ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 139

УДК 510.67

ПОЗИТИВНЫЕ И НЕГАТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ АЛГЕБР

Н.Х.Касымов, Б.М.Хусаинов

Проникновение методов математической логики и теории алгоритмов в современное программирование и внутренние достижения теории конструктивных систем поставили проблему исследований свойств позитивно представимых моделей [4]. Очевидно,что класс конструктивных систем содержится в классе позитивных систем. С другой стороны, любая конструктивизация является одновременно позитивной и негативной нумерацией данной системы. В [2] исследованы свойства позитивных и негативных нумераций произвольной совокупности объектов. В данной работе изучаются соотношения между позитивными и негативными нумерациями (частичных) алгебр.

Напомним, что нумерация ν данной частичной алгебраической системы конечной сигнатуры называется позитивной (негативной) нумерацией, если основные операции, а также отношения, включая отношение равенства (дополнения отношений,включая дополнение отношения равенства),являются вычислимыми относительно нумерации ν. Если нумерация ν является одновременно позитивной и негативной, то ее назовем конструктивизацией.

Через $K_P(\mathfrak{A}),K_N(\mathfrak{A}),K_C(\mathfrak{A})$ обозначим соответственно классы позитивных, негативных и конструктивных нумераций системы $\mathfrak{A}$. Основным результатом данной статьи является следующая

ТЕОРЕМА. *Существуют такие алгебры* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_6$ *и частичная алгебра* $\mathfrak{A}_7$, *для которых выполняются следующие соотношения:*

1) $K_C(\mathfrak{A}_1) \neq \emptyset$, $K_P(\mathfrak{A}_1) \setminus K_C(\mathfrak{A}_1) \neq 0$,
$K_N(\mathfrak{A}_1) \setminus K_C(\mathfrak{A}_1) \neq \emptyset$;

2) $K_P(\mathfrak{A}_2) = K_N(\mathfrak{A}_2) \neq \emptyset$;

3) $K_P(\mathfrak{A}_3) \neq \emptyset$, $K_C(\mathfrak{A}_3) = \emptyset$; $K_N(\mathfrak{A}_3) = \emptyset$;

4) $K_N(\mathfrak{A}_4) \neq \emptyset$, $K_C(\mathfrak{A}_4) = \emptyset$; $K_P(\mathfrak{A}_4) = \emptyset$;

5) $\emptyset \neq K_P(\mathfrak{A}_5) \subsetneqq K_N(\mathfrak{A}_5)$;

6) $K_C(\mathfrak{A}_6) = \emptyset$, $K_P(\mathfrak{A}_6) \neq \emptyset$, $K_N(\mathfrak{A}_6) \neq \emptyset$;

7) $\emptyset \neq K_N(\mathfrak{A}_7) \subsetneqq K_P(\mathfrak{A}_7)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_1 = \langle \omega; \mathrm{id}_\omega \rangle$. Если η - позитивная (негативная, разрешимая) эквивалентность, то очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}_1/\eta$ будет позитивной (негативной, конструктивной) моделью. Так как $\mathfrak{A}_1$ изоморфна $\mathfrak{A}_1/\eta$, то понятно, что $\mathfrak{A}_1$ удовлетворяет соотношению 1.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_2 = \langle \omega; f \rangle$, где f определена по следующему правилу:

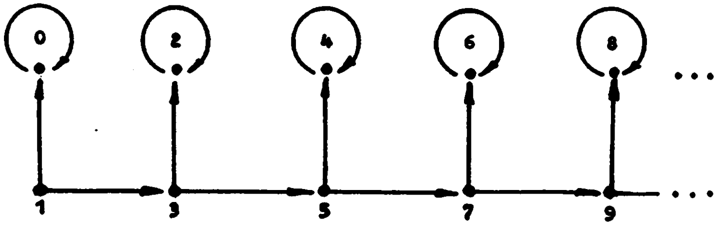
$$f(x,y,z) = \begin{cases} x, \text{если } y \neq x, \\ z, \text{если } x = y. \end{cases}$$

Очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}_2$ конструктивизируема. Известно, что любая позитивная нумерация простой алгебры является конструктивизацией [3]. Пусть η - конгруэнтность алгебры $\mathfrak{A}_2$. Если $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \,\eta\, x_2$, то $f(x_1,x_1,z) \,\eta\, f(x_1, x_2,z)$. Таким образом, $\mathfrak{A}_2/\eta$ – единичная алгебра. Следовательно, $K_P(\mathfrak{A}_2) = K_C(\mathfrak{A}_2)$. Пусть α - негативная нумерация алгебры $\mathfrak{A}_2$. Для любого $n \in \omega$ рассмотрим множество $C_n = \{x \mid f(\alpha n, \alpha x, \alpha y) \notin \alpha^{-1}\alpha n$ для некоторого $y\}$. Очевидно, что C_n - рекурсивно—перечислимое множество и $\alpha^{-1}\alpha n = C_n$. Таким образом, легко понять, что α является конструктивизацией. Соотношение 2 для алгебры $\mathfrak{A}_2$ доказано.

Для доказательства следующего соотношения 3 рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_3' = \langle \omega; f, \varphi \rangle$, где функции f и φ определены по правилам (см.рисунок):

$$f(n) \leftrightharpoons \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ - четное число}, \\ 2k+3, & \text{если } n = 2k+1; \end{cases}$$

$$\varphi(n) \leftrightharpoons \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ - четное число}, \\ 2k, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$



Пусть $S \subset \omega$ - рекурсивно-перечислимое нерекурсивное множество. На алгебре $\mathfrak{A}_3'$ определим отношение η_S:

$$f^k(1)\ \eta_S\ \varphi f^k(1) \leftrightharpoons k \in S.$$

Отношение η_S является рекурсивно-перечислимой конгруэнтностью алгебры $\mathfrak{A}_3'$. Полагаем $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_3'/\eta_S$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_3$ позитивная и неконструктивная. Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}_3$ имеет негативную нумерацию α. Пусть

$\alpha t = 1$. Рассмотрим множество $\{k \mid f^k \alpha t \notin \alpha^{-1} \phi f^k \alpha t\}$. Легко понять, что это множество совпадает с $\omega \setminus S$. В силу негативности нумерации α, это множество будет рекурсивно-перечислимым. Противоречие с выбором множества S. Соотношение 3 для алгебры $\mathfrak{A}_3$ доказано.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_3^!$ и вышевыбранное множество S. На алгебре $\mathfrak{A}_3^!$ определим соотношение η^S:

$$f^k(1)\, \eta^S\, \phi f^k(1) \Leftrightarrow k \notin S.$$

Легко понять, что алгебра $\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_3^! / \eta^S$ является негативной и неконструктивной алгеброй. Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}_4$ имеет позитивную нумерацию α, и пусть $\alpha t = 1$.

Легко проверить, что $\omega \setminus S = \{k \mid f^k \alpha t = \phi f^k \alpha t\}$. В силу позитивности α, опять получаем, что S - рекурсивное множество. Противоречие. Соотношение 4 для алгебры $\mathfrak{A}_4$ доказано.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_5 = \langle \omega, f \rangle$, где $f0 = 0$ и $fx = x-1$ для $x > 0$. Нетрудно убедиться, что любая позитивная нумерация алгебры $\mathfrak{A}_5$ является конструктивизацией. Покажем, что $\mathfrak{A}_5$ имеет негативную нумерацию, не являющуюся конструктивизацией. Пусть η - совершенная эквивалентность [1]. Легко доказать, что существует такая рекурсивная перестановка ρ, для которой выполняется равенство:

$$\{\langle n,m \rangle \mid \exists s(\rho^s n = m \vee \rho^{-s} n = m)\} = \eta.$$

На алгебре $\langle \omega, \rho \rangle$ рассмотрим конгруэнтность $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x,y \notin \{0, \rho^{-1}(0), \rho^{-2}(0), \ldots\}.$$

Очевидно, что $\sim$ - негативная конгруэнтность и $\langle \omega/\sim, \rho\rangle \cong \mathfrak{A}_5$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_5$ удовлетворяет соотношению 5.

Построим алгебру, удовлетворяющую соотношению 6.

Через $C_n = \langle\{1,\ldots,n+1\};\ f,\psi\rangle$ обозначим алгебру, где f и ψ определены по следующим правилам: $f(1)=2,\ldots$ $\ldots,\ f(n)=1, f(n+1)=n+1, \psi(i)=n+1,\ i\in\{1,\ldots,n+1\}$. Положим $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathfrak{A}_i$, где $|\mathfrak{A}_i| \cap |\mathfrak{A}_j| = \emptyset$ и

$\mathfrak{A}_i \cong C_i,\ i\neq j, i\in \mathbb{N}$.Нетрудно убедиться,что алгебру $\mathfrak{A}$ можно считать рекурсивной. Пусть S - рекурсивно-перечислимое нерекурсивное множество. На алгебре $\mathfrak{A}$ определим отношение $\theta : x\theta y \leftrightharpoons x=y \vee \psi(x)=x$, $\psi y = y$ и $x\in |\mathfrak{A}_i|$, $y\in |\mathfrak{A}_j|$, где $i,j\notin S$. Нетрудно понять, что отношение θ является негативной конгруэнтностью алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_6 = \mathfrak{A}/\theta$ имеет негативную нумерацию.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}_6$ имеет конструктивизацию α. Рассмотрим множество $R = \{x \mid \exists s$ (αs принадлежит бесконечному блоку и αs образует f-цикл длины x)$\}$.Легко проверить, что R – рекурсивно-перечислимое множество и $\omega\setminus S = R$. Противоречие с выбором S. Таким образом, $\mathfrak{A}_6$ не имеет конструктивизации.

Построим позитивную нумерацию алгебры $\mathfrak{A}_6$.Пусть $\mathfrak{A}_1'$ - такая алгебра, что $|\mathfrak{A}_1'| \cap |\mathfrak{A}| = \emptyset$ и $\mathfrak{A}_1' \cong \bigcup\limits_{i\in S} \mathfrak{A}_i$.

В силу рекурсивной перечислимости S, алгебру $\mathfrak{A}_1'$ можно считать рекурсивной. На алгебре $\mathfrak{L} \leftrightharpoons \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}_1'$ определим отношение θ_1' :

$$x\theta_1' y \leftrightharpoons \exists i(x,y\in |\mathfrak{A}_i| \ \&\ i\in S) \vee$$

$$\vee (x\in|\mathfrak{A}| \ \&\ \psi x = x \ \&\ y\in|\mathfrak{A}| \ \&\ \psi(y) = y).$$

Очевидно, что θ_1' - рекурсивно-перечислимое отношение. Пусть θ_1 – конгруэнтность алгебры $\mathfrak{L}$, порожденная отношением θ_1' . Легко понять, что $\mathfrak{L}/\theta_1$ - позитивная алгебра, изоморфная $\mathfrak{A}_6$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_6$ удовлетворяет соотношению 6.

Осталось построить частичную алгебру, которая удовлетворяет последнему соотношению.

Пусть ρ - рекурсивная перестановка, для которой эквивалентность $\eta = \{\langle n,m\rangle \mid \exists s(\rho^s n = m \vee \rho^{-s} n = m)\}$ совершенна. Определим двухместную функцию f:

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq y; \\ \rho x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Предположим, что $\langle 0,1\rangle \notin \eta$. Определим частичную функцию P:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,1) \in \eta; \\ 1, & \text{если } (x,0) \in \eta. \end{cases}$$

На частичной алгебре $\langle \omega; f, P\rangle$ рассмотрим рекурсивно-перечислимую конгруэнтность θ:

$$x\theta y = ((x,0)\in \eta \;\&\; (y,0)\in \eta \vee$$
$$\vee ((x,1)\in \eta \;\&\; (y,1)\in \eta).$$

Положим $\mathfrak{A}_7 = \langle \omega/\theta; f, P\rangle$. Очевидно, что частичная алгебра $\mathfrak{A}_7$ является позитивной, но не конструктивной.

Покажем, что $\mathfrak{A}_7$ имеет конструктивизацию. Пусть a, b - два различных символа, не принадлежащих ω. Алгебру $\langle \omega; f\rangle$ расширим до частичной алгебры $\langle \omega \cup \{a,b\}; f', P'\rangle$ следующим образом:

$$f'(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{если } x,y \in \omega; \\ x, & \text{если } y \in \{a,b\}; \\ a, & \text{если } y \in \omega \cup \{a,b\},\ x = a; \\ b, & \text{если } y \in \omega \cup \{a,b\},\ x = b; \end{cases}$$

$$P'(x) = \begin{cases} a, & \text{если} \quad x = b; \\ b, & \text{если} \quad x = a. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что $\langle \omega \cup \{a,b\}; f', P' \rangle \cong \mathfrak{A}_7$. Следовательно, $\mathfrak{A}_7$ - конструктивизируемая частичная алгебра.

Пусть α — негативная нумерация системы $\mathfrak{A}_7$. Для каждого n рассмотрим множество $C_n = \{x \mid f(\alpha n, \alpha x) \neq \alpha n\}$. Легко понять, что в силу определения функции f имеем: если $C_n \neq \emptyset$, то $C_n = \alpha^{-1}\alpha n$. Рассмотрим множество $T = \{x \mid P\alpha x \neq \alpha x\}$.

Из определения частичной функции P следует, что $T = \alpha^{-1}a \cup \alpha^{-1}b$. Следовательно, так как α-негативная нумерация, то $\alpha^{-1}a$ и $\alpha^{-1}b$ являются рекурсивными множествами. Пусть ϕ — такая рекурсивная функция, что выполняются следующие три условия:

1) для любого i $\phi(i) \notin \alpha^{-1}a \cup \alpha^{-1}b$;

2) при $i \neq j$ $\alpha\phi(i) \neq \alpha\phi(j)$;

3) для любого $x \in |\mathfrak{A}_7|$ существует такое i, что $\alpha\phi(i) = x$.

Существование такой функции следует из [1]. Таким образом, последовательность $\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b, C_{\phi 0}, C_{\phi 1}, \ldots$ является вычислимой. Следовательно, нумерация α - конструктивизация системы $\mathfrak{A}_7$. Соотношение 7 для частичной алгебры $\mathfrak{A}_7$ доказано.

Теорема доказана.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. -М.: Наука, 1979.

2. МАЛЬЦЕВ А.И. Позитивные и негативные нумерации //Докл. АН СССР.- 1965. -Т. 160. - № 2. - С. 278-280.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

4. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описания //Логико-математические основы проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. - С. 52-70.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 декабря 1990 года