СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1991 год Выпуск 142

УДК 519.65

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА 2 НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

П.У.Калиев

Целью данной работы является получение на основе сущест - вующих методов [1,2] асимптотически точных постоянных в оцен - ках погрешности приближения периодическими сплайнами пятой сте- пени дефекта 2. В настоящее время для таких сплайнов известны только оценки приведенные в [3], однако постоянные в них сильно завышены. Применение для рассматриваемых сплайнов методики, раз- работанной в [1], в отличие от случая сплайнов пятой степени дефекта 1 [4], позволило получить асимптотически точные оцен- ки погрешности приближения для функций $f(x) \in W^6_\infty$ и первых двух ее производных (§1). Отметим, что этим же способом могут быть найдены оценки для третьей, четвертой и пятой производных, которые существенно лучше известных, но не являются точными. В §2 описывается алгоритм получения асимптотически точных пото- чечных оценок приближения периодических функций $f(x) \in$ $\in W^{k+1}_\infty$, $k = 1,2,\ldots,5$. На основе этого алгоритма в §3 выводятся асимптотически точные оценки погрешности приближе - ния r-й производной ($r = 3,4,5$) функций $f(x) \in W^6_\infty$.

§1. Асимптотически точные оценки погрешности интерполяции периодических функций класса W^6_∞

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ с шагом $h = (b-a)/N$ заданы значения $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$:

$$f_i = f(x_i), \quad f'_i = f'(x_i), \quad i = 0,1,\dots,N.$$

Обозначим через $S(x)$ периодический интерполяционный сплайн пятой степени дефекта 2 (класса C^3), удовлетворяющий условиям

$$S(x_i) = f_i, \quad S'(x_i) = f'_i, \quad i = 0,1,\dots,N.$$

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ такой сплайн записывается в виде [1]:

$$S(x) = \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)hf'_i +$$

$$+ \varphi_4(t)hf'_{i+1} + \varphi_5(t)h^2M_i + \varphi_6(t)h^2M_{i+1}, \qquad (1.1)$$

где $M_i = S''(x_i), \quad i = 0,1,\dots,N;$

$$\varphi_1(t) = (1-t)^3(1+3t+6t^2), \qquad \varphi_2(t) = \varphi_1(1-t),$$

$$\varphi_3(t) = u(1-t)^2(1+3t), \qquad \varphi_4(t) = -\varphi_3(1-t),$$

$$\varphi_5(t) = u^2(1-t)/2, \qquad \varphi_6(t) = \varphi_5(1-t),$$

$$t = (x-x_i)/h, \qquad u = t(1-t).$$

Известно [3], что величины M_i определяются из следующей системы уравнений

$$\tilde{A}_N M = G, \qquad (1.2)$$

где

$$\tilde{A}_N = \mathrm{circ}(-6,1,0,\ldots,0,1) \qquad (1.3)$$

трехдиагональная симметрическая циркулянтная матрица порядка $N \times N$, а M и G – вектор-столбцы соответственно с элементами M_i и

$$G_i = 2(-10f_{i-1} + 20f_i - 10f_{i+1})/h^2 + \\ + (-8f'_{i-1} + 8f'_{i+1})/h.$$

Введя обозначения $g = M - f''$, $\tilde{G} = G - \tilde{A}_N f''$, где f'' - вектор-столбец с элементами f''_i, из системы (1.2) имеем

$$\tilde{A}_N g = \tilde{G}. \qquad (1.4)$$

Система (1.4) позволяет получить оценки погрешности второй производной в узлах сетки.

ЛЕММА 1. *Если* $S(x)$ *интерполирует функцию* $f(x) \in W^6_\infty$, *то справедлива неулучшаемая оценка*

$$|M_i - f''_i| \le \frac{h^4}{720}\| f^{VI} \|_\infty, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.4) вытекает неравенство

$$\| g \| \le \| \tilde{A}_N^{-1} \| \, \| \tilde{G} \|. \qquad (1.5)$$

Здесь использованы обозначения для нормы вектора $\| \alpha \| = \| \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}^T \| = \max\limits_i |\alpha_i|$ и нормы матрицы $\|A\| = \|[a_{ij}]_{i,j=1,N}\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$. Оценим правую часть в (1.4). В результате разложения по формуле Тейлора имеем

$$\tilde{G}_i = \frac{1}{6}\left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{(x_{i-1}-v)^5}{h^2} + \frac{2(x_{i-1}-v)^4}{h} + \right.\right.$$

$$\left. + (x_{i-1}-v)^3\right] f^{V\,I}(v)dv + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[- \frac{(x_{i+1}-v)^5}{h^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2(x_{i+1}-v)^4}{h} - (x_{i+1}-v)^3\right] f^{V\,I}(v)dv \right\}.$$

Преобразуя правую часть равенства, находим

$$\tilde{G}_i = \frac{h^4}{6}\left[\int_0^1 \phi(\tau) f^{V\,I}(x_{i-1} + \tau h)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \phi(\tau) f^{V\,I}(x_{i+1} - \tau h)d\tau \right],$$

где $\phi(\tau) = -\tau^3(1-\tau)^2$. Отсюда

$$|\tilde{G}_i| \le \frac{h^4}{180}\| f^{V\,I}\|_\infty .$$

Учитывая, что $\|\tilde{A}_N^{-1}\| = 1/4$ [1], из (1.5) получаем требуемый результат.

Покажем, что полученная оценка неулучшаема. Пусть $N = 4\tilde{N}$. Рассмотрим функцию $f(x)$, у которой

$$f^{V1}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \in [a-\tilde{N}h, a+\tilde{N}h], \\ -1, \text{ если } & x \in [a+\tilde{N}h, b-\tilde{N}h]. \end{cases} \tag{1.6}$$

Продолжив эту функцию на всю числовую ось с периодом $(b-a)$, получим периодическую функцию $f(x) \in W^6_\infty$. Из (1.4) имеем

$$g = \tilde{A}_N^{-1}\tilde{G}, \tag{1.7}$$

где [5]

$$\tilde{A}_N^{-1} = \mathrm{circ}(a_1^N, a_2^N, \ldots, a_N^N),$$

$$a_i^N = c_1^N\omega_1^{i-1} + c_2^N\omega_2^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.8}$$

$$c_l^N = a_l/(1-\omega_l^N), \qquad l = 1, 2, \tag{1.9}$$

$$a_1 = 1/(\omega_1 - \omega_2), \quad a_2 = -a_1, \tag{1.10}$$

$$\omega_1 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \omega_2 = 1/\omega_1. \tag{1.11}$$

Из (1.7) вычислим погрешность в точке x_0:

$$g_0(N) = \sum_{i=1}^{N} a_i^N\tilde{G}_i =$$

$$= \frac{h^4}{6}\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 a_i^N\psi(\tau)f^{V1}(x_{i-1}+\tau h)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 a_i^N\psi(\tau)f^{V1}(x_{i+1}-\tau h)d\tau\right].$$

Учитывая (1.6) и знакопостоянство подынтегральных функций $a_i^N\psi(\tau)$, получаем

$$g_0(N) = \frac{h^4}{3}\int_0^1 \psi(\tau)d\tau \sum_{i=1}^{N} a_i^N -$$

$$-\frac{h^4}{3}\left[\int_0^1 \psi(\tau)d\tau\left[\sum_{i=\tilde{N}+1}^{N-\tilde{N}-1} a_i^N + \sum_{i=\tilde{N}}^{N-\tilde{N}-2} a_i^N\right]\right],$$

или в силу свойств (1.8)-(1.11) элементов матрицы $\tilde{A}_N^{-1}$

$$g_0(N) = \frac{h^4}{720} - \delta_N, \tag{1.12}$$

где $\delta_N > 0$, $\delta_N = O(\omega_1^{\tilde{N}}) \to 0$ при $N \to \infty$. Отсюда ясно, что полученная оценка является асимптотически точной и ее нельзя улучшить одновременно для всех N. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $S(x)$ *интерполирует* $(b-a)$*-периодическую функцию* $f(x) \in W_\infty^6[a,b]$, *то имеют место неулучшаемые оценки*

$$\left.\begin{aligned} &|S(x) - f(x)| \le |\varphi(t)|h^6\|f^{VI}\|_\infty, \quad t\in[0,1] \\ &\|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_C \le K_r h^{6-r}\|f^{VI}\|_\infty, \; r = 0,1,2, \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

где

$$K_r = \|\varphi^{(r)}(t)\|_C,$$

$$\varphi(t) = u^2(1+2u)/1440, \quad u = t(1-t),$$

$$K_0 = \frac{3}{64\cdot720}, \quad K_1 = \frac{\sqrt{15+24\sqrt{30}}}{2160}, \quad K_2 = \frac{1}{720}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество

$$R(x) \equiv S(x) - f(x) = [S(x) - H(x)] + [H(x) - f(x)], \quad (1.14)$$

где $H(x)$ - эрмитов сплайн пятой степени класса C^2. Поточечные оценки величины $|H(x)-f(x)|$ и всех ее производных приведены в работе [4].

Имеем

$$|S(x)-H(x)| \leq \frac{h^2}{2} u^2 \max_i |M_i - f''_i|.$$

Далее, согласно [4], $|H(x)-f(x)| \leq h^6 u^3/720$. Поэтому, учитывая лемму 1, из (1.4) получаем

$$|R(x)| \leq |\varphi(t)| h^6 \|f^{VI}\|_\infty, \quad (1.15)$$

где $\varphi(t) = u^2(1+2u)/1440$.

С другой стороны, рассматривая равенство (1.14) на периодической функции из (1.6), с учетом (1.12) получаем для $x = x_0 + th$:

$$R(x) = \frac{h^2}{2} u^2 \left[\frac{h^4}{720} - \delta_N \right] + \frac{h^6 u^3}{720} = \varphi(t) h^6 - \delta_N(t),$$

где $\delta_N(t) > 0$, $\delta_N(t) = O(\omega_1^{\tilde{N}})$, откуда следует неулучшаемость оценки (1.15) для любого $t \in [0,1]$.

Дифференцируя (1.14), получаем

$$|R'(x)| \leq \frac{h}{2} [u(1-t)|2-5t| + ut|3-5t|] \max_i |M_i - f''_i| + |H'(x) - f'(x)|.$$

Отсюда, учитывая оценки для $|H'(x) - f'(x)|$ из [4], при $t \in [0, 2/5]$ имеем

$$|R'(x)| \leq |\varphi'(t)| h^5 \|f^{VI}\|_\infty \leq$$

$$\le \|\varphi'(t)\| h^5 \|f^{VI}\|_\infty = K_1 h^5 \|f^{VI}\|_\infty .$$

Максимум $|\varphi'(t)|$ достигается при $t=t^* = (1-\sqrt{1-4/\sqrt{30}})/2$. Аналогично, при $t \in [2/5,\ 1/2]$ находим

$$|R'(x)| \le \left[\frac{u(5u-1)}{720} + K_1(t) \right] h^5 \|f^{VI}\|_\infty \le$$

$$\le \left[\frac{1}{16 \cdot 720} + K_1\left(\frac{2}{5}\right)\right] \le K_1 h^5 \|f^{VI}\|_\infty ,$$

где

$$K_1(t) = \frac{u^2(1-2t)}{240} +$$

$$+ T_1^4(1-t)^2[(1-3t)(1+5t)T_1 + 5t(5t-2)]/360 ,$$

$$T_1 = [(3t-1)(5t+1)+(t-1)\sqrt{1+6t-15t^2}\ ]/(12t^2) .$$

Неулучшаемость полученной оценки доказывается так же, как в случае $r = 0$.

Дифференцируя (1.14) дважды и учитывая поточечные оценки из [4] для эрмитовых сплайнов, получаем следующие оценки для второй производной

$$|R''(x)| \le |\varphi''(t)| h^4 \|f^{VI}\|_\infty \le \varphi''(0) h^4 \|f^{VI}\|_\infty =$$

$$= K_2 h^4 \|f^{VI}\|_\infty, \quad t \in [0, t_0],\ t_0 = (4-\sqrt{6})/10,$$

$$|R''(x)| \le \left[\frac{(1-2t)}{720}\ (10u-1) + K_2(t)\right] h^4 \|f^{VI}\|_\infty <$$

$$< K_2 h^4 \|f^{VI}\|_\infty, \quad t \in [t_0, t_3],\ t_3 = (6-\sqrt{6})/10,$$

где

$$K_2(t) = \frac{u(1-5u)}{120} + T_2^4(1-t)[6t(5t-3)T_2 -$$

$$- 5(1-8t+10t^2)]/180 ,$$

$$T_2 = [3t(3-5t)-(1-t)\sqrt{3t(4-5t)}]/[6t(1-2t)] ,$$

$$t \in [t_0, t_1], \; t_1 = (3-\sqrt{3})/6 ;$$

$$K_2(t) = -\frac{u(1-5u)}{120} + P_1^4 t[6(1-t)(5t-2)P_1 +$$

$$+ 5(3-12t+10t^2)]/180 ,$$

$$P_1 = [3(1-t)(2-5t)-t\sqrt{3(1-t)(5t-1)}]/[6(1-t)(1-2t)],$$

$$t \in [t_1, t_3],$$

$$|R''(x)| \le |\varphi''(t)| h^4 \|f^{VI}\|_\infty < K_2 h^4 \|f^{VI}\|_\infty ,$$

$$t \in [t_3, 1/2].$$

Теорема доказана. Заметим, что при выполнении условий теоремы 1, аналогичным образом, можно получить оценки (1.13) для $r = 3,4,5$ с постоянными $K_3 = 1/40$, $K_5 = 11/60$, $K_5 = 2/3$. Эти постоянные значительно меньше известных [3], но они не являются точными. Асимптотически точные оценки для $r = 3,4,5$ будут установлены в §3.

§2. Алгоритм получения асиптотически точных поточенных оценок приближения периодических функций класса W_∞^{k+1}, $k = 1,2,\dots,5$

В данном параграфе описывается алгоритм вычисления значений $C_{k,r}(t)$ при любом $t \in [0,1]$ в оценках вида

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)| \le C_{k,r}(t)\,\frac{h^{k-r+1}}{k!}\,\|f^{(k+1)}\|_\infty\,, \quad (2.1)$$

$$k = 0,1,\ldots,5;\ r = 0,1,\ldots,k,$$

где $x = x_i + th$, $i = 0,1,\ldots,N-1$; $f(x) \in W_\infty^{k+1}$.

Из этих оценок могут быть найдены асимптотически точные оценки в норме L_∞:

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty \le C_{k,r}\,\frac{h^{k-r+1}}{k!}\,\|f^{(k+1)}\|_\infty\,,$$

$$k = 0,1,\ldots,5;\ r = 0,1,\ldots,k,$$

где $C_{k,r} = \max\limits_{t\in[0,1]} C_{k,r}(t)$.

Для получения оценок (2.1) запишем известные соотношения [3], связывающие значения сплайна $S(x)$ и его производных в узлах сетки со значениями интерполируемой функции и ее производной,

$$\sum_{j=0}^{2} a_{0j} S^{(r)}(x_{i+j-1}) = \sum_{j=0}^{3} (h^{-r} a_{rj} f_{i+j-1} +$$

$$+ h^{1-r}\tilde{a}_{rj} f'_{i+j-1}),\quad r = 0,1,\ldots,5,$$

где

$$[a_{rj}] = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -20 & 0 \\ 120 & 0 & -120 & 0 \\ -360 & -600 & 840 & 120 \\ 480 & 1440 & -1440 & -480 \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{a}_{rj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ 36 & 168 & 36 & 0 \\ -96 & -792 & -528 & -24 \\ 120 & 1320 & 1320 & 120 \end{bmatrix}.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $t^r h^r / r!$, $r = 0,1,\ldots$

$\ldots,5$, и затем складывая их, получаем

$$\sum_{j=0}^{2} b_{j+1}(0)S(x_{i+j-1}+th) =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} (b_{j+1}(t)f_{i+j-1}+\tilde{b}_{j+1}(t)hf'_{i+j-1}), \quad (2.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
b_1(t) &= (1-t)^4(1+4t),\\
b_2(t) &= -6+20t^2-25t^4+12t^5,\\
b_3(t) &= b_2(1-t), \quad b_4(t) = b_1(1-t);\\
\tilde{b}_1(t) &= t(1-t)^4,\\
\tilde{b}_2(t) &= t(1-t)(-6-6t+22t^2-11t^3),\\
\tilde{b}_3(t) &= -\tilde{b}_2(1-t), \quad \tilde{b}_4(t) = -\tilde{b}_1(1-t).
\end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

Введем обозначения

$$R(x_{i+j-1}+th) = S(x_{i+j-1}+th)-f(x_{i+j-1}+th),$$
$$i = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$D(x_i+th) = \sum_{j=0}^{3}[b_{j+1}(t)f_{i+j-1}+\tilde{b}_{j+1}(t)hf'_{i+j-1}] -$$
$$- \sum_{j=0}^{2} b_{j+1}(0)f(x_{i+j-1}+th).$$

Тогда из (2.2), предполагая, что $f(x)\in W_\infty^{k+1}$, $k = 1, 2,\ldots,5$, имеем

$$\sum_{j=0}^{2} b_{j+1}(0)R^{(r)}(x_{i+j-1}+th) = D^{(r)}(x_i+th), \; r\le k,$$

или в матричном виде $\tilde{A}_N R^{(r)} = D^{(r)}$, $r = 0,1,\ldots,k$, где $\tilde{A}_N$ - циркулянтная матрица, задаваемая формулой (1.3),

$$R^{(r)} = [R_N^{(r)}(x_0+th), \dots, R_N^{(r)}(x_{N-1}+th)]^T,$$

$$D^{(r)} = [D^{(r)}(x_0+th), \dots, D^{(r)}(x_{N-1}+th)]^T.$$

Отсюда

$$R^{(r)} = \tilde{A}_N^{-1} D^{(r)}, \quad r = 0,1,\dots,k, \tag{2.4}$$

где $\tilde{A}_N^{-1} = \mathrm{circ}(a_1^N, a_2^N, \dots, a_N^N)$, элементы которого определяются формулами (1.8)-(1.11). Введем величины a_i^N при $i = 0;N+1;\ N+2$, определяемые также формулой (1.8). Тогда легко доказывается следующие свойства

$$\left.\begin{aligned} a_i^N &= a_{N-i+2}^N, \quad i = 0,1,\dots,N+2, \\ a_2^N &- a_{N+2}^N = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Соотношение (2.4) используется в дальнейшем для вывода всех оценок.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $S(x)$ *интерполирует* $(b-a)$*-периодическую функцию* $f(x) \in W_\infty^{k+1}[a,b]$, $k = 1, 2, \dots, 5$. *Тогда имеют место неулучшаемые в каждой точке* $x = x_i + th$, $t \in [0,1]$, $i = 0,1,\dots,N-1$, *асимптотические оценки*

$$|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \le C_{k,r}(t) \frac{h^{k-r+1}}{k!} \| f^{k+1} \|_\infty,$$

$$k = 1,2,\dots,5; \quad r = 0,1,\dots,k,$$

где .

$$C_{k,r}(t) = \int_0^t |G_0^{(r)}(t,\tau)|\, d\tau + \int_0^{1-t} |G_0^{(r)}(1-t,\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \frac{\omega_1}{1-\omega_1} \left[\int_0^1 |a_1 Q_1^{(r)}(t,\tau)|\, d\tau + \int_0^1 |a_1 Q_1^{(r)}(1-t,\tau)|\, d\tau \right],$$

$$G_0(t,\tau) = a_1 Q_1(t,\tau) + \phi_1(t,\tau),$$

$$Q_1(t,\tau) = \phi_1(t,\tau)/\omega_1 + \phi_2(t,\tau) + \phi_3(t,\tau)\omega_1,$$

$$\phi_1(t,\tau) = (-1)^{k+1}[b_1(t)\tau^k - k\tilde{b}_1(t)\tau^{k-1}],$$

$$\phi_2(t,\tau) = (-1)^{k+1}[b_1(t)(1+\tau)^k - k\tilde{b}_1(t)(1+\tau)^{k-1} + b_2(t)\tau^k - k\tilde{b}_2(t)\tau^{k-1} - (1+\tau-t)^k],$$

$$\phi_3(t,\tau) = b_4(t)(1-\tau)^k + k\tilde{b}_4(t)(1-\tau)^{k-1} - (t-\tau)^k,$$

$b_j(t)$, $\tilde{b}_j(t)$, $j = 1,2,3,4$; a_1 *и* ω_1 *задаются формулами* (2.3), (1.10) *и* (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу периодичности $f(x)$ нам достаточно рассмотреть одну из величин $R_N^{(r)}(x_i + th)$. Имеем

$$R_N^{(r)}(x_0 + th) = \sum_{j=1}^{N} a_j^N D^{(r)}(x_{j-1} + th). \qquad (2.7)$$

Разложим значения f_{i+j-1}, f'_{i+j-1} и $f(x_{i+j-1} + th)$, входящие в выражения для $D(x_i + th)$, по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th$ с остаточным членом в интегральной форме. После тождественных преобразований и приведения подобных, находим

$$D(x_i + th) = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}(t), \qquad (2.8)$$

где

$$d_{ij}(t) = \frac{h^{k+1}}{k!}\left\{\int_0^t \phi_j(t,\tau)\, f^{(k+1)}(x_{i+j-2} + \tau h)d\tau + \right.$$

$$+\int_t^1 \tilde{\phi}_j(t,\tau) f^{(k+1)}(x_{i+j-2}+\tau h)d\tau \Bigg\},$$

$$\phi_1(t,\tau)= (-1)^{k+1}[b_1(t)\tau^k - k\tilde{b}_1(t)\tau^{k-1}],$$

$$\phi_2(t,\tau)= (-1)^{k+1}[b_1(t)(1+\tau)^k + b_2(t)\tau^k -$$

$$- k\tilde{b}_1(t)(1+\tau)^{k-1} - k\tilde{b}_2(t)\tau^{k-1} - (1+\tau-t)^k],$$

$$\phi_3(t,\tau)= [b_4(t)(1-\tau)^k + k\tilde{b}_4(t)(1-\tau)^{k-1} - (t-\tau)^k],$$

$$\tilde{\phi}_j(t,\tau)= (-1)^{k+1}\phi_{4-j}(1-t,1-\tau), \quad j = 1,2,3,$$

причем в силу периодичности $f(x)$ имеем

$$d_{ij} = d_{N+i,j}, \; j = 1,2,3; \quad i = 1,2,\ldots, N. \qquad (2.9)$$

Легко проверяются следующие свойства функций $\phi_j(t,\tau)$ и $\tilde{\phi}_j(t,\tau)$:

$$\phi_j(t,\tau) = \tilde{\phi}_j(t,\tau)+(-1)^{k+1}b_j(0)(\tau-t)^k, \; j = 1,2,3, \qquad (2.10)$$

$$\phi_j^{(r)}(t,t) = \tilde{\phi}_j^{(r)}(t,t), \; r = 0,1,\ldots, 4. \qquad (2.11)$$

Эти свойства позволяют дифференцировать (2.8) по t :

$$D^{(r)}(x_i + th) = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}^{(r)}(t),$$

где

$$d_{ij}^{(r)}(t)= \frac{h^{k-r+1}}{k!}\Bigg\{ \int_0^t \phi_j^{(r)}(t,\tau)\, f^{(k+1)}(x_{i+j-2}+\tau h)d\tau +$$

$$+ \int_t^1 \tilde{\psi}_j^{(r)}(t,\tau) f^{(k+1)}(x_{i+j-2}+\tau h)\,d\tau \Bigg\} .$$

Подставим выражение для $D^{(r)}(x_i + th)$ и явные выражения для a_i^N в (2.7). Далее, проводя преобразования с учетом свойств (2.9),(2.10),(2.5), получаем

$$R_N^{(r)}(x_0+th) = \frac{h^{k-r+1}}{k!}\Bigg\{ \int_0^t P_0^{(r)}(t,\tau) f^{(k+1)}(x_0+\tau h)\,d\tau \; +$$

$$+ \int_t^1 \tilde{P}_0^{(r)}(t,\tau) f^{(k+1)}(x_0+\tau h)\,d\tau \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 P_i^{(r)}(t,\tau) f^{(k+1)}(x_{N-i}+\tau h)\,d\tau \Bigg\}, \qquad (2.12)$$

где

$$P_0(t,\tau) = c_1^N Q_1(t,\tau) + c_2^N Q_2(t,\tau) + \psi_1(t,\tau),$$

$$\tilde{P}_0(t,\tau) = c_1^N \tilde{Q}_1(t,\tau) + c_2^N Q_2(t,\tau) + \tilde{\psi}_1(t,\tau),$$

$$P_i(t,\tau) = c_1^N Q_1(t,\tau)\omega_1^i + c_2^N Q_2(t,\tau)\omega_2^i ,$$

$$Q_l(t,\tau) = \psi_1(t,\tau)/\omega_l + \psi_2(t,\tau) + \psi_3(t,\tau)\omega_l , \quad l = 1,2,$$

$$\tilde{Q}_l(t,\tau) = \tilde{\psi}_1(t,\tau)/\omega_l + \tilde{\psi}_2(t,\tau) + \tilde{\psi}_3(t,\tau)\omega_l , \quad l = 1,2,$$

c_l^N, $l = 1,2$, задаются формулой (1.9). Отсюда после применения неравенства Гельдера имеем

$$|R_N^{(r)}(x_0 + th)| \le C_{k,r}(N;t)\, \frac{h^{k-r+1}}{k!}\, \|f^{(k+1)}\|_\infty ,$$

где

$$C_{k,r}(N;t) = \int_0^t |P_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_t^1 |\tilde{P}_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |P_i^{(r)}(t,\tau)|d\tau \ , \tag{2.13}$$

Преобразуем выражение для $C_{k,r}(N;t)$. Для этого введем функции

$$G_0(t,\tau) = a_1 Q_1(t,\tau) + \phi_1(t,\tau),$$

$$\tilde{G}_0(t,\tau) = a_1 \tilde{Q}_1(t,\tau) + \tilde{\phi}_1(t,\tau),$$

$$G_i(t,\tau) = a_1 Q_1(t,\tau)\omega_1^i, \quad i = 1,2,\ldots, N-1;$$

$$G_{N,i}(t,\tau) = c_1^N Q_1(t,\tau)\omega_1^i, \ i = 1,2,\ldots, N-1;$$

где a_1 определяется формулой (1.10). Из свойств (1.9)-(1.11), (2.5), (2.11) нетрудно получить

$$\tilde{G}_0(t,\tau) = (-1)^{k+1} G_0(1-t,1-\tau),$$

$$c_2^N \omega_2^i = c_1^N \omega_1^{N-i},$$

$$Q_2(t,\tau) = (-1)^{k+1} Q_1(1-t,1-\tau) \ .$$

С учетом этих равенств преобразуем подынтегральные выражения в (2.13) к виду

$$P_0(t,\tau) = G_0(t,\tau) + G_{N,N}(t,\tau) +$$

$$+ (-1)^{k+1} G_{N,N}(1-t,1-\tau), \quad \tau \in [0,t],$$

$$\tilde{P}_0(t,\tau) = (-1)^{k+1}G_0(1-t,1-\tau) + G_{N,N}(t,\tau) + (-1)^{k+1}G_{N,N}(1-t,1-\tau), \quad \tau\in[t,1],$$

$$P_i(t,\tau) = G_{N,i}(t,\tau)+(-1)^{k+1}G_{N,N-i}(1-t,1-\tau), \quad i = 1,2,\dots, N-1, \ \tau\in[0,1].$$

Отсюда имеем $C_{k,r}(N;t) = \tilde{C}_{k,r}(N;t) + \tilde{\delta}_N(t)$, где

$$\tilde{C}_{k,r}(N;t)= \int_0^t |G_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^{1-t} |G_0^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 |G_{N,i}^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^1 |G_{N,i}^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau\right],$$

$$\tilde{\delta}_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\delta}_{N,i}(t), \qquad \tilde{\delta}_{N,i}(t) = O(\omega_1^{N/2}).$$

Величина $\tilde{\delta}_N(t)$ появилась в результате перехода от модуля суммы к сумме модулей, поэтому $\tilde{\delta}_{N,i}(t) \le 0$ и, значит, $\tilde{\delta}_N(t) \le 0$. Отметим также, что $\tilde{\delta}_N(t) \to 0$ при $N \to \infty$.

Учитывая выражения для функций $G_{N,i}$ нетрудно показать, что $\tilde{C}_{k,r}(N;t)$ можно преобразовать к виду

$$\tilde{C}_{k,r}(N;t) = C_{k,r}(t),$$

где

$$C_{k,r}(t) = \int_0^t |G_0^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^{1-t} |G_0^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau + \frac{\omega_1}{1-\omega_1}\left[\int_0^1 |a_1Q_1^{(r)}(t,\tau)|d\tau + \int_0^1 |a_1Q_1^{(r)}(1-t,\tau)|d\tau\right],$$

т.е. функции $\tilde{C}_{k,r}(N;\ t)$ на самом деле от N не зависят. Таким образом получаем соотношения $C_{k,r}(N;t) \le C_{k,r}(t)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} C_{k,r}(N;t) = C_{k,r}(t)$, что приводит к окончательной поточечной оценке

$$|R_N^{(r)}(x_0+th)| \le C_{k,r}(t)\ \frac{h^{(k-r+1)}}{k!}\ \|f^{(k+1)}\|_\infty .$$

Покажем, что полученная оценка является асимптотически точной. Для этого рассмотрим формулу (2.12). Если в ней функции $P_0(t,\tau) \ne 0$, $\tau\in[0,t]$, $\tilde{P}_0(t,\tau)\ne 0$, $\tau\in[t,1]$, $P_1(t,\tau)\ne 0$, $\tau\in[0,1]$, и знаки у них совпадают, то доказательство точности оценки проводится аналогично, как в лемме 1.

Рассмотрим теперь случай, когда подынтегральные функции в (2.12) имеют корни. Пусть $N = 4\tilde{N}$ и $\tau_{0,k_0}\in[0,t]$, $\tilde{\tau}_{0,\tilde{k}_0}\in[t,1]$, $\tau_{i,k_i}\in[0,1]$ - корни соответственно функций $P_0(t,\tau)$, $\tilde{P}_0(t,\tau)$ и $P_i(t,\tau)$, $i = 1,2,\ldots,N-1$; $k_0,\tilde{k}_0,k_i$ - указывают номера корней в соответствующих отрезках интегрирования. Допустим, что знаки функций $P_0(t,\tau)$, $\tau\in[0,\tau_{0,1}]$ и $P_1(t,\tau)$, $\tau\in[\tau_{N-1,m},1]$, где m указывает номер последнего корня $P_1(t,\tau)$, противоположны. На отрезке $[a,a+\tilde{N}h]$ построим функцию $F(x)$, у которой $|F(x)| = 1$ и знаки совпадают со знаками функций $P_0(t,\tau)$, $\tilde{P}_0(t,\tau)$ и $P_i(t,\tau)$ в соответствующих отрезках интегрирования. Продолжим полученную функцию $F(x)$ на $[a+\tilde{N}h,a+2\tilde{N}h]$ с теми же точками перемен знака τ_{0,k_0}, $\tilde{\tau}_{0,\tilde{k}_0}$, τ_{i,k_i}, $i = 1,2,\ldots,\tilde{N}$, и поменяем ее знак на противоположный. Аналогично построим $F(x)$ на $[b-\tilde{N}h,b]$ и продолжим ее с противоположным знаком на $[b-2\tilde{N}h,b-\tilde{N}h]$. Таким образом построена функция $F(x)$ на

$[a,b]$, для которой выполнены все условия существования [6, с. 16] периодической функции $f(x)\in W_\infty^{k+1}$ с периодом $(b-a)$ у которой $f^{(k+1)}(x) = F(x)$, $x\in[a,b]$.

В том случае, когда знаки функций $P_0(t,\tau)$, $\tau\in[0,\tau_{0,1}]$ и $P_1(t,\tau)$, $\tau\in[\tau_{N-1,m},1]$, совпадают, аналогично можно построить периодическую функцию $f(x)\in$ $\in W_\infty^{k+1}$ на отрезке $[a+\tau_{0,1}, b+\tau_{0,1}]$.

Вычисляя погрешность в точке $x_0 + th$ на построенной функции $f(x)$ с учетом знаков подынтегральных функций в (2.12) и свойств элементов $\tilde{A}_N^{-1}$, можно получить

$$| R_N^{(r)}(x_0+ th)| = \frac{h^{k-r+1}}{k!}[C_{k,r}(N;t)- \delta_N(t)] ,$$

где $\delta_N(t)> 0$, $\delta_N(t) = O(\omega_1^{\tilde{N}})$, откуда следует асимптотически точная оценка

$$|R^{(r)}(x_0+th)|\le \lim_{N\to\infty}|R_N^{(r)}(x_0+th)| = C_{k,r}(t)\ \frac{h^{k-r+1}}{k!} .$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *При выполнении условий теоремы 2, справедливы следующие асимптотически точные оценки*

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty \le C_{k,r}\ \frac{h^{k-r+1}}{k!}\|f^{(k+1)}\|_\infty, \quad r=0,1,\dots, 5,$$

где $C_{k,r} = \max\limits_{t\in[0,1]} C_{k,r}(t)$.

§3. Асимптотически точные оценки погрешности приближения производных периодических функций $f(x)\in W_\infty^6$

В этом параграфе на основе описанного в §2 алгоритма мы получим асимптотически точные оценки приближения r-й производной (r = 3,4,5) функции $f(x)\in W_\infty^6$. Сначала приведем вспомогательный результат о свойствах функций $G_0(t,\tau)$, $G_0(1-t,\tau)$, $a_1Q_1(t,\tau)$, $a_1Q_1(1-t,\tau)$ и $C_{5,r}(t)$, определенных в §2.

ЛЕММА 2. *Пусть для некоторого* $t\in[0,1]$ *и* $r\in\{0,1,\dots,5\}$ *функции* $G_0^{(r)}(z,\tau)$, $\tau\in[0,z]$, $a_1Q_1^{(r)}(z,\tau)$, $\tau\in[0,1]$, *при* $z=t$ *и* $z=1-t$ *имеют одинаковый знак и знакопостоянны. Тогда имеет место следующее равенство*

$$C_{5,r}(t) = 120\,|\varphi^{(r)}(t)|,$$

где $\varphi(t)$ *задается формулой (1.15).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственными вычислениями легко установить, что

$$\int_0^1 G_0(t,\tau)d\tau + \int_t^1 (t-\tau)^5 d\tau +$$

$$+\frac{a_1\omega_1}{1-\omega_1}\int_0^1 [Q_1(t,\tau)+Q_1(1-t,\tau)]d\tau = 120\,\varphi(t).$$

Отсюда, учитывая условия леммы, получаем $C_{5,r}(t) = 120\,|\varphi^{(r)}(t)|$.

Отметим, что для любого $t\in[0,1]$ подынтегральные функции $G_0(z,t)\geq 0$, $\tau\in[0,t]$, и $a_1Q_1(z,\tau)\geq 0$, $\tau\in[0,1]$, $z=t$ и $z=1-t$. Таким образом выполняются условия леммы 2 и значит подтверждается результат (1.13) из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $S(x)$ *интерполирует* $(b-a)$*-периодическую функцию* $f(x)\in W_\infty^6[a,b]$, *то имеют место следующие асимптотически точные оценки*

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\| \leq K_r h^{6-r}\|f^{VI}\|_\infty, \quad r = 3,4,5,$$

где

$$K_3 = \frac{\sqrt{2}}{120}, \quad K_4 = \frac{1+2\sqrt{2}}{30}, \quad K_5 = \frac{2+\sqrt{2}}{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду симметрии поточечных оценок (2.6) относительно $t = 1/2$ рассмотрим случай $t \in [0,1/2]$. Преобразуем функцию $Q_1(t,\tau)$ к виду

$$Q_1^{(r)}(t,\tau) = -\frac{10}{\omega_1^2} A^{(r)}(t)\, A(1-\tau),$$

где $A(t) = u^2[(1-\sqrt{2}) + (6-4\sqrt{2})\,t]$. При $r = 3$ функция $A'''(t)$ меняет знак с плюса на минус в точке $t_{3,2} = ((11-7\sqrt{2}) - \sqrt{119-84\sqrt{2}})/(10\omega_1) \approx 0{,}37684$, а $A'''(1-t)$ меняет знак с минуса на плюс в точке $t_{3,1} = 1-t_{3,2} + (\sqrt{119-84\sqrt{2}})/(5\,\omega_1) \approx 0{,}009399$. Функция $\phi_1'''(t,\tau) \le 0$ для всех $t \in [0,1/2]$, а $\phi_1'''(1-t,\tau) \le 0$ при $t \in [0,1/4]$, $\phi_1'''(1-t,\tau) \ge 0$, $t \in [2/5,1/2]$. При $t \in [1/4, 2/5]$ функция $\phi_1'''(1-t,\tau)$ имеет корень $\tau^* = (2-5t)/(2-4t)$.

Рассмотрим сначала промежуток $t \in [0,t_{3,2}]$. Из (2.6), учитывая, что

$$|G_0'''(z,\tau)| \le \left|-\frac{10a_1}{\omega_1^2} A'''(z) A(1-\tau)\right| + |\phi_1'''(z,\tau)|,$$

для $z = t$ и $z = 1-t$, имеем

$$C_{5,3}(t) = \tilde{B}_1(t)\,|A'''(t)| + \tilde{B}_2(t)\,|A'''(1-t)| +$$

$$+ \int_0^t |\phi_1'''(t,\tau)|\,d\tau + \int_0^{1-t} |\phi_1'''(1-t,\tau)|\,d\tau,$$

где

$$\tilde{B}_1(t) = \frac{10a_1}{\omega_1^2} B(t) + \frac{10a_1}{\omega_1(1-\omega_1)} B(1) ,$$

$$\tilde{B}_2(t) = \frac{10a_1}{\omega_1^2} B(1-t) + \frac{10a_1}{\omega_1(1-\omega_1)} B(1) ,$$

$$B(t) = \int_0^t A(1-\tau)d\tau , \quad B(1) = \frac{4-3\sqrt{2}}{30} .$$

Учитывая, что $A'''(z)$ и $\phi_1'''(z)$ для $z=t$ и $z=1-t$ не меняют знак при $t\in[0,t_{3,1}]$, получаем

$$\tilde{B}_1(t)|A'''(t)| + \tilde{B}_2(t)|A'''(1-t)| = 2(1-8t+10t^2 +$$

$$+ 90t^4 - 288t^5 + 296t^6 - 400t^7 + 100t^8) \le \sqrt{2}(1-6t) ,$$

$$\int_0^t |\phi_1'''(t,\tau)|d\tau + \int_0^{1-t} |\phi_1'''(1-t,\tau)|d\tau =$$

$$= 4t(1-5t+40t^3-86t^4+70t^5-20t^6) \le 4t .$$

Откуда $C_{5,3}(t) \le \sqrt{2} + (4-6\sqrt{2})t \le \sqrt{2}$, $t\in[0,t_{3,1}]$.

При $t\in[t_{3,1},1/4]$ функции $G_0'''(z,\tau) \le 0$ и $a_1Q_1'''(z,\tau) \le 0$, $\tau\in[0,z]$, $z=t$ и $z=1-t$. Таким образом выполняются условия леммы 2. Поэтому

$$C_{5,3}(t) \le 120\,|\varphi'''(t)| < \sqrt{2}, \quad t\in[t_{3,1},1/4].$$

При $t\in[1/4,t_{3,2}]$ функции $G_0'''(t,\tau)$, $a_1Q_1'''(t,\tau)$ и $a_1Q_1'''(1-t,\tau)$ в соответствующих промежутках интегрирования отрицательны и тогда с учетом леммы 2 получаем

$$C_{5,3}(t) \le \Bigg\{ -\int_0^t G_0'''(t,\tau)d\tau - \int_0^{1-t} G_0'''(1-t,\tau)d\tau -$$

$$- \frac{\omega_1}{1-\omega_1}\left[\int_0^1 a_1 Q_1'''(t,\tau)d\tau + \int_t^1 a_1 Q_1'''(1-t,\tau)d\tau \right]\Bigg\} +$$

$$+ \int_0^{1-t} \phi_1'''(1-t,\tau)d\tau + \int_0^{1-t} |\phi_1'''(1-t,\tau)|d\tau =$$

$$= -120\,\varphi'''(t) + \int_0^{1-t} \phi_1'''(1-t,\tau)d\tau + \int_0^{1-t} |\phi_1'''(1-t,\tau)|d\tau \ .$$

Отсюда имеем

$$C_{5,3}(t) \le -120\ \varphi'''(t) + 2\int_{\tau^*}^{1-t} \phi_1'''(1-t,\tau)d\tau \ \le$$

$$\le -120\ \varphi'''(t) + \frac{4t^2(1-t)^2(5t-1)}{30} < \sqrt{2},$$

где τ^* - корень $\phi_1'''(1-t,\tau)$.

При $t \in [t_{3,2}, 1/2]$ анализ подынтегральных функций показывает, что они отрицательны и не имеют корней. Действуя также как в предыдущем случае, имеем

$$C_{5,3}(t) \le -120\varphi'''(t) + \int_0^t G_0'''(t,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^{1-t} |G_0'''(t,\tau)|d\tau + \frac{2\omega_1}{1-\omega_1}\int_0^1 a_1 Q_1'''(t,\tau)d\tau \ \le$$

$$\le -\left[120\varphi'''\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2\tilde{B}_1\left(\tfrac{1}{2}\right)A'''\left(\tfrac{1}{2}\right)\right],$$

что в итоге приводит к оценке для $|R'''(x)|$.

При $r = 4$ функция $A^{IV}(t) \le 0$, а $A^{IV}(1-t)$ меняет знак с минуса на плюс в точке $t_{4,1} = (5-\sqrt{2})/10 \approx 0,35858$. Функция $\phi_1^{IV}(t,\tau) \ge 0$, а $\phi_1^{IV}(1-t,\tau) \ge 0$ при $t \in [1/5, 1/2]$ и при $t \in [0,1/5]$ меняет знак с минуса на плюс в точке $\tau_4^* = (1-5t)/(1-4t)$. Исходя из этих свойств получаем

$$C_{5,4}(t) \le 120\varphi^{IV}(t) + 2\tilde{B}_2(t)A^{IV}(1-t) + 8(1-4t) \le$$
$$\le 4[(1+2\sqrt{2}] + (2-5\sqrt{2})t] \le K_4, \; t \in [0,1/5];$$

$$C_{5,4}(t) \le 120\varphi^{IV}(t) + 2\tilde{B}_2(t)A^{IV}(1-t) \le$$
$$\le 4[(-1+2\sqrt{2}) + 5(2-\sqrt{2})t] < K_4, \; t \in [1/5, t_{4,1}];$$

$$C_{5,4}(t) \le 120\varphi^{IV}(t) < K_4, \quad t \in [t_{4,1}, 1/2].$$

откуда следует утверждение теоремы для $|R^{IV}(x)|$.

При $r = 5$ функции $G_0^V(z,\tau)$ и $a_1Q_1^V(z,\tau)$, $z = t$ и $z = 1-t$ противоположные по знаку и не имеют корней. Отсюда получаем асимптотически точную поточечную оценку

$$C_{5,5}(t) = [(2+\sqrt{2}) - 6u - 6u^2 + (8-10\sqrt{2})u^3]/6,$$

где $u = t(1-t)$. Следовательно, $C_{5,5}(t) \le K_5$ и тем самым теорема доказана.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. MIROSHNICHENKO V.L. Exact Error Bounds for the Periodic Cubic and Parabolic Spline Interpolation on the Uniform Mesh. //Mathematika Balkanica. - 1988.-Vol.2,N 2-3.-P.210-221.

3. ДУЙСЕКОВ А.К. Об интерполяции сплайнами пятой степени и их применение в методе коллокаций: Автореф. дис...канд. физ.-мат.наук: 01.01.01 - Алма-Ата, 1976. - 12 с.

4. КАЛИЕВ П.У. О получении точных оценок погрешности интерполяции функций сплайнами пятой степени дефекта 1 на равномерной сетке //Сплайны в вычислительной математике. - Новосибирск, 1986. - Вып. 115: Вычислительные системы. - С. 26-40.

5. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции //Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1975. - Вып. 65: Вычислительные системы. - С. 29-49.

6. КОРНЕЙЧУК Н.П. Сплайны в теории приближений.-М.: Наука, 1985. - 350 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

19 июня 1991 года