которым из ее сдвигов, как из "атомов", можно составить любой многочлен, хорошо приближающий дифференцируемые функции.

Например:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} up(x-k) \equiv 1;$$

$$\frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot up\left(x - \frac{k}{2}\right) \equiv x;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{k^2}{64} - \frac{1}{36} \right] up\left(x - \frac{k}{4}\right) \equiv x^2 .$$

Функция $up(x)$ не равна нулю на интервале $(-1,1)$ и равна нулю вне него. Функция четна, что позволяет обходиться ее

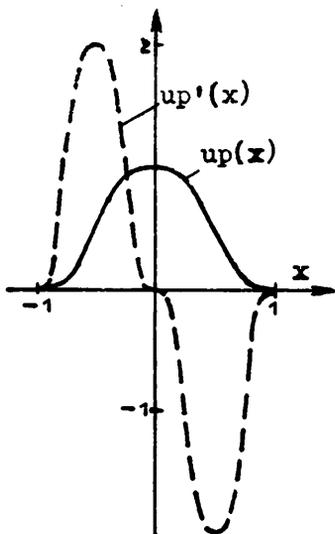


Рис. 1

вычислением только на одной половине интервала, когда $x \in (0,1)$. Важным свойством функции $up(x)$ является то, что ее производная содержит одну "вершину" и одну "впадину", каждая из которых повторяет форму самой функции, сжатой на интервале и увеличенной по высоте в два раза (рис.1). Это позволяет, используя выражение (1), вычислять производную любого порядка в заданной точке по значениям самой функции. В точках $-1, 0, 1$ производные от $up(x)$

всех порядков равны нулю. Свойства $up(x)$ подробно изучаются в работах [2-6]. В [1] приведено явное выражение для $up(x)$ в виде интеграла Фурье:

$$up(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(t2^{-k})}{t2^{-k}} dt . \quad (2)$$

Отметим наиболее интересные приложения функции $up(x)$, рассмотренные в работах [1,6].

1. Возможность ее использования в анализе, при введении обобщенных функций, вместо классической функции (например, [7]):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{k^2}{1-x^2}\right\} & \text{при } |x| < 1 , \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1 . \end{cases}$$

2. Построение на базе $up(x)$ различных схем интерполяции и аппроксимации функций, аналогичных сплайн-аппроксимации.

3. Использование соответствующих формул приближения функций для построения алгоритмов решения различных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными.

Из всех публикаций только в статье [8] приведен алгоритм вычисления функции $up(x)$. В остальных публикациях даются ссылки на нее как на основную работу, где изложена методика вычисления функции. Программа, составленная авторами по материалам статьи [8], не дала правильных результатов. Как впоследствии оказалось, в тексте статьи содержалось большое количество ошибок. В результате пришлось полностью выполнить всю работу по выведению формул, заново вычислить таблицу коэффициентов, которые входят в расчетные формулы, и составить работающую программу.

Ниже без вывода приведены все необходимые для вычисления функции $up(x)$ формулы, коэффициенты и блок-схема расчета.

Для вычисления $up(x-1)$ воспользуемся выражением

$$up(x-1) = \sum_{N=1}^M (-1)^{1 + \sum_{j=1}^N P_j} P_N \sum_{k=0}^N A_{Nk} (x - [x \cdot 2^N] 2^{-N})^k, \quad (3)$$

где P_j и P_N - значения соответствующих разрядов в двоичном представлении числа $x = 0.P_1, \dots, P_N, \dots$; $[y]$ означает взятие целой части y . Константы A_{Nk} определяются по следующей формуле:

$$A_{Nk} = \frac{2^{C_{k+1}^2} b_{N-k-1}}{2^{C_{N-k}^2} (N-k-1)! k!} \quad (4)$$

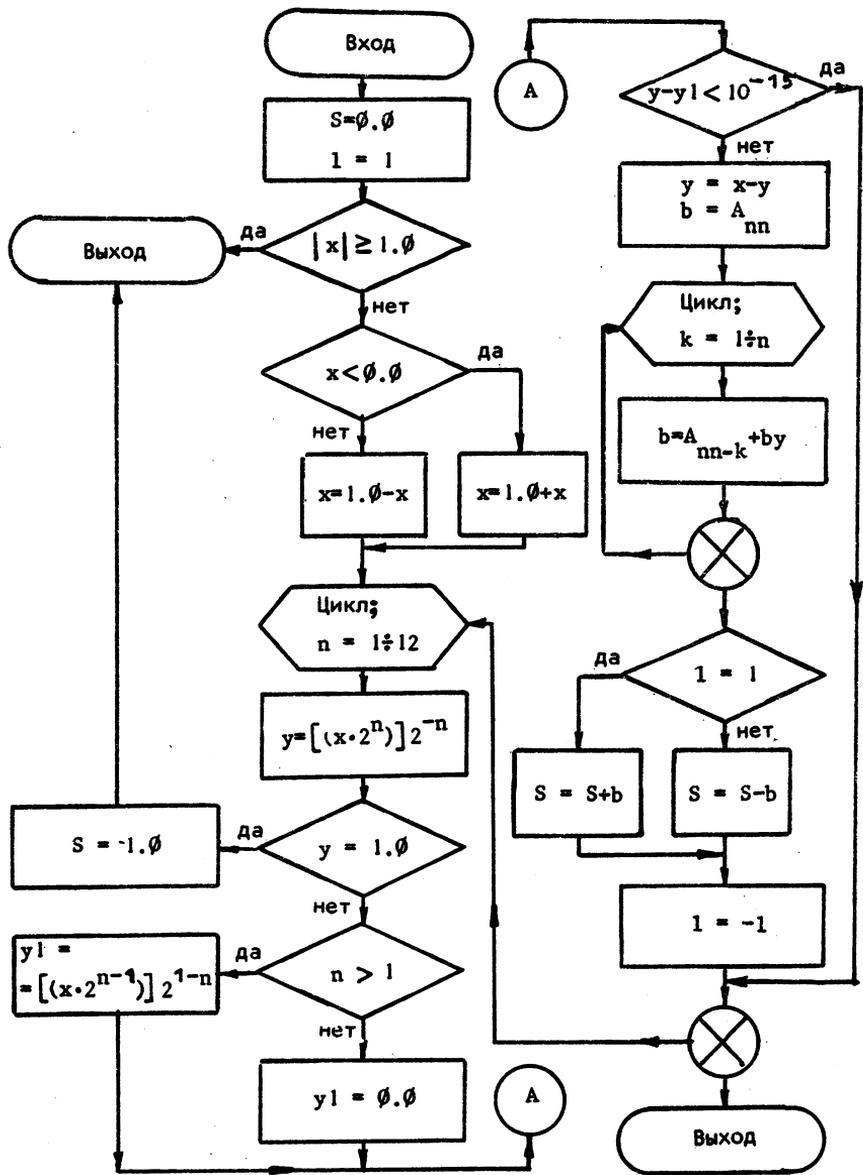


Рис. 2. Блок-схема вычислений $ip(x)$

Для четных значений индекса

$$b_{2i} = \frac{(-1)^i c_{2i} (2i)!}{2}; \quad i = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $c_0 = 1$,

$$c_{2i} = \frac{1}{2^{2i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{c_{2j} (-1)^{i-j}}{(2i-2j+1)!}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для нечетных значений индекса:

$$b_{2i+1} = \frac{\sum_{j=0}^{i+1} c_{2i+2}^{2j} b_{2j}}{2^{2i+1} (2i+2)}; \quad i = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Выражение (3) является частичной суммой ряда, который получается при $M \rightarrow \infty$ и, как показано в [1], сходится очень быстро. Формула для остаточного члена имеет вид:

$$|R_M| \leq \frac{\text{const}}{(M-1)!} 2^{-C_M^{2-M} \left[\frac{M-1}{2} \right] \left(z \left[\frac{M-1}{2} \right] + 1 \right)} \quad (8)$$

Значения A_{Nk} до $N = 15$, вычисленные с высокой точностью (при этом $M \leq 15$, а $|R_{15}| \leq \text{const} \cdot 2^{-350}$), приведены в таблице. Блок-схема вычислений $\text{up}(x)$ для $M = 12$, использованная авторами данной работы, показана на рис.2.

Для практического применения $\text{up}(x)$ была разработана программа приближения функций одной переменной. Аппроксимантой является линейная комбинация сдвигов-сжатий функции $\text{up}(x)$:

$$f(x) = \sum_k c_k \text{up} \left[\frac{x}{h} - \frac{k}{2^n} \right], \quad (9)$$

где h - шаг исходной таблицы значений $f(x)$. Такая линейная комбинация дает приближение вплоть до n -й производной $f(x)$ и является аналогом аппроксимации B-сплайнами [1].

Т а б л и ц а

Значения констант A_{Nk}

K		N=1							
0	5.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00	00	E-01
1	2.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00	00	E+00
K		N=2							
0	6.94444	44444	44444	44444	44444	44444	43	43	E-02
1	1.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00	00	E+00
2	4.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00	00	E+00
K		N=3							
0	3.47222	22222	22222	22222	22222	22222	22	22	E-03
1	1.38888	88888	88888	88888	88888	88888	89	89	E-01
2	2.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00	00	E+00
3	1.06666	66666	66666	66666	66666	66666	67	67	E+01
K		N=4							
0	6.89621	91358	02469	13580	24691	35802	45	45	E-05
1	6.94444	44444	44444	44444	44444	44444	42	42	E-03
2	2.77777	77777	77777	77777	77777	77777	77	77	E-01
3	5.33333	33333	33333	33333	33333	33333	33	33	E+00
4	4.26666	66666	66666	66666	66666	66666	66	66	E+01
K		N=5							
0	5.72675	54012	34567	90123	45679	01234	55	55	E-07
1	1.37924	38271	60493	82716	04938	27160	49	49	E-04
2	1.38888	88888	88888	88888	88888	88888	89	89	E-02
3	7.40740	74074	07407	40740	74074	07407	40	40	E-01
4	2.18333	33333	33333	33333	33333	33333	33	33	E+01
5	2.73066	66666	66666	66666	66666	66666	67	67	E+02
K		N=6							
0	2.05217	56330	38280	46993	83182	62833	24	24	E-09
1	1.14535	10802	46913	58024	69135	80246	91	91	E-06
2	2.75848	76543	20987	65432	09876	54320	98	98	E-04
3	3.70370	37037	03703	70370	37037	03703	69	69	E-02
4	2.96296	29629	62962	96296	29629	62962	96	96	E+00
5	1.36533	33333	33333	33333	33333	33333	33	33	E+02
6	2.91271	11111	11111	11111	11111	11111	11	11	E+03

Продолжение таблицы

K	N=7								
0	3.24267	77809	55435	58644	30820	33910	95	E-12	
1	4.10435	12660	76560	93987	66365	25666	48	E-09	
2	2.29070	21604	93827	16049	38271	60493	82	E-06	
3	7.35596	70781	89300	41152	26337	44855	94	E-04	
4	1.48148	14814	81481	48148	14814	81481	48	E-01	
5	1.89629	62962	96296	29629	62962	96296	30	E+01	
6	1.45635	55555	55555	55555	55555	55555	56	E+03	
7	5.32610	03174	60317	46031	74603	17460	31	E+04	

K	N=8								
0	2.29530	31806	34321	31756	22567	65227	04	E-15	
1	6.48535	55619	10871	17288	61640	67821	89	E-12	
2	8.20870	25321	53121	87975	32730	51332	97	E-09	
3	6.10853	90946	50205	76131	63724	27983	52	E-06	
4	2.94238	68312	75720	16460	90534	97942	38	E-03	
5	9.48148	14814	81481	48148	14814	81481	46	E-01	
6	2.02271	60493	82716	04938	27160	49382	71	E+02	
7	2.66305	01587	30158	73015	87301	58730	16	E+04	
8	1.70435	21015	87301	58730	15873	01587	30	E+06	

K	N=9								
0	7.36701	21514	69996	70767	61155	82740	41	E-19	
1	4.59060	63612	68642	63512	45135	30454	06	E-15	
2	1.29707	11123	82174	23457	72328	13564	38	E-11	
3	2.18898	73419	07499	16793	42061	47022	13	E-08	
4	2.44341	56378	60082	30452	67489	71193	41	E-05	
5	1.88312	75720	16460	90534	97942	38653	12	E-02	
6	1.01135	80246	91358	02469	13580	24691	36	E+01	
7	3.69868	07760	14109	34744	26807	76014	11	E+03	
8	8.52176	05079	36507	93650	79365	07936	50	E+05	
9	9.69586	97334	74426	80776	01410	93474	42	E+07	

K	N=10								
0	1.08253	31062	05739	00576	53293	02647	04	E-22	
1	1.47340	24302	93999	34153	52231	16548	08	E-18	
2	9.18121	27225	37285	27024	90270	60908	15	E-15	
3	3.45885	62996	85797	95887	26208	36171	67	E-11	
4	8.75594	93676	29996	67173	68245	88088	50	E-08	
5	1.56378	60082	30452	67489	71193	41563	78	E-04	
6	2.00866	94101	50891	63237	31138	54595	33	E-01	
7	1.84934	03880	07054	67372	13403	88007	05	E+02	

Продолжение таблицы

8	1.18357	78433	24514	99118	16578	48324	51	E+05
9	4.84793	48667	37213	40388	00705	46737	20	E+07
10	9.92857	06070	77813	05114	63844	79717	80	E+09

K N=11

0	7.34002	87344	46216	51059	73834	56794	66	E-27
1	2.16506	62124	11478	01153	06586	05294	07	E-22
2	2.94680	48605	87998	68307	04462	33096	17	E-18
3	2.44832	33926	76609	40539	97405	49575	51	E-14
4	1.38354	25198	74319	18354	90483	34468	67	E-10
5	5.60380	75952	83197	86991	15677	36376	64	E-07
6	1.66803	84087	79149	51939	02606	31001	37	E-03
7	3.67299	54928	47344	69919	65510	48402	88	E+00
8	5.91788	92416	22574	95590	82892	41622	55	E+03
9	6.73324	28704	68351	94983	34313	14912	79	E+06
10	4.96428	53035	38906	52557	31922	39858	89	E+09
11	1.84851	93275	72305	55715	88904	92223	82	E+12

K N=12

0	2.31150	20774	48957	22114	03251	38150	04	E-31
1	1.46800	57468	89243	30211	94766	91358	93	E-26
2	4.33013	24248	22956	02306	13172	10588	15	E-22
3	7.85814	62949	01329	82152	11899	54923	11	E-18
4	9.79329	35707	06437	62159	89621	98302	01	E-14
5	8.85467	21271	95642	77471	39093	40599	48	E-10
6	5.97739	47683	02077	72790	56722	52135	08	E-06
7	3.05012	73760	53301	97922	79051	53831	07	E-02
8	1.17535	89577	11150	30374	28963	35488	93	E+02
9	3.36662	14352	34175	97491	67156	57456	39	E+05
10	6.89484	06993	59592	39662	94336	66470	69	E+08
11	9.24259	66378	61527	78579	44524	61119	12	E+11
12	6.00961	26381	13469	63510	23462	13457	31	E+14

K N=13

0	3.39957	49928	79990	65134	32567	99407	35	E-36
1	4.62300	41548	97914	44228	06502	76300	09	E-31
2	2.93601	14937	78486	60423	89533	32717	87	E-26
3	1.15470	19799	52788	27281	63512	56156	84	E-21
4	3.14325	85179	60531	92860	84759	81969	24	E-17
5	6.26770	78852	52120	07782	33358	06913	29	E-13
6	9.44498	36023	42018	95969	48366	29972	78	E-09
7	1.09300	93290	60951	35595	98943	54676	13	E-04
8	9.76040	76033	70566	33352	92964	92259	43	E-01

Продолжение таблиц

9	6.68648	42394	23422	83907	06991	53022	65	E+03
10	3.44742	03496	79796	19831	47168	33235	34	E+07
11	1.28369	39774	80767	74802	70072	86268	54	E+11
12	3.15480	63190	56734	81755	11731	06728	66	E+14
13	3.97602	66716	48118	71159	68015	52357	10	E+17

K

N=14

0	2.34606	01335	57306	63099	99670	20211	67	E-41
1	6.79914	99857	59981	30268	65135	98814	71	E-36
2	9.24600	83097	95828	88456	13005	52600	18	E-31
3	7.82936	39834	09297	61130	38756	87247	65	E-26
4	4.61880	79198	11153	09126	54050	24627	35	E-21
5	2.01168	54514	94740	43430	94246	28460	32	E-16
6	6.68555	50776	02261	41634	48915	27374	17	E-12
7	1.72708	27158	56826	32405	84844	12337	68	E-07
8	3.49762	98529	95044	33907	16619	34963	82	E-03
9	5.55258	74365	84144	40307	44442	26707	59	E+01
10	6.84695	98611	69595	22720	83959	32675	75	E+05
11	6.41846	98874	03838	74013	50364	31332	70	E+09
12	4.38167	54431	34353	91326	55182	03789	50	E+13
13	1.98801	33358	24059	35579	84007	76178	55	E+17
14	4.65308	72134	48769	78362	87140	45272	77	E+20

K

N=15

0	7.62506	61337	78678	28352	44378	07475	19	E-47
1	4.69212	02671	14613	26199	99340	40423	33	E-41
2	1.35982	99971	51990	26032	73027	19762	94	E-35
3	2.46560	22159	45554	36921	63468	14026	71	E-30
4	3.13174	55933	63719	04453	15502	70899	26	E-25
5	2.95603	70686	79137	97840	98592	15761	50	E-20
6	2.14579	78149	27723	12993	00529	39024	38	E-15
7	1.22250	14999	04413	31613	16373	07862	71	E-10
8	5.52666	46907	41844	23692	71501	19481	21	E-06
9	1.98976	27608	14958	55733	65454	56134	86	E-01
10	5.68554	95350	62163	86874	82308	85148	55	E+03
11	1.27477	94359	70484	63866	57086	24556	36	E+08
12	2.19083	77215	67176	95663	27591	01894	90	E+12
13	2.76112	96330	88971	32749	77788	55803	54	E+16
14	2.32654	36067	24384	89181	43570	22636	39	E+20
15	1.01648	24120	68595	25513	29713	45569	99	E+24

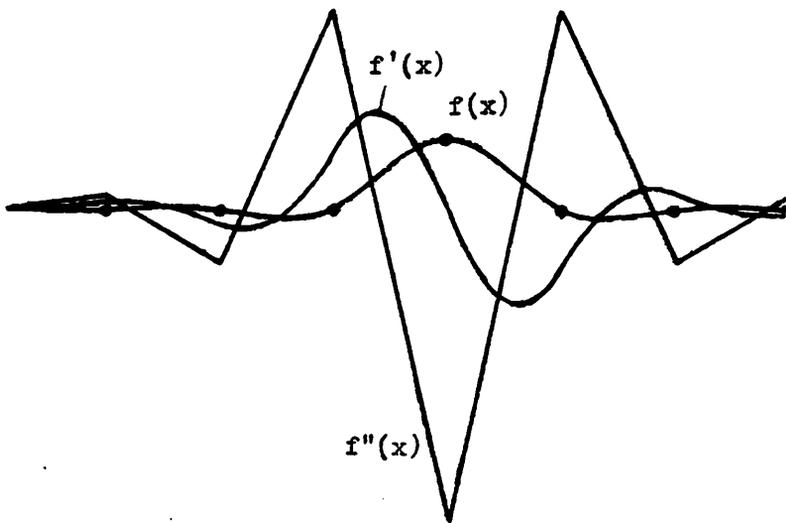


Рис.3. Интерполяция кубическим сплайном

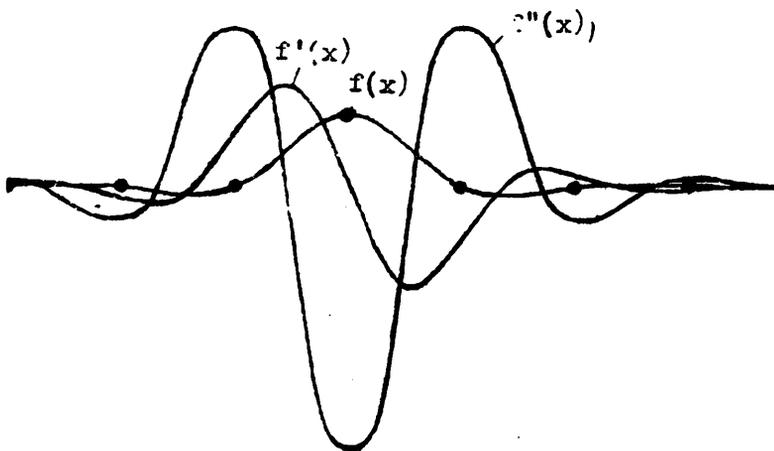


Рис.4. Интерполяция с помощью сдвигов-сжатий $up(x)$

Сравнение полученного таким образом "сплайна" с традици - онным кубическим сплайном показало качественное совпадение по функциям и первым производным.

На рис.3 изображены результаты аппроксимации функции, заданной таблично, а также ее первой и второй производной, с помощью интерполяционного кубического сплайна - в этом случае вторая производная - ломаная линия. На рис.4 та же функция аппроксимируется по формуле (9), здесь вторая производная - гладкая кривая. Видно, что в обоих случаях точность аппроксимации функции достаточно высокая.

Следует отметить, что аппроксиманту вида (9) можно использовать только тогда, когда $f(x)$ задана на равномерной сетке, а это может существенно снизить ее утилитарные возможности.

Л и т е р а т у р а

1. РВАЧЁВ В.Л., РВАЧЁВ В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. - Киев: Наукова думка, 1979. - 196 с.
2. РВАЧЁВ В.Л., РВАЧЁВ В.А. Про одну фінітну функцію//ДАН УРСР. Сер. А. - 1971. - С. 705-707.
3. РВАЧЁВ В.Л., РВАЧЁВ В.А. О представлении многочленов финитными функциями //Мат. физика. - 1972.- № 1. -С.126-129.
4. РВАЧЁВ В.А. Функция $up(x)$ в конструктивной теории функций //Краевые задачи для областей сложной формы. - Киев, 1972. - С. 72-83.
5. РВАЧЁВ В.Л., РВАЧЁВ В.А. Теория приближений и атомарные функции. -М.: Знание, 1978 (Серия: математика, кибернетика, №3). - 64 с.
6. РВАЧЁВ В.Л., Теория R-функций и некоторые ее приложения. - Киев: Наукова думка, 1982. - 551 с.
7. РИХТМАЙЕР Р. Принципы современной математической физики. - М.: Мир, 1982. - 486 с.
8. ДАБАГЯН А.А. О вычислении атомарных функций //Математические методы анализа динамических систем. - Харьков, 1978.- Вып. 2. - С. 6-10.

Поступила в ред.-изд. отд.
15 августа 1990 года