

УДК 519.63:551.465

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ВИХРЯ

А.Г. Колобов

В в е д е н и е

Исследование движений синоптического масштаба в океане в последнее время стало одной из центральных тем современной динамической океанологии. Анализ результатов наблюдений [1,9,10,18] и теоретические работы [8] свидетельствуют о большой значимости этих процессов.

При построении численных моделей, описывающих как взаимодействие вихрей с течениями, так и трансформацию отдельного вихря, использовались либо разностные схемы [6,7,16], либо метод конечных элементов [11,12]. Модель, рассмотренная в данной работе, с более высокой степенью точности описывает процессы трансформации вихревых образований в двумерном океане. Приближенное решение ищется методом сплайн-коллокации с использованием схемы переменных направлений. Для аппроксимации функций и их производных применяются кубические сплайны класса C^2 в разложении по базису из B-сплайнов. Это позволяет получить аналитическое выражение для приближенного решения во всей области.

§1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольная область в океане с границей Γ . Рассмотрим плоское течение несжимаемой невязкой жидкости в декартовой системе координат, которое описывается [17] следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

При этом ось x направлена на восток, ось y — на север; u , v — соответствующие компоненты скорости, p — давление, ρ — плотность. Кривизна земной поверхности учитывается с помощью известного приближения бета-плоскости, когда параметр Кориолиса f аппроксимируется линейной функцией меридиональной координаты $f = f_0 + \beta y$.

Исключая давление в системе (1.1), получим уравнение вихря, которое после приведения к безразмерному виду запишется таким образом:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{b} J(\Psi, \zeta) = 0, \quad (1.2)$$

$$\Delta \Psi = \zeta - \beta y. \quad (1.3)$$

Здесь $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$ — потенциальный вихрь, Ψ — функция тока, $J(\Psi, \zeta) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $b = \frac{\beta L^2}{U}$. Величины L ,

U — характерные масштабы координат и скоростей соответственно. Численные значения масштабов выбраны следующими: $L = 10^7$ см, $U = 10$ см·с⁻¹, $\beta = 2 \cdot 10^{-13}$ ·см⁻¹·с⁻¹. В уравнениях (1.2),

(1.3) и далее безразмерные величины обозначаются теми же буквами, что и физические переменные.

Граничные и начальные условия сформулируем в виде:

$$\Psi|_{\Gamma} = 0, \quad (1.4)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y). \quad (1.5)$$

Введем сетку $\Delta_t: \{t_n: t_n = \Delta t \cdot n, n = 0, 1, \dots\}$ по временной переменной t . При численном решении системы (1.2), (1.3) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ используем предложенную в [11] линеаризацию нелинейного уравнения (1.2) вида

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{b} J(\Psi^n, \zeta) = 0. \quad (1.6)$$

Приближенное решение системы (1.3), (1.6) с условиями (1.4), (1.5) будем искать методом сплайн-коллокации [3] с использованием кубических В-сплайнов. Решение уравнения (1.3) строится с помощью итерационного метода установления, при интегрировании по времени уравнения (1.6) применяется метод переменных направлений [15].

§2. Метод сплайн-коллокации на основе В-сплайнов

В области Ω введем сетку $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x: a = x_0 < \dots < x_1 < \dots < x_N = b,$$

$$\Delta_y: c = y_0 < \dots < y_j < \dots < y_M = d.$$

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $l_j = y_{j+1} - y_j$. Дополним сетку Δ_x узлами x_i , $i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3$, так, что $h_{j-1} = h_0$, $h_{N-j} = h_{N-1}$, $j = 0, -1, -2$, и определим на расширенной сетке кубические В-сплайны $B_i(x)$, $i = -1, \dots, N+1$ [2], каждый из которых соответственно отличен от нуля только на

интервале (x_{i-2}, x_{i+2}) В [2] приведены узловые значения $B_i(x_j)$, $j = i-1, i, i+1$, по которым легко восстанавливаются $B_i(x)$ при $x \in (x_{i-2}, x_{i+2})$ Аналогичным образом пополняется сетка Δ_y и строится множество В-сплайнов $\bar{B}_j(y)$, $j = -1, \dots, M+1$ Всевозможные пары $B_i(x)\bar{B}_j(y)$ образуют базис множества бикубических сплайнов в области Ω

Будем искать решение системы (1.3), (1.6) в виде

$$S(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) B_i(x) \bar{B}_j(y). \quad (2.1)$$

Используем также представления :

$$S(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y, t) B_i(x), \bar{\alpha}_i(y, t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) \bar{B}_j(y), \quad (2.2)$$

$$S(x, y, t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_j(x, t) \bar{B}_j(y), \alpha_j(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \beta_{ij}(t) B_i(x). \quad (2.3)$$

Функции ζ и ψ будем аппроксимировать кубическими сплайнами двух переменных с коэффициентами, зависящими от времени. Значения сплайнов в точках (x_i, y_j, t_n) обозначим $\zeta_{ij}^n, \psi_{ij}^n$ Аналогично будем обозначать и их частные производные, а также $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$

Для решения уравнений (1.3), (1.6) применим идеи работы [5]. На каждом временном интервале $[t_n, t_{n+1}]$ алгоритм разделяется на два этапа. Вначале методом установления по фиктивному времени с использованием двухшаговой схемы переменных направлений [14,15] решается уравнение (1.3). Далее, после нахождения ψ_{ij}^n , также на основе метода переменных направлений [13-15] выполняется численное интегрирование уравнения (1.6).

Двухшаговая схема переменных направлений для уравнения (1.3) записывается в следующем виде:

$$\Psi_{ij}^{v+1/2} = \Psi_{ij}^v + \frac{\Delta \tau}{2} [(\Psi_{xx})_{ij}^v + (\Psi_{yy})_{ij}^{v+1/2} - \zeta_{ij} + by_j], \quad (2.4)$$

$$\Psi_{ij}^{v+1} = \Psi_{ij}^{v+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} [(\Psi_{xx})_{ij}^{v+1} + (\Psi_{yy})_{ij}^{v+1/2} - \zeta_{ij} + by_j]. \quad (2.5)$$

На первом полушаге (2.4) используем представление (2.3), на втором полушаге (2.5) - представление (2.2). Вследствие финитности В-сплайнов имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ij}^{v+1/2} &= \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{v+1/2} \bar{B}_{j+q}(y_j), \\ (\Psi_{yy})_{ij}^{v+1/2} &= \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{v+1/2} \bar{B}_{j+q}''(y_j), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ij}^{v+1} &= \sum_{r=-1}^1 \alpha_{i+r,j}^{v+1} B_{i+r}(x_i), \\ (\Psi_{xx})_{ij}^{v+1} &= \sum_{r=-1}^1 \alpha_{i+r,j}^{v+1} B_{i+r}''(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Введем операторы вычисления значений кубических сплайнов и их производных в узлах сетки:

$$(\mathbb{T}_1^{(k)} \alpha)_{ij}^v = \sum_{r=-1}^1 \alpha_{i+r,j}^v B_{i+r}^{(k)}(x_i), \quad (2.8)$$

$$(\mathbb{T}_2^{(k)} \alpha)_{ij}^v = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^v \bar{B}_{j+q}^{(k)}(y_j). \quad (2.9)$$

Тогда схему (2.4), (2.5) можно переписать в виде:

$$(\mathbb{T}_2^{(0)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2} (\mathbb{T}_2^{(2)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} =$$

$$= (\tau_1^{(0)} \bar{\alpha})_{1j} v_{1j} + \frac{\Delta \tau}{2} (\tau_1^{(2)} \bar{\alpha})_{1j} v_{1j} - \frac{\Delta \tau}{2} (\zeta_{1j} - b y_j), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} (\tau_1^{(0)} \bar{\alpha})_{1j} v_{1j} + 1 - \frac{\Delta \tau}{2} (\tau_1^{(2)} \bar{\alpha})_{1j} v_{1j} + 1 &= \\ &= (\tau_2^{(0)} \alpha)_{1j} v_{1j}^{+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} (\tau_2^{(2)} \alpha)_{1j} v_{1j}^{+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2} (\zeta_{1j} - b y_j). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В качестве граничного условия примем требование равенства нулю функции тока Ψ вне области Ω . Учитывая [2], что на равномерной сетке

$$\bar{\alpha}_{1j} = \zeta_{1j} + O(h^2), \quad \alpha_{1j} = \zeta_{1j} + O(l^2), \quad (2.12)$$

получаем граничное условие второго порядка точности для схемы (2.10), (2.11):

$$\alpha_{1j}^{v+1/2} = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = -1, M+1; \quad (2.13)$$

$$\bar{\alpha}_{1j}^{v+1} = 0, \quad i = -1, N+1, \quad j = 0, \dots, M. \quad (2.14)$$

Исключая в системе (2.10), (2.13) неизвестные $\alpha_{i,-1}^{v+1/2}$, $\alpha_{i,M+1}^{v+1/2}$, $i = 0, \dots, N$, а в системе (2.11), (2.14) неизвестные $\bar{\alpha}_{-1,j}^{v+1}$, $\bar{\alpha}_{N+1,j}^{v+1}$, $j = 0, \dots, M$, приходим к системам линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами:

$$T_2 \alpha(i) = d(i), \quad i = 0, \dots, N; \quad (2.15)$$

$$T_1 \bar{\alpha}(j) = \bar{d}(j), \quad j = 0, \dots, M. \quad (2.16)$$

Здесь $\alpha(i) = (\alpha_{i,0}^{v+1/2}, \dots, \alpha_{i,M}^{v+1/2})^T$, $\bar{\alpha}(j) = (\bar{\alpha}_{0,j}^{v+1}, \dots, \bar{\alpha}_{N,j}^{v+1})^T$, $d(i) = (d_{i,0}, \dots, d_{i,M})^T$, $\bar{d}(j) = (\bar{d}_{0,j}, \dots, \bar{d}_{N,j})^T$, а d_{1j} , \bar{d}_{1j} суть правые части со-

Используя представления (2.2), (2.3), легко вычислить $(\Psi_x)_{ij}^n$ и $(\Psi_y)_{ij}^n$.

Для решения уравнения (1.6) применим метод переменных направлений

$$\zeta^{n+1/2} - \zeta^n + \frac{\Delta t}{2b}(R_1 \zeta^{n+1/2} + R_2 \zeta^n) = 0, \quad (2.17)$$

$$\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2b}(R_1 \zeta^{n+1/2} + R_2 \zeta^{n+1}) = 0. \quad (2.18)$$

Здесь $R_1 \zeta^v = -\Psi_y^n \zeta_x^v - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^n \zeta^v$,

$$R_2 \zeta^v = \Psi_x^n \zeta_y^v + \frac{1}{2} \Psi_{xy}^n \zeta^v.$$

Такой выбор операторов R_1 и R_2 обеспечивает их кососимметричность ([14, с. 453]).

На первом полушаге (2.17) используем представление (2.2), на втором полушаге (2.18) - представление (2.3). Для неизвестных коэффициентов оставим те же обозначения α и $\bar{\alpha}$. Тогда, аналогично (2.6) и (2.7),

$$\zeta_{ij}^{n+1/2} = \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+r,j}^{n+1/2} B_{i+r}(x_i),$$

$$(\zeta_x)_{ij}^{n+1/2} = \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+r,j}^{n+1/2} B'_{i+r}(x_i),$$

$$\zeta_{ij}^{n+1} = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{n+1} \bar{B}_{j+q}(y_j),$$

$$(\zeta_y)_{ij}^{n+1} = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{n+1} \bar{B}'_{j+q}(y_j);$$

$$i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M.$$

Если использовать для дискретизации операторов R_1 и R_2 соотношения:

$$(R_1 \zeta)_{ij}^v = -(\Psi_Y)_{ij}^n \sum_{x=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+x,j}^v B'_{i+x}(x_i) - \\ - \frac{1}{2} (\Psi_{XY})_{ij}^n \sum_{x=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+x,j}^v B'_{i+x}(x_i),$$

$$(R_2 \zeta)_{ij}^v = (\Psi_X)_{ij}^n \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^v \bar{B}'_{j+q}(y_j) + \\ + \frac{1}{2} (\Psi_{XY})_{ij}^n \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^v \bar{B}'_{j+q}(y_j),$$

то легко заметить, что кососимметрическая их структура нарушается.

Если же аппроксимировать операторы R_1 и R_2 соотношениями:

$$(A_1 \bar{\alpha})_{ij}^v = - \sum_{x=-1}^1 (\Psi_Y)_{i+x/2,j}^n B'_{i+x}(x_i) \bar{\alpha}_{i+x,j}^v,$$

$$(A_2 \alpha)_{ij}^v = \sum_{q=-1}^1 (\Psi_X)_{i,j+q/2}^n \bar{B}'_{j+q}(y_j) \alpha_{i,j+q}^v,$$

где

$$(\Psi_Y)_{i+x/2,j}^n = \frac{1}{2} [(\Psi_Y)_{i+x,j}^n + (\Psi_Y)_{i,j}^n],$$

$$(\Psi_X)_{i,j+q/2}^n = \frac{1}{2} [(\Psi_X)_{i,j+q}^n + (\Psi_X)_{i,j}^n],$$

то на равномерной сетке A_1 и A_2 являются кососимметрическими и отличаются от R_1 и R_2 вторым порядком малости.

Для доказательства этого достаточно разложить Ψ_y и Ψ_x в ряд Тейлора в точке (i, j) и учесть (2.12).

Исходя из вышеизложенного, аппроксимируем соотношения (2.17), (2.18) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\mathbb{T}_1^{(0)} \bar{\alpha}_{ij})^{n+1/2} - (\mathbb{T}_2^{(0)} \alpha_{ij})^n + \\ & + \frac{\Delta t}{2b} [(A_1 \bar{\alpha}_{ij})^{n+1/2} + (A_2 \alpha_{ij})^n] = 0, \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathbb{T}_2^{(0)} \alpha_{ij})^{n+1} - (\mathbb{T}_1^{(0)} \bar{\alpha}_{ij})^{n+1/2} + \\ & + \frac{\Delta t}{2b} [(A_1 \bar{\alpha}_{ij})^{n+1/2} + (A_2 \alpha_{ij})^{n+1}] = 0. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Для получения граничных условий для систем (2.19), (2.20) предположим, что потенциальный вихрь ζ вне области Ω сохраняет свое граничное значение. Учитывая (2.12), получаем

$$\bar{\alpha}_{-1, j}^{n+1/2} = \bar{\alpha}_{0, j}^{n+1/2}, \quad \bar{\alpha}_{N+1, j}^{n+1/2} = \bar{\alpha}_{N, j}^{n+1/2}, \quad j = 0, \dots, M, \quad (2.21)$$

$$\alpha_{i, -1}^{n+1} = \alpha_{i, 0}^{n+1}, \quad \alpha_{i, M+1}^{n+1} = \alpha_{i, M}^{n+1}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.22)$$

Для того чтобы начать счет по схеме (2.19), (2.20), необходимо определить α_{ij}^0 . Эти коэффициенты находятся из решения задачи интерполяции для $\zeta^0(x, y)$ с краевыми условиями типа I [2].

Вернемся к решению задач (2.19) и (2.20). Исключая в системе (2.19), (2.21) неизвестные $\bar{\alpha}_{-1, j}^{n+1/2}$, $\bar{\alpha}_{N+1, j}^{n+1/2}$, $j = 0, \dots, \dots, M$, а в системе (2.20), (2.22) — $\alpha_{i, -1}^{n+1}$, $\alpha_{i, M+1}^{n+1}$, $i = 0, \dots, N$, приходим к системам с трехдиагональными матрицами, аналогичным по структуре (2.15), (2.16), которые также решаются методом прогонки.

§3. Аппроксимация

Пусть $\bar{S}(x, y, t)$ - бикубический сплайн, интерполирующий при каждом t решение задачи (1.3), (1.4) на сетке Δ , т.е. $S(x_i, y_j, t) = \Psi(x_i, y_j, t)$, $i=0, \dots, N, j=0, \dots, M$. Погрешность приближенного решения $\Psi(x, y, t)$ сплайном $S(x, y, t)$ (здесь мы возвращаемся к обозначению для неизвестной функции в виде (2.1)), построенным по схеме (2.4), (2.5), оценим с помощью неравенства

$$|S(x, y, t_v) - \Psi(x, y, t_v)| \leq |S(x, y, t_v) - \bar{S}(x, y, t_v)| + |\bar{S}(x, y, t_v) - \Psi(x, y, t_v)|. \quad (3.1)$$

Второе слагаемое в правой части (3.1) можно оценить, используя известные результаты о погрешности интерполяции бикубическими сплайнами [2, с.138]. Для оценки первого слагаемого необходимо исследовать вопросы аппроксимации и устойчивости схем, описанных в §2.

Введем операторы:

$$\Lambda_1 S^v = S_{xx}(x, y, t_v),$$

$$\Lambda_2 S^v = S_{yy}(x, y, t_v),$$

$$\Lambda S^v = \Lambda_1 S^v + \Lambda_2 S^v.$$

Тогда схему (2.4), (2.5) в целых шагах можно записать в виде:

$$\frac{S_{ij}^{v+1} - S_{ij}^v}{\Delta \tau} - \left[\Lambda \left(\frac{S^{v+1} + S^v}{2} \right) \right]_{ij} + \left(\frac{\Delta \tau}{2} \right)^2 \cdot \left[\Lambda_2 \Lambda_1 \left(\frac{S^{v+1} - S^v}{\Delta \tau} \right) \right]_{ij} + F_{ij} = 0.$$

Обозначим

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\bar{S}_{ij}^{v+1} - \bar{S}_{ij}^v}{\Delta\tau} - \left[\Lambda \left(\frac{\bar{S}^{v+1} + \bar{S}^v}{2} \right) \right]_{ij} + \\ + \left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \left[\Lambda_2 \Lambda_1 \left(\frac{\bar{S}^{v+1} - \bar{S}^v}{\Delta\tau} \right) \right]_{ij} + F_{ij}.$$

Будем говорить, что схема аппроксимирует с погрешностью $O(H^{m_1} + L^{m_2} + (\Delta\tau)^{m_3})$, если $\|\varepsilon^v\| = \max_{ij} |\varepsilon_{ij}^v| = O(H^{m_1} + L^{m_2} + (\Delta\tau)^{m_3})$. Здесь $H = \max_i h_i$, $L = \max_j l_j$. Для равномерной сетки с шагами $h_i = h$, $l_j = l$ на границе области имеем $|\varepsilon^v| = O(h^2 + l^2)$.

Предположим, что при фиксированном t решение $\Psi(x, y, t) \in C^{4,4}[\Omega]$ и имеет ограниченные производные по t до третьего порядка включительно. Тогда, учитывая теорему об оценке погрешности интерполяции из [2, с.138], находим

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\Psi_{ij}^{v+1} - \Psi_{ij}^v}{\Delta\tau} - \left[\Lambda \left(\frac{\Psi^{v+1} + \Psi^v}{2} \right) \right]_{ij} + \\ + \left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \left[\Lambda_2 \Lambda_1 \left(\frac{\Psi^{v+1} - \Psi^v}{\Delta\tau} \right) \right]_{ij} + F_{ij} + O(H^2 + L^2).$$

Заменяя величины, вычисленные при $t = t_{v+1}$, по формуле Тейлора в точке $t = t_v$, получим $\varepsilon_{ij}^v = O(H^2 + L^2 + (\Delta\tau)^2)$, и, следовательно, схема (2.4), (2.5) имеет второй порядок аппроксимации, если решение $\Psi(x, y, t)$ достаточно гладкое. Заметим, что требования к гладкости решения, сформулированные выше, можно несколько ослабить (см. [2]).

Аналогичным образом доказывается аппроксимация для схемы (2.17), (2.18).

§4. Устойчивость

При доказательстве устойчивости схем расщепления для не-стационарных задач существенно используется лемма Келлога [14], согласно которой $\|(\mathbf{E} - \sigma\mathbf{A})(\mathbf{E} + \sigma\mathbf{A})^{-1}\| \leq 1$, если $\mathbf{A} \geq 0$ - положительно полуопределенная матрица, \mathbf{E} - единичная матрица и параметр $\sigma \geq 0$ (рассматривается евклидова норма). Заметим, что справедливо обобщение этой леммы: если $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0$, $\mathbf{A} \geq 0$, $\sigma \geq 0$, то

$$\|(\mathbf{B} - \sigma\mathbf{A})(\mathbf{B} + \sigma\mathbf{A})^{-1}\| \leq 1. \quad (4.1)$$

Для доказательства (4.1) достаточно оператор $\mathbf{T} = (\mathbf{B} - \sigma\mathbf{A}) \times (\mathbf{B} + \sigma\mathbf{A})^{-1}$ записать в виде $\mathbf{T} = \mathbf{B}^{1/2}(\mathbf{E} - \sigma\mathbf{C})(\mathbf{E} + \sigma\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}^{-1/2}$, где $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{1/2}$, $\mathbf{C} \geq 0$. Это означает, что вычислительный алгоритм для схем с оператором перехода \mathbf{T} эквивалентен устойчивому вычислительному алгоритму с оператором перехода $(\mathbf{E} - \sigma\mathbf{C})(\mathbf{E} + \sigma\mathbf{C})^{-1}$.

Далее все рассуждения проводятся для случая равномерной сетки с шагами $h_i = h$, $l_j = 1$.

Запишем схему (2.15), (2.16) в матричном виде. Для этого введем обозначения:

$$\alpha^v(j) = \begin{bmatrix} \alpha_{0j}^v \\ \alpha_{1j}^v \\ \vdots \\ \alpha_{Nj}^v \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}^v(j) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{0j}^v \\ \bar{\alpha}_{1j}^v \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{Nj}^v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(j) = \begin{bmatrix} \zeta_{0j} - by_j \\ \zeta_{1j} - by_j \\ \vdots \\ \zeta_{Nj} - by_j \end{bmatrix},$$

$$D_1^N = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D_2^N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

где D_1^N, D_2^N - трехдиагональные матрицы размерности $(N+1) \times (N+1)$.

Далее обозначим

$$\alpha^v = \begin{bmatrix} \alpha^v(0) \\ \vdots \\ \alpha^v(M) \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}^v = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^v(0) \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^v(M) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F(0) \\ \vdots \\ F(M) \end{bmatrix},$$

$$T_2^0 = \frac{1^2}{6} \begin{bmatrix} 4E^N & E^N & & & 0 \\ E^N & 4E^N & E^N & & \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & E^N & 4E^N \end{bmatrix}$$

Здесь E^N - единичная матрица размерности $(N+1) \times (N+1)$, а T_2^0 - блочная матрица размерности $(M+1) \times (M+1)$. Пусть T_2^2 - блочная трехдиагональная матрица размерности $(M+1) \times (M+1)$, на главной диагонали которой стоят матрицы $2E^N$, а вне главной диагонали матрицы $-E^N$; T_1^0, T_1^2 - блочно-диагональные матрицы $(M+1) \times (M+1)$ с клетками D_1^N, \dots, D_1^N и D_2^N, \dots, D_2^N соответственно. Матрицы $T_2^0, T_2^2, T_1^0, T_1^2$ - симметричные, положительно определенные.

Теперь схему (2.15), (2.16) можно записать в матричном виде

$$\frac{1}{1^2} (T_2^0 + \frac{\Delta\tau}{2} T_2^2) \alpha^{v+1/2} = \frac{1}{h^2} (T_1^0 - \frac{\Delta\tau}{2} T_1^2) \bar{\alpha}^v - \frac{\Delta\tau}{2} F, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{h^2}(\tau_1^0 + \frac{\Delta\tau}{2}\tau_1^2)\alpha^{v+1} = \frac{1}{h^2}(\tau_2^0 - \frac{\Delta\tau}{2}\tau_2^2)\alpha^{v+1/2} - \frac{\Delta\tau}{2}F. \quad (4.3)$$

Обратимся к схеме (2.19), (2.20). Обозначим

$$\alpha^n(i) = \begin{bmatrix} \alpha_{i0}^n \\ \alpha_{i1}^n \\ \vdots \\ \alpha_{iM}^n \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}^n(i) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{i0}^n \\ \bar{\alpha}_{i1}^n \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{iM}^n \end{bmatrix}, \quad D^M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D^M(i) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (\psi_x)_{i,1/2}^n & & & & \\ -(\psi_x)_{i,1/2}^n & 0 & (\psi_x)_{i,3/2}^n & & & \\ & \dots & \dots & & & \\ & & & -(\psi_x)_{i,M-3/2}^n & 0 & (\psi_x)_{i,M-1/2}^n \\ & & & & -(\psi_x)_{i,M-1/2}^n & 0 \end{bmatrix},$$

где $D^M, D^M(i)$ - матрицы размерности $(M+1) \times (M+1)$. Пусть $D^+(i), D^-(i)$ - диагональные матрицы размерности $(M+1) \times (M+1)$ с элементами $(\psi_y)_{i-1/2,0}^n, \dots, (\psi_y)_{i-1/2,M}^n$ и $(-\psi_y)_{i+1/2,0}^n, \dots, (-\psi_y)_{i+1/2,M}^n$ на главной диагонали соответственно, E^M - единичная матрица размерности $(M+1) \times (M+1)$

Введем обозначения

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & D^-(0) & & 0 \\ D^+(1) & 0 & D^-(1) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & D^+(N-1) & 0 & D^-(N-1) \\ 0 & & & D^+(N) & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^n = \begin{bmatrix} \alpha^n(0) \\ \alpha^n(1) \\ \vdots \\ \alpha^n(N) \end{bmatrix},$$

$$T^1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 5E^M & E^M & & 0 \\ E^M & 4E^M & E^M & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & E^M & 4E^M & E^M \\ 0 & & & E^M & 5E^M \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}^n = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^n(0) \\ \bar{\alpha}^n(1) \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^n(N) \end{bmatrix}$$

Здесь A^1, T^1 - блочные матрицы размерности $(N+1) \times (N+1)$. Пусть T^2, A^2 - блочные диагональные матрицы той же размерности с клетками $2hD^M, \dots, 2hD^M$ и $D^M(0), \dots, D^M(N)$ соответственно. Матрицы T^1, T^2 - симметричные, положительно-определенные; A^1, A^2 - кососимметричные.

С учетом сделанных обозначений схема (2.19), (2.20) запишется в виде:

$$\frac{1}{2h} \left(T^1 + \frac{\Delta t}{2} A^1 \right) \bar{\alpha}^{n+1/2} = \frac{1}{2h} \left(T^2 - \frac{\Delta t}{2} A^2 \right) \alpha^n, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2h} \left(T^2 + \frac{\Delta t}{2} A^2 \right) \alpha^{n+1} = \frac{1}{2h} \left(T^1 - \frac{\Delta t}{2} A^1 \right) \bar{\alpha}^{n+1/2}. \quad (4.5)$$

Далее, действуя так же, как при доказательстве устойчивости схем расщепления для нестационарных задач [14] и используя неравенство (4.1), легко показать устойчивость схем (4.2), (4.3) и (4.4), (4.5) в энергетической норме.

§5. Результаты численных экспериментов

С использованием описанной модели были проведены серии численных экспериментов по изучению эволюции уединенного вихря,

взаимодействия цепочки плотно упакованных вихрей чередующегося знака, а также эволюции четверки шахматно упакованных вихрей. Эти эксперименты позволяют проследить синергетические явления в поле синоптических вихрей (синергетика - методология описания и выявления процессов самоорганизации упорядоченных структур).

В начальный момент времени задавалось распределение функции тока, моделирующее вихревые образования в океане. В дальнейшие моменты времени вихри трансформировались по законам, определяемым численной моделью.

Во всех обсуждаемых ниже экспериментах шаг по времени $\Delta t = 0.5$ суткам, шаги сетки $h = l = 10$ км. В безразмерном виде это соответствует $\Delta t = 0.0864$, $h = l = 0.1$. Параметр нелинейности $b = 5$.

Обсудим сначала свободную эволюцию уединенного синоптического вихря. В линейном случае (см. рис. 1) эволюция исходного

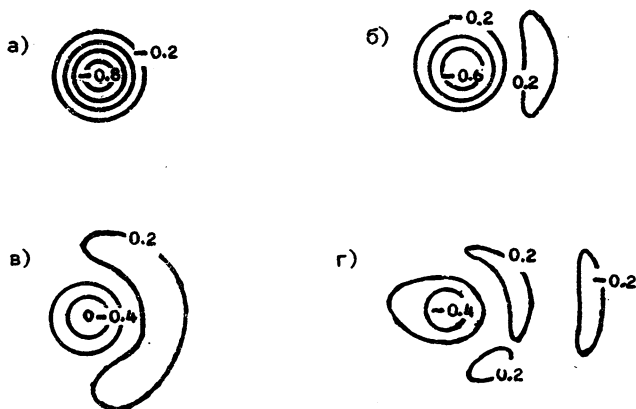


Рис. 1. Изолинии функции тока в линейном варианте уединенного вихря (в условных единицах): а) $t = 0$ суток; б) $t = 20$ суток; в) $t = 40$ суток; г) $t = 60$ суток

вихря происходит так же, как и в [4]. Распад начального вихря за счет дисперсии происходит симметрично относительно прямой, параллельной оси, проходящей через центр вихря. Вторичные вихри имеют тенденцию к вытягиванию с севера на юг. Исходный, продуцирующий вихрь вытягивается в зональном направлении и смещается на запад. Из анализа амплитуд вторичных образований видно, что дисперсия вихря происходит слабее, чем в аналитическом решении [4], но сильнее, чем в численном решении, представленном в [11]. Это позволяет сделать вывод о том, что данная модель точнее, чем модель в [11], описывает процессы трансформации вихревых образований.

Результаты решения нелинейной задачи для эволюции одиночного вихря (циклона) представлены на рис.2. В начальный момент времени основную роль в распаде вихря играет дисперсия. Как и в линейной задаче, к востоку от исходного вихря образуется возмущение, обратное по знаку завихренности основного вихря. Затем за счет нелинейности вторичный вихрь перемещается по периферии основного, увеличиваясь по амплитуде. Продуцирующий циклон при этом движется на север, антициклон - на юг. Это соответствует теоретическим результатам, представленным в [8]. В процессе эволюции на юго-востоке от продуцируемого антициклона образуется вторичный циклон, который вместе с антициклоном движется по периферии основного вихря. После прохождения центров вторичных вихрей через меридиан, проходящий через центр основного возмущения, на юго-востоке продуцируется еще один антициклон, который в дальнейшем сливается с первым антициклоном.

На рис.3 представлено изменение кинетической энергии основного и вторичных вихрей. При уменьшении энергии первичного вихря возрастает энергия вторичного вихря. После 40-50 суток энергия циклона возрастает, антициклона - уменьшается. Таким образом, происходит взаимная передача энергии от первичного

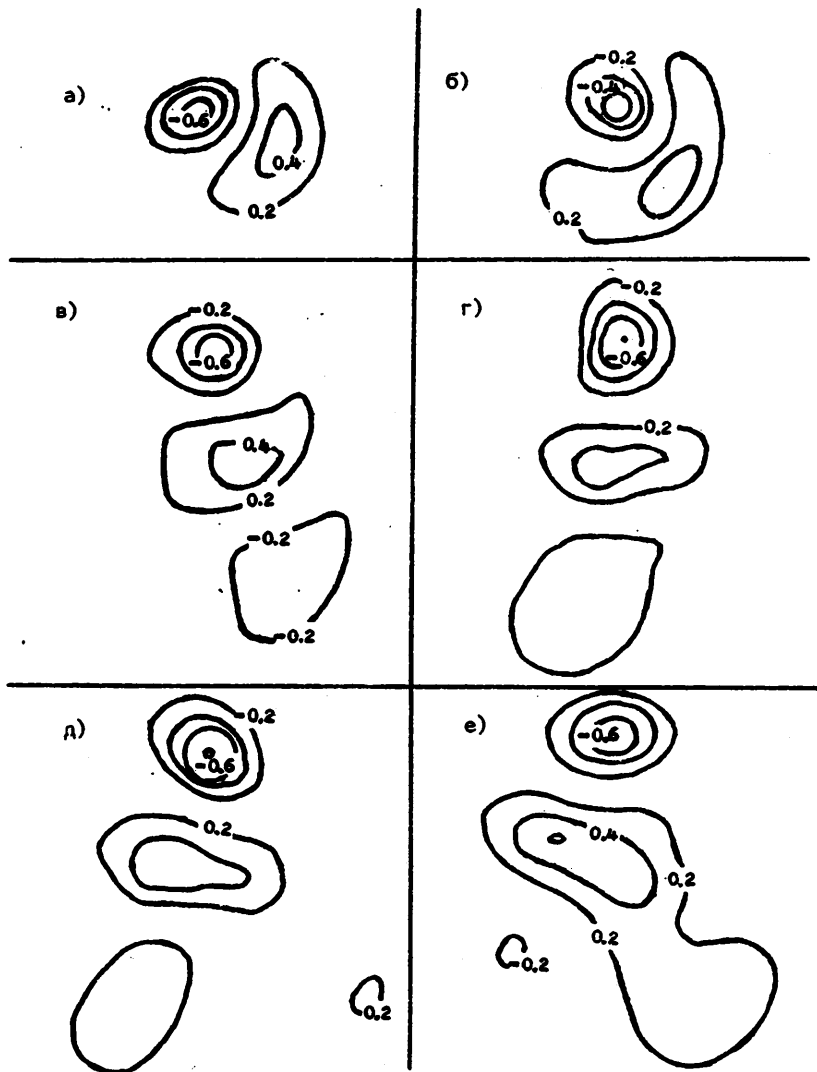


Рис. 2. Эволюция поля функции тока в нелинейном варианте уединенного вихря (в условных единицах): а) $t = 30$ суток; б) $t = 50$ суток; в) $t = 60$ суток; г) $t = 80$ суток; д) $t = 90$ суток; е) $t = 100$ суток

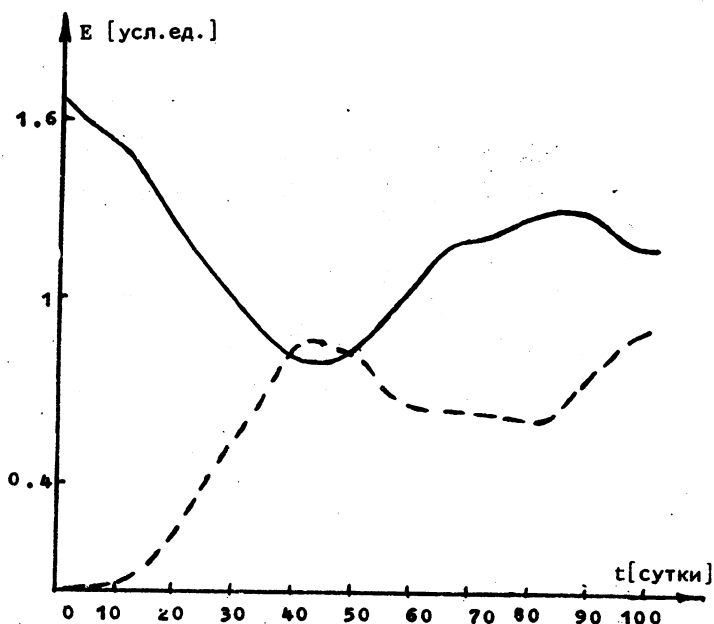


Рис. 3. Изменение кинетической энергии основного и вторичного вихрей: — энергия циклонов, - - - энергия антициклонов

вихря вторичному, и наоборот, вследствие чего можно предположить автоколебательный характер процесса обмена энергией между основным и вторичными вихрями [11].

К сожалению, вследствие выбранных граничных условий непротекания как на зональных, так и на меридиональных границах области не удастся проследить эволюцию уединенного вихря достаточно долго. При приближении вихрей к границам они "прилипают" к последним и в дальнейшем трансформируются незначительно. Вероятнее всего, это происходит за счет взаимного влияния границ и нелинейности. В дальнейших исследованиях предпочтительнее брать более физические периодические условия на меридиональных границах и условия скольжения на широтных стенках. Именно такие

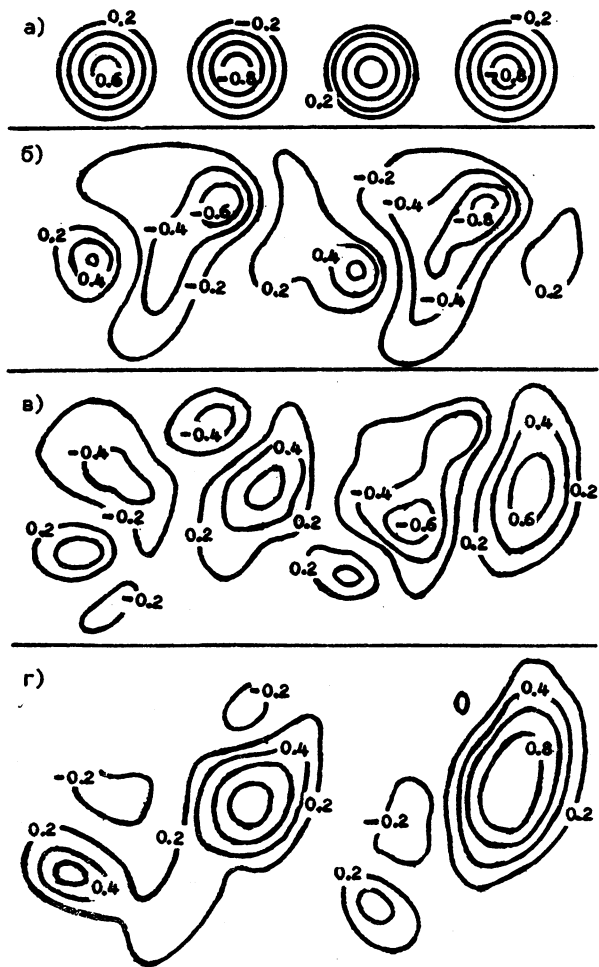


Рис. 4. Взаимодействие цепочки вихрей чередующегося знака (функция тока в условных единицах): а) $t = 0$ суток; б) $t = 30$ суток; в) $t = 50$ суток; г) $t = 70$ суток

a)



б)

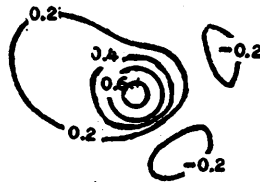
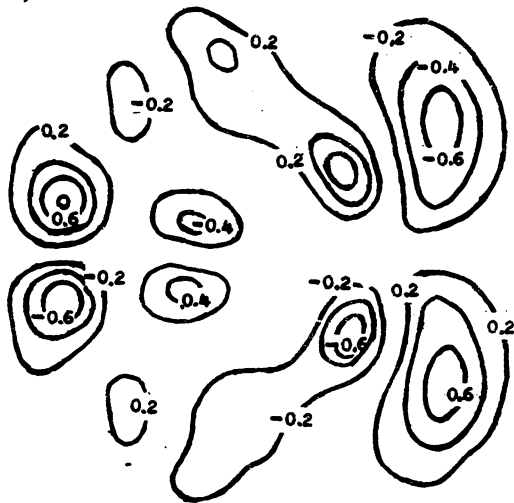


Рис. -5. Взаимодействие четверки шахматно упакованных вихрей (функция тока в условных единицах):
а) $t = 0$ суток; б) $t = 30$ суток

a)



б)

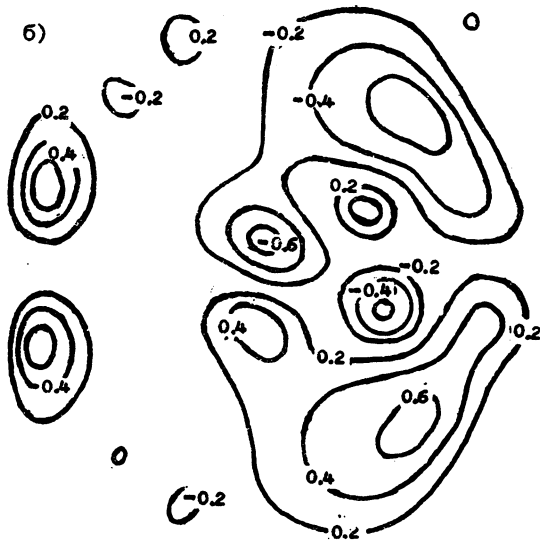


Рис. 6. Взаимодействие четверки шахматно упакованных вихрей (функция тока в условных единицах):
а) $t = 50$ суток; б) $t = 70$ суток

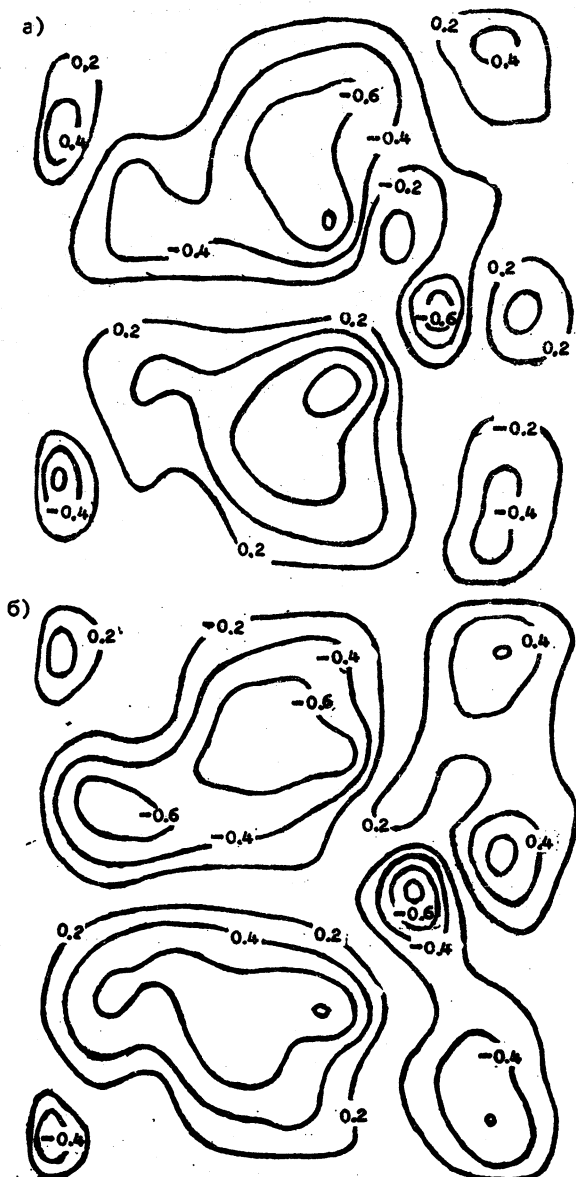


Рис. 7. Взаимодействие четверки шахматно упакованных вихрей (функция тока в условных единицах):
 а) $t = 90$ суток; б) $t = 100$ суток.

условия выбираются в большинстве экспериментов по взаимодействию синоптических вихрей (см., например, обзор [16]).

Обратимся теперь к экспериментам по взаимодействию цепочки плотно упакованных вихрей чередующегося знака (рис.4). Здесь прослеживается та же тенденция смещения циклонов на север, антициклонов на юг. В [16] показано, что в процессе эволюции между цепочками циклонов и антициклонов образуются разнонаправленные струи, т.е. продуцируются струйные течения. В данном эксперименте этого не происходит, вероятнее всего, из-за влияния границ, а именно, условий скольжения на меридиональных стенках бассейна, тогда как в [16] приняты периодические условия.

На рис. 5-7 представлены (для разного t) результаты эксперимента по моделированию эволюции четверки шахматно упакованных вихрей. К югу от средней широты расположены два циклона, а к северу - два антициклона (рис.5а). После перестройки цепочек возникают структуры солитонного типа, состоящие из пары "циклон-антициклон", перемещающиеся на запад (рис.6). В этом эксперименте, в отличие от предыдущего, возникает струйное течение, направленное на восток (рис.7). Это результат того, что струя здесь продуцируется вторичными вихрями. Но и здесь виден неудачный выбор граничного условия в зональном направлении, более физическими надо признать периодические условия.

З а к л ю ч е н и е

Прделанные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

1. Данная модель с более высокой степенью точности, чем модель, основанная на методе конечных элементов, описывает процессы трансформации вихревых образований. При этом, в отличие от разностных схем, получено аналитическое выражение для приближенного решения во всей области.

2. При эволюции уединенного вихря нелинейные эффекты проявляются в смещении вторичных возмущений по периферии основного. На первом этапе продуцирующий вихрь отдает энергию продуцируемому, на втором - энергия последнего передается основному вихрю. Это согласуется с результатами, представленными в [11].

3. Во всех экспериментах прослеживается движение циклонов на север, антициклонов - на юг.

4. Взаимодействие групп вихрей при определенной их начальной конфигурации может порождать струйное течение.

5. В дальнейших исследованиях целесообразнее использовать более мягкие граничные условия как в зональном, так и в меридиональном направлении (периодические условия, условия Орланского и т.д.).

Л и т е р а т у р а

1. БРЕХОВСКИХ Л.М., КОШЛЯКОВ М.Н., ФЕДОРОВ К.Н. и др. Полигонный гидрофизический эксперимент в тропической зоне Атлантики //ДАН СССР. - 1971. -Т. 198, №6. -С. 1434-1439.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Метод сплайн-коллокации решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. - Новосибирск, 1984. - 28 с. (Препринт/ИМ СО АН СССР: № 73).

4. ИВАНОВ Ю.А., МЕЛЬНИКОВ В.А., НОВИЦКИЙ А.Г. Эволюция локализованного вихря //Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1979. -Т. 15, №4. -С. 442-448.

5. КАЗАКОВ В.А. Расчет течения вязкой жидкости с помощью В-сплайнов //Ученые записки ЦАГИ. - 1983. -Т. XIV, №4. -С.58-66.

6. КАМЕНКОВИЧ В.М., ЛАРИЧЕВ В.Д., ХАРЬКОВ Б.В. Численная баротропная модель для анализа синоптических вихрей в открытой области океана //Океанология. - 1981. - Т. 21, вып. 5. -С.773-785.

7. КАМЕНКОВИЧ В.М., ЛАРИЧЕВ В.Д., ХАРЬКОВ Б.В. Бароклинная квазигеострофическая модель для анализа синоптических вихрей в открытой области океана //Океанология. - 1981. - Т. 21, вып. 6. - С. 949-959.

8. КОРОТАЕВ Г.К. Теоретическое моделирование синоптической изменчивости океана. -Киев: Наукова думка, 1988. - 160 с.
9. КОШЛЯКОВ М.Н. Синоптические вихри в океане //Океанология. Физика океана. Т.1. -М.: Наука, 1978. -С. 62-84.
10. КОШЛЯКОВ М.Н., ГРАЧЕВ Ю.М., ЕНИКЕЕВ В.Х. Кинематика поля синоптических вихрей открытого океана //ДАН СССР. - 1980. - Т. 252, №3. -С. 575-577.
11. КУЗИН В.И. Метод конечных элементов в моделировании океанических процессов. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. - 190 с.
12. КУЗИН В.И. О решении уравнения для баротропных волн Россби методом конечных элементов с расщеплением //Математическое моделирование динамики океана. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. - С. 156-169.
13. МАРЧУК Г.И., ДЫМНИКОВ В.П., ЗАЛЕСНЫЙ В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. -Л.: Гидрометеиздат, 1987. - 296 с.
14. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980. - 536 с.
15. МАРЧУК Г.И. Методы расщепления. - М.: Наука, 1988. - 264 с.
16. СЕИДОВ Д.Г. Моделирование синоптической и климатической изменчивости океана. -Л.: Гидрометеиздат, 1985. - 208 с.
17. FIX G.J. Finite element models for ocean circulation problems //SIAM J.Appl. Math. - 1975. - Vol. 29, N 3. -P. 371-387.
18. McWILLIAMS J. Maps from the mid-ocean dynamics experiment. Part I. Geostrophic streamfunction //J.Phys. Oceanogr. - 1976. -Vol. 6, N 6. -P. 810-827.

Поступила в ред.-изд.отд.

30 ноября 1989 года