

УДК 519.17+515.162.8

КУБИЧЕСКИЕ ГРАФЫ
И ГЕНЕРИРОВАНИЕ АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

А.Ю.Веснин

При комбинаторном подходе к изучению узлов и зацеплений естественным и полезным вспомогательным объектом являются графы. Так, на проекцию узла или зацепления можно смотреть как на плоский четырехвалентный граф, а на диаграмму узла - как на помеченный плоский четырехвалентный граф. Такой подход развивается, в частности в [1], что приводит к эффективным способам вычисления некоторых инвариантов узлов.

Обратно, по плоскому регулярному графу валентности четыре, имеющему n вершин, разводя одним из двух возможных способов его дуги в каждой вершине, получим 2^n диаграмм узлов и зацеплений. Очевидно, среди получаемых таким образом зацеплений содержится тривиальный узел и альтернированное зацепление порядка n .

Представляет интерес взаимосвязь узлов и зацеплений с несколько иным классом графов - не четырехвалентными, а трехвалентными регулярными графами - кубическими графами. В [2] предложен подход к построению альтернированных зацеплений по двухцветным раскраскам плоских кубических графов. Плоскими кубическими графами являются, в частности, остовы многогранников с

вершинами симплициального типа. В [2] и [3] такой способ построения зацеплений применяется для изучения геометрических структур на некоторых многообразиях - дополнениях к узлам и зацеплениям в трехмерной сфере, с помощью многогранников, остовами которых являются эти графы.

В данной работе развивается метод генерирования альтернированных узлов и зацеплений по регулярным двухцветным раскраскам плоских кубических графов. Показывается, что в некоторых случаях с помощью декомпозиции графа на кубические графы меньшего порядка можно получить информацию о структуре зацепления, соответствующего данной раскраске. На основе каталога кубических графов малого порядка [4], по описанным правилам строятся соответствующие альтернированные зацепления.

§1. Кубические графы и операции над ними

Пусть G - связный конечный трехвалентный граф. Далее будем называть G просто кубическим графом. Кубические графы являются довольно известным объектом в теории графов с рядом интересных свойств [5]. Ниже, при рассмотрении примеров кубических графов с малым числом вершин, будем использовать приведенный в [4] список кубических графов, имеющих не более 14 вершин.

Определим на кубических графах некоторые операции, позволяющие получать новые кубические графы.

1. "Добавление ребра". Пусть G - кубический граф и e_1, e_2 - его ребра. Добавим к графу G вершину v_1 на ребре e_1 (отличную от его концов) и вершину v_2 на ребре e_2 (отличную от его концов) и соединим v_1 и v_2 ребром (v_1, v_2) . Полученный при этом граф обозначим $G(e_1, e_2)$. Пример такой операции приведен на рис.1.

2. "Реберная связка". Пусть G_1 и G_2 - кубические графы, а e_1, e_2 - их ребра. Добавим к графу G_1 вершину

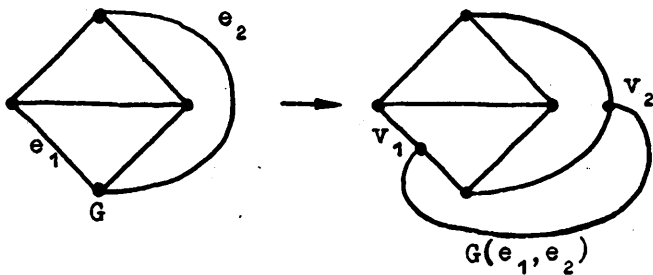


Рис. 1

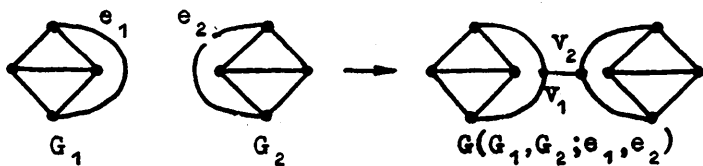


Рис. 2

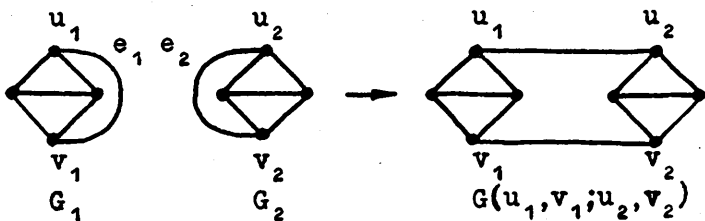


Рис. 3

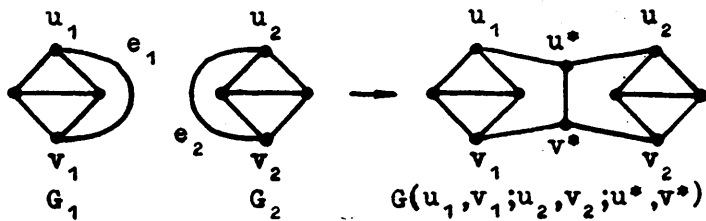


Рис. 4

v_1 на ребре e_1 , отличную от его концов, а к графу G_2 - вершину v_2 на ребре e_2 , отличную от концов этого ребра. Соединим вершины v_1 и v_2 ребром (v_1, v_2) . В результате из двух графов G_1 и G_2 получаем новый кубический граф, который обозначим $G(G_1, G_2; e_1, e_2)$. Ребро (v_1, v_2) является перешейком нового графа $G(G_1, G_2; e_1, e_2)$. Пример этой операции приведен на рис. 2.

3. "Двухреберная связка". Пусть G_1 и G_2 - кубические графы с ребрами e_1 и e_2 соответственно. Обозначим концы этих ребер через u_1, v_1 и u_2, v_2 соответственно. Удаляя ребра e_1 и e_2 и добавляя новые ребра (u_1, u_2) и (v_1, v_2) , получим новый кубический граф, который обозначим через $G(u_1, v_1; u_2, v_2)$. Пример этой операции приведен на рис. 3.

4. "Н-связка". Эта операция является композицией операций 3 и 1. Пусть G_1 и G_2 - кубические графы, а e_1, e_2 - их ребра с концами u_1, v_1 и u_2, v_2 соответственно. Применив к графам G_1 и G_2 операцию "двухреберной связки" относительно вершин u_1, v_1 и u_2, v_2 , получим кубический граф $G(u_1, v_1; u_2, v_2)$. Теперь применим к его ребрам (u_1, u_2) и (v_1, v_2) операцию "добавление ребра". Обозначив через u^* новую вершину на (u_1, u_2) , а через v^* - вершину на (v_1, v_2) , в результате этой операции получим новый кубический граф, который отличается от графа $G(u_1, v_1; u_2, v_2)$ добавлением ребра (u^*, v^*) . Полученный при этом граф обозначим через $G(u_1, v_1; u_2, v_2; u^*, v^*)$. Пример применения этой операции приведен на рис. 4.

Как видно из определения операций 1-4, их применение к кубическим графам дает снова кубические графы. Рассматривая операции, обратные к 1-4, можно осуществить декомпозицию кубического графа на кубические графы с меньшим числом вершин. Такие декомпозиции будут использоваться ниже для изучения свойств получаемых зацеплений.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь плоские кубические графы. Для того чтобы под действием операций 1-4 из плоских кубических графов получались снова плоские кубические графы, потребуем, чтобы ребра e_1 и e_2 графа G из определения операции 1 принадлежали одной и той же грани плоского графа G и чтобы в этой же грани проводилось и ребро (v_1, v_2) . В определениях операций 2-3 потребуем, чтобы ребра e_1 и e_2 принадлежали внешним граням графов G_1 и G_2 соответственно и чтобы новые ребра (u_1, v_1) , (u_2, v_2) проводились в этой же грани. Отметим, что приведенные на рис.1-4 примеры удовлетворяют этим требованиям и соответствуют получению из плоских кубических графов новых плоских кубических графов.

§2. Двухцветные раскраски кубических графов

В этом параграфе будет определена двухцветная раскраска граней плоского кубического графа, с помощью которой будут строиться диаграммы альтернированных узлов и зацеплений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G - плоский кубический граф. Раскраску его граней в два цвета будем называть регулярной двухцветной раскраской, если для каждой его вершины не все смежные с нею грани раскрашены в одинаковый цвет.

Нетрудно убедиться, что такой раскраской обладают, например, все кубические графы, имеющие гамильтонов цикл [2]. В самом деле, представим, что плоский кубический граф G расположен на сфере таким образом, что гамильтонов цикл проходит по экватору. Тогда, раскрасив все грани, попавшие в северное полушарие, в один цвет, а грани, попавшие в южное полушарие, - в другой, получим регулярную двухцветную раскраску граней графа.

ПРИМЕР. Рассмотрим плоский кубический граф G порядка четыре с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4 (рис.5). Он обладает гамильтоновым циклом $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$. Раскрасив грани

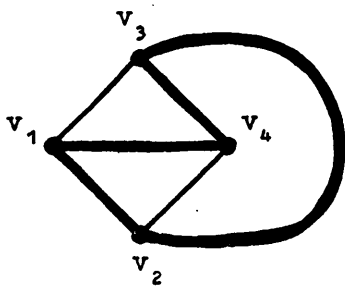


Рис. 5

$V_1V_2V_4$ и $V_2V_3V_4$ в один цвет, а грани $V_1V_3V_4$ и $V_1V_2V_3$ - в другой, получаем регулярную двухцветную раскраску граней графа G .

Понятие гамильтонова цикла можно обобщить следующим образом. Будем говорить, что на кубическом графе G существует покрытие вершин реберными циклами,

если на графе G можно указать набор циклов ребер (не менее двух ребер в каждом), в котором каждое ребро встречается не более одного раза, содержащий все вершины графа G . Если набор состоит лишь из одного цикла, то он и есть гамильтонов цикл.

Заметим, что регулярные двухцветные раскраски существуют не для всех плоских кубических графов.

ПРИМЕР. Рассмотрим плоский кубический граф G порядка 22, изображенный на рис.6. Этот граф имеет три перешейка. Обозначим через f_1, f_2, f_3 его грани, смежные центральной вершине. Как нетрудно видеть, в G существуют три вершины, каж-

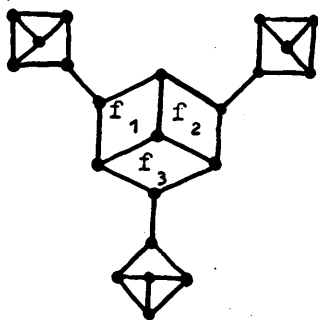


Рис. 6

дая из которых смежна внешней грани и одной из граней f_1, f_2, f_3 . Следовательно, эти грани должны иметь цвет, отличный от цвета внешней грани. Но тогда все три грани, смежные с центральной вершиной (а это и есть грани f_1, f_2, f_3), имеют одинаковый цвет. Таким образом, на графе G не существует регулярной двухцветной раскраски. По аналогии нетрудно

получить и другие примеры графов, не обладающих регулярной двухцветной раскраской.

ТЕОРЕМА. Пусть G – плоский кубический граф. На нем существует регулярная двухцветная раскраска граней тогда и только тогда, когда существует покрытие вершин графа реберными циклами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что на графе G указана регулярная двухцветная раскраска его граней. Рассмотрим множество E всех ребер графа G , смежных разноцветным граням. В силу определения регулярной двухцветной раскраски, для каждой вершины V графа G , из трех смежных с ней ребер, ровно два смежны разноцветным граням, т.е. принадлежат множеству E . Следовательно, множество E содержит все вершины графа и является покрытием вершин графа реберными циклами.

Обратно, предположим, что на кубическом графе G существует покрытие его вершин реберными циклами. Так как граф G плоский, то эти реберные циклы можно представлять как попарно не пересекающиеся замкнутые кривые без самопересечений. Эти замкнутые кривые разбивают плоскость на конечное число областей так, что любые две соседние пересекаются лишь по одной замкнутой кривой и каждая кривая разделяет лишь две области. Зафиксируем цвет одной из областей, например, внешней, и распространим раскраску на остальные области, меняя цвет при переходе через каждую замкнутую кривую. Получим двухцветную раскраску областей плоскости и, следовательно, двухцветную раскраску граней графа G . Так как замкнутые кривые строились по реберным циклам, покрывающим вершины графа G , то каждая вершина имеет смежные грани обоих цветов, и полученная раскраска является регулярной двухцветной раскраской. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что на плоском кубическом графе порядка 22, изображенном на рис.6, не существует покрытия вершин реберными циклами.

§3. Узлы, зацепления и их диаграммы

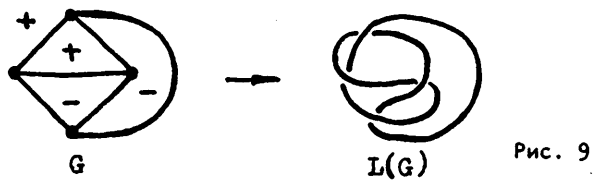
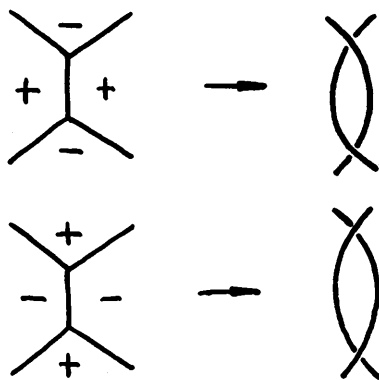
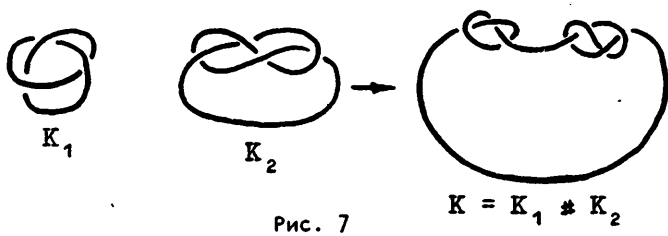
Напомним основные определения и некоторые сведения из теории узлов, которые можно найти, например, в [6] и [7].

Под узлом мы будем понимать подмножество K трехмерного пространства, гомеоморфное окружности, т.е. замкнутую кривую, не имеющую самопересечений. Узел K назовем тривиальным узлом, если существует гомеоморфизм всего пространства на себя, при котором образом K является окружность. Далее мы не будем различать эквивалентные узлы, т.е. узлы, переходящие друг в друга при гомеоморфизме всего пространства.

На множестве узлов можно определить естественную операцию композиции. А именно, следуя [6], композицией, или связной суммой, узлов K_1 и K_2 назовем узел $K = K_1 \# K_2$, получаемый "привязыванием" узла K_2 вслед за узлом K_1 на той же самой "веревке" (см. пример на рис.7).

Узел, не представимый в виде связной суммы двух нетривиальных узлов, назовем простым узлом. В противном случае узел называется составным.

Зафиксируем в трехмерном пространстве не пересекающую узел K плоскость τ и спроецируем узел K на нее. Всегда можем считать, что число прообразов у каждой точки проекции не больше двух, поэтому точки самопересечения проекции будем называть двойными точками. Образ дуги узла K , содержащей прообраз двойной точки, расположенный дальше от τ , изобразим кривой без разрыва в двойной точке, а образ дуги узла K , содержащей прообраз двойной точки, расположенный ближе к τ , изобразим кривой с разрывом в двойной точке. Проекцию, "разведенную" в двойных точках по такому правилу, будем называть диаграммой узла K . Таким образом, диаграмма узла содержит, кроме информации о пересечениях в проекции, еще и информацию о проходах "над" или "под". Диаграмма узла, в которой проходы "над" и "под" чередуются при обходе узла, называется альтерни-



рованной диаграммой. Узел, среди диаграмм которого есть хотя бы одна альтернированная, называется альтернированным узлом.

Для диаграммы D обозначим через $c(D)$ число двойных точек. Минимальное значение $c(D)$ среди всех диаграмм D данного узла K назовем порядком узла K . Диаграммы простых узлов малого порядка приведены, например, в [7]. В частности, все простые узлы порядка не более 7 являются альтернированными. Однако затем число неальтернированных узлов быстро растет [8].

Множество в трехмерном пространстве, состоящее из конечного числа связных компонент, каждая из которых - узел, будем называть зацепленным. В частности, любой узел является однокомпонентным зацеплением. Наряду с диаграммами узлов, можно рассматривать и диаграммы зацеплений. По аналогии с узлами можно определить порядок зацепления и альтернированные зацепления [6].

§4. Построение альтернированных диаграмм

Для кубического плоского графа G с регулярной двухцветной раскраской укажем процедуру построения альтернированной диаграммы зацепления. Для определенности, обозначим цвета через "+" и "-".

Для каждой вершины графа G , в силу определения регулярной двухцветной раскраски, среди трех смежных с ней ребер найдется одно, разделяющее грани одинакового цвета. В зависимости от того, имеют ли они цвет "+" или "-", заменим это ребро одним из двух элементов, изображенных на рис.8.

Нетрудно непосредственно проверить, что эти правила замены обладают следующими свойствами. При обходе строящейся по этим правилам диаграммы за проходами "над" следуют проходы "под", и наоборот. Следовательно, проделав такие процедуры замены для всех ребер графа G , смежных с гранями одинаковых

цветов, получим альтернированную диаграмму зацепления, которое обозначим $L(G)$. Пример такого построения для графа, указанного на рис.5, приведен на рис.9. Нетрудно видеть, что при этом получилась диаграмма альтернированного узла порядка четыре, называемого обычно узлом "восьмерка".

Проекцию построенного по регулярной двухцветной раскраске графа G альтернированного зацепления $L(G)$ можно получить и другим способом. Как показано при доказательстве теоремы, регулярной двухцветной раскраске графа G соответствует покрытие его вершин реберными циклами. Обозначим множество ребер графа, вошедших в эти покрывающие циклы, через E . Из правил замены, приведенных на рис.8, видно, что четырехвалентный граф G^* , полученный из кубического графа G удвоением ребер, не содержащихся в множестве E , является проекцией зацепления $L(G)$. Требование альтернированности зацепления $L(G)$ позволяет, с точностью до зеркального отражения, восстановить его диаграмму по проекции, т.е. по графу G^* (нужно только при "разводке" двойных точек проекции чередовать проходы "над" и "под"). Таким образом, наряду с построением альтернированных зацеплений по регулярным двухцветным раскраскам плоских кубических графов, можно говорить о построении зацеплений по реберным покрытиям вершин этих графов.

Из описанных выше правил построения альтернированных диаграмм непосредственно вытекают приведенные ниже свойства зацеплений. Их очевидность видна из приводимых ниже рисунков. Граф G всегда предполагается плоским кубическим с регулярной двухцветной раскраской.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если граф G имеет четырехугольную грань и пара смежных с ней противоположащих граней раскрашены в разные цвета, то одной из компонент зацепления $L(G)$ является тривиальный узел.*

Удовлетворяющие условиям этого утверждения ситуации изображены на рис.10.

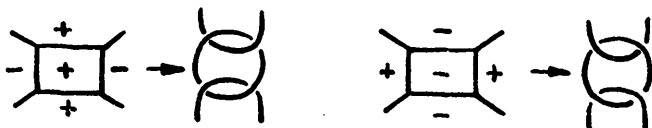


Рис. 10

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если граф G является реберной связкой графов G_1 и G_2 , то зацепление $L(G)$ является связной суммой зацеплений $L(G_1)$ и $L(G_2)$.

Соответствующая ситуация изображена на рис.11.

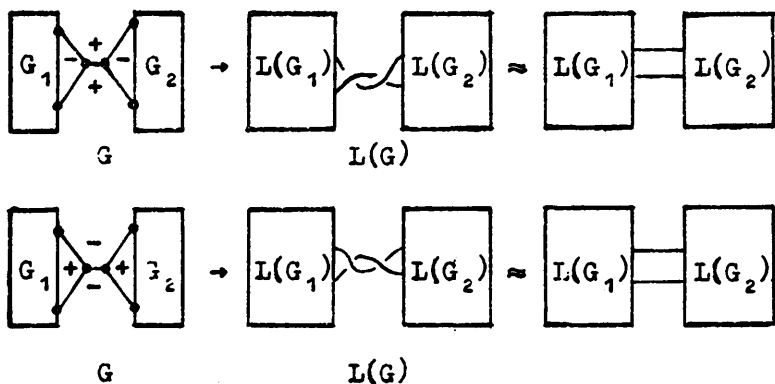


Рис.11

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если граф G является двухреберной связкой графов G_1 и G_2 и грани, смежные с двумя соединяющими их ребрами, имеют разные цвета, то $L(G)$ является связной суммой зацеплений $L(G_1)$ и $L(G_2)$.

Соответствующие условию этого утверждения возможности изображены на рис.12.

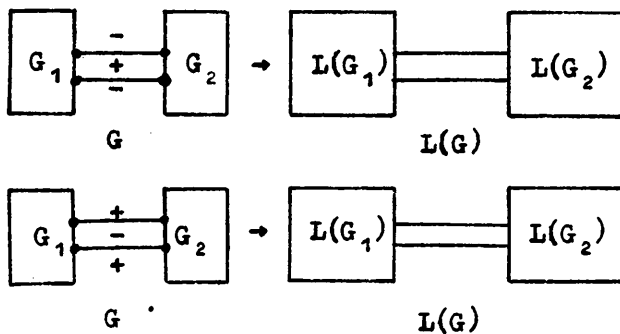


Рис. 12

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если граф G является "H-связкой" графов G_1 и G_2 , т.е. $G = G(u_1, v_1; u_2, v_2; u^*, v^*)$, где $u_1, v_1 \in G_1$, $u_2, v_2 \in G_2$ и грани, смежные с ребром (u^*, v^*) , имеют одинаковый цвет, то $L(G)$ является зацеплением компонент зацеплений $L(G_1)$ и $L(G_2)$.

Эта ситуация изображена на рис.13.

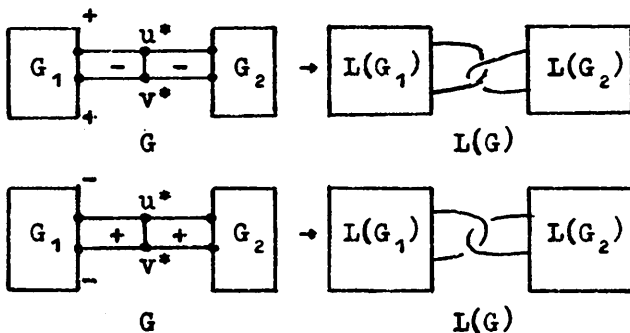


Рис.13

§ 5. Зацепления, соответствующие кубическим графам малого порядка

Перейдем к построению альтернированных зацеплений по регулярным двухцветным раскраскам плоских кубических графов. Как видно из списка, приведенного в [4], среди кубических графов, имеющих не более десяти вершин, имеется лишь 12 планарных. В приложении для каждого из этих графов указаны регулярные двухцветные раскраски и приведены соответствующие этим раскраскам альтернированные зацепления.

Обозначим цвета через "+" и "-". При всех перечисленных раскрасках для определенности предполагаем, что внешняя грань графа красится в цвет "-". Таким образом, далее не различаются двухцветные раскраски одного и того же графа, отличающиеся заменой цвета "+" на "-", и наоборот. Следовательно, не различаются зацепления, являющиеся зеркальным образом друг друга.

Сведения о графах, раскрасках и зацеплениях, приведенных в приложении, содержатся в таблице. В ней, следуя нумерации из приложения, для кубического плоского графа G указываются его порядок, число соответствующих данной раскраске реберных циклов, покрывающих его вершины, число компонент зацепления $L(G)$, а также информация о компонентах зацепления $L(G)$. Нетрудно видеть, что в качестве зацеплений $L(G)$ получены узел 4_1 - "восьмерка", узел 8_{12} , узлы порядка 10, связанные суммы двух "восьмерок", связанные суммы "восьмерки" и узла 6_1 , а также зацепления, компонентами которых являются тривиальный узел, "восьмерка" и узел 6_1 . Для составных узлов в таблице указано, связанной суммой каких простых узлов они являются.

В заключение отметим, что, рассматривая бесконечные серии плоских кубических графов, по их регулярным двухцветным раскраскам или по покрытиям вершин реберными циклами можно генерировать бесконечные серии альтернированных узлов и зацепле -

Т а б л и ц а

№	Порядок графа G	Число реберных циклов в E	Число компонент зацепления L(G)	Примечания
1	2	3	4	5
1	4	1	1	Узел 4_1
2	6	2	3	3 окружности
3	6	1	2	2 окружности
4	8	2	4	4 окружности
5	8	1	3	3 окружности
6	8	1	3	3 окружности
7	8	2	2	Узел 4_1 и окружность
8	8	1	1	Узел 8_{12}
9	8	2	2	2 окружности
10	8	1	1	Связная сумма 4_1 и 4_1
11	8	1	1	Связная сумма 4_1 и 4_1
12	10	2	1	Связная сумма 4_1 и 4_1
13	10	2	1	Связная сумма 4_1 и 4_1
14	10	2	2	Узел 4_1 и узел 4_1
15	10	1	2	Узел 4_1 и узел 4_1
16	10	2	1	Связная сумма 4_1 и 6_1
17	10	2	3	Узел 4_1 и 2 окружности
18	10	1	2	Узел 4_1 и окружность
19	10	1	2	Узел 4_1 и окружность
20	10	2	1	Узел порядка 10
21	10	1	2	Узел 4_1 и окружность
22	10	3	2	Узел 6_1 и окружность
23	10	2	3	3 окружности
24	10	2	3	3 окружности
25	10	1	2	Узел 4_1 и окружность
26	10	1	2	2 окружности
27	10	2	1	Узел порядка 10
28	10	3	4	4 окружности
29	10	2	3	3 окружности
30	10	1	2	2 окружности
31	10	2	3	3 окружности
32	10	1	2	Узел 6_1 и окружность

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
33	10	2	3	Узел 4_1 и 2 окружности
34	10	1	2	Узел 4_1 и окружность
35	10	2	1	Узел порядка 10
36	10	2	5	5 окружностей
37	10	2	3	3 окружности
38	10	1	4	4 окружности

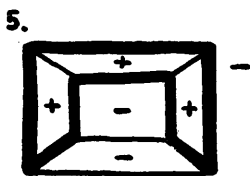
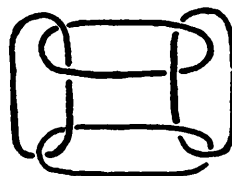
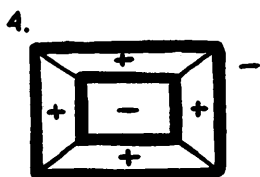
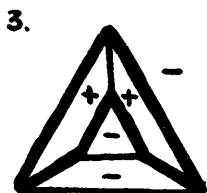
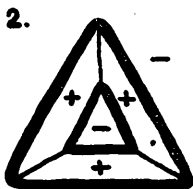
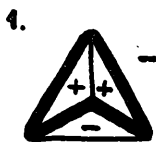
ний. При этом утверждения 1-4 дадут возможность получать некоторую информацию о структуре этих зацеплений.

Л и т е р а т у р а

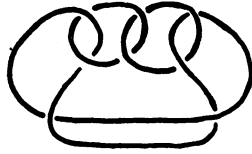
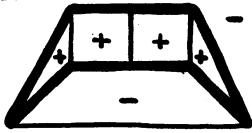
1. KAUFFMAN L. New invariants in the theory of knots // Amer.Math.Monthly.- 1988.- Vol. 95, №3.- P.195-242.
2. AITCHISON I.R., RUBINSTEIN J.H. Combinatorial cubings, cusps, and the dodecahedral knots. Preprint. 1990.
3. MENASCO W. Polyhedra representation of link complements// Contemporary Mathematics.- 1983.- Vol.20.-P.305-326.
4. ХВОРОСТОВ П.В. Симметрии кубических графов // Машинные методы обнаружения закономерностей, анализа структур и проектирования.- Новосибирск.-1982.- Вып.92: Вычислительные системы.- С.80-141.
5. ХАРАРИ Ф. Теория графов.- М.: Мир, 1973.
6. КРОУЗЛЛ Р., ФОКС Р. Введение в теорию узлов.- М.: Мир, 1967.
7. КОСНЕВСКИ Ч. Начальный курс алгебраической топологии.- М.: Мир, 1983.
8. THISTLETHWAITE M.W. Knot tabulations and related topics// London Math.Soc.Lect. Notes.- 1985.- Vol.93.- P.1-77.

Поступила в ред.-изд.отд.

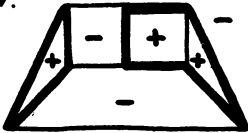
18 сентября 1991 года



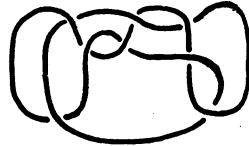
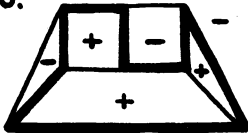
6.



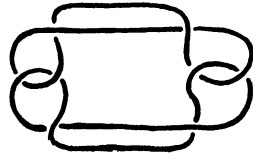
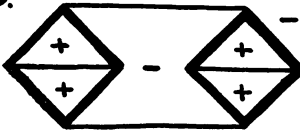
7.



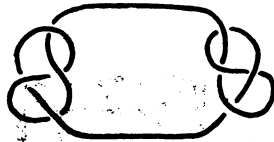
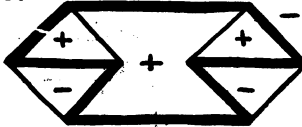
8.



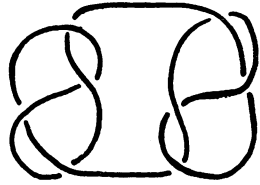
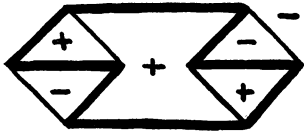
9.



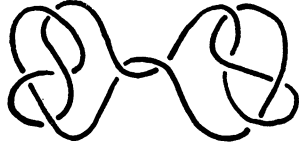
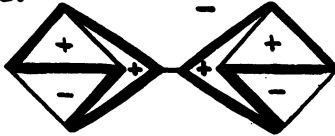
10.



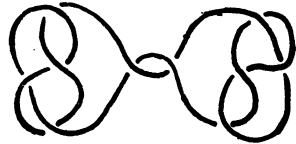
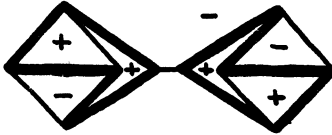
11.



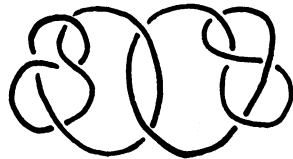
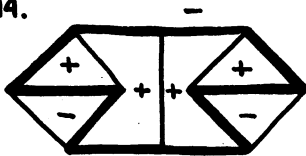
12.



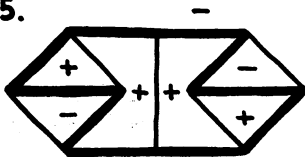
13.



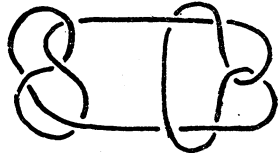
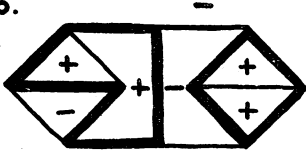
14.



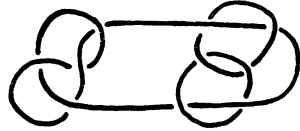
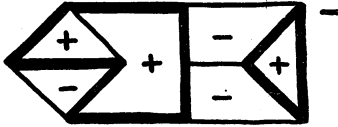
15.



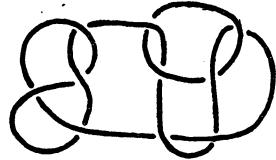
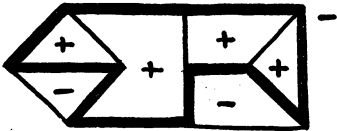
16.



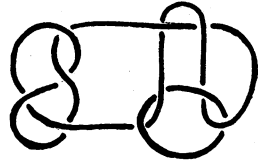
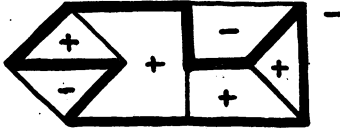
17.



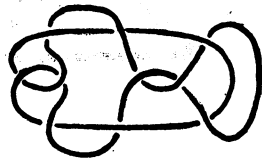
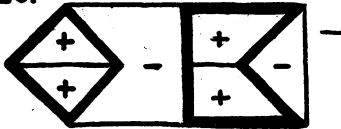
18.



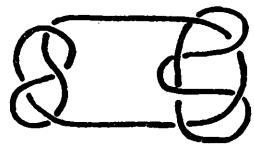
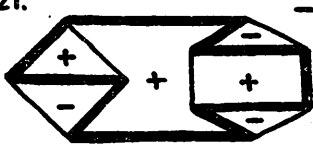
19.



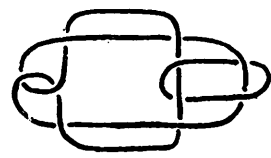
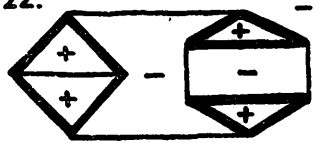
20.



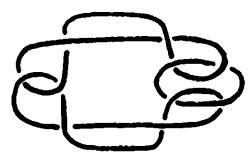
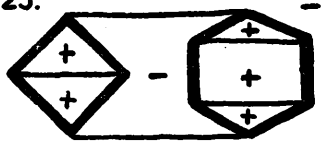
21.



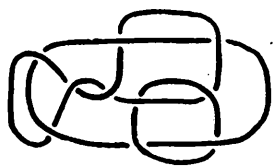
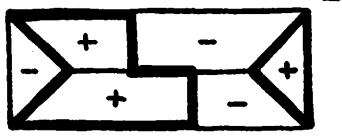
22.



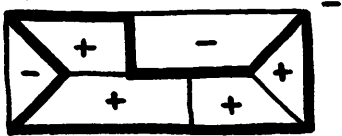
23.



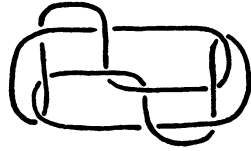
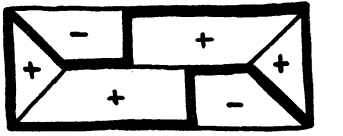
24.



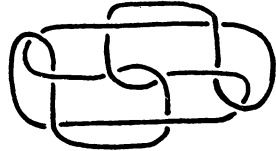
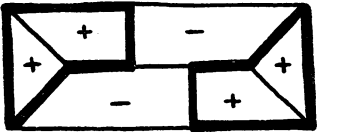
25.



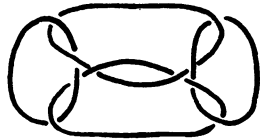
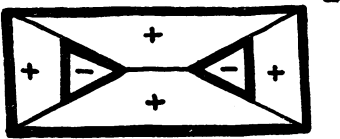
26.



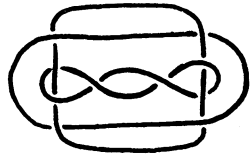
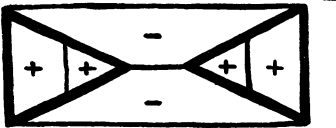
27.



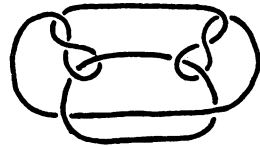
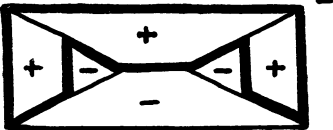
28.



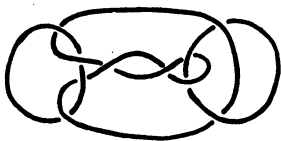
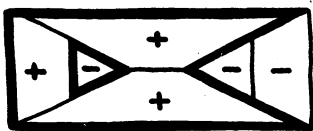
29.



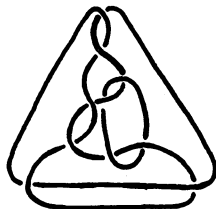
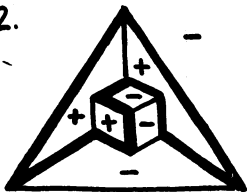
30.



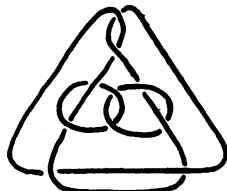
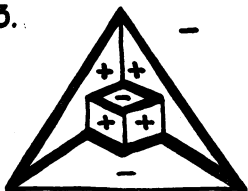
31.



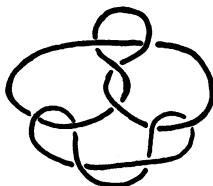
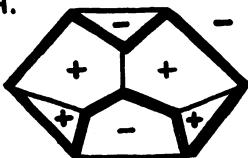
32.



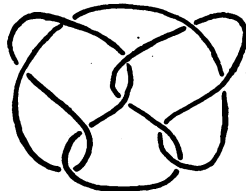
33.



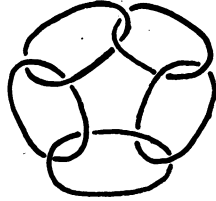
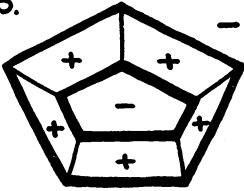
34.



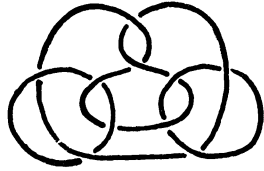
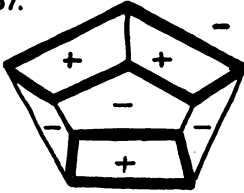
35.



36.



37.



38.

